This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

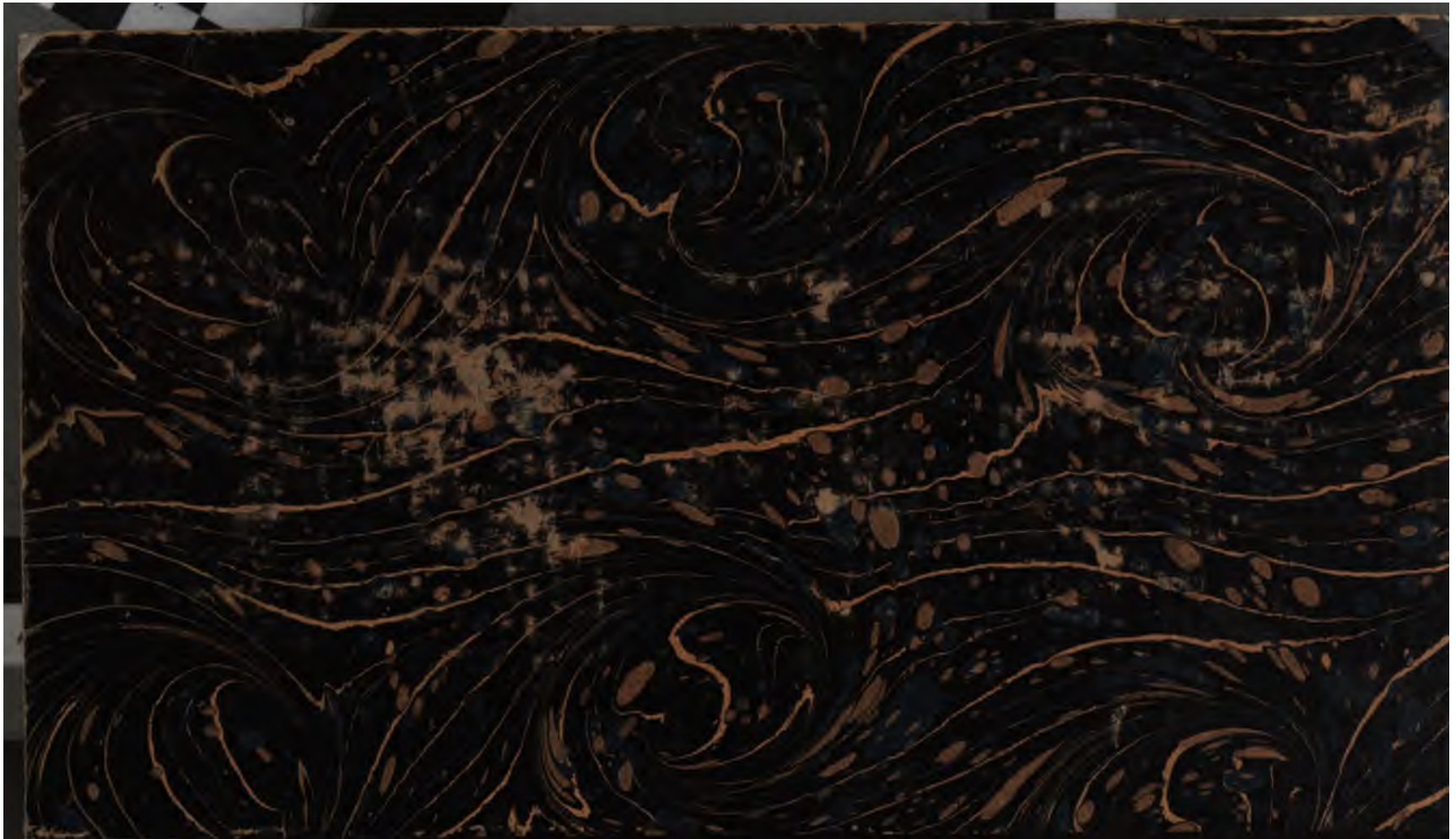
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

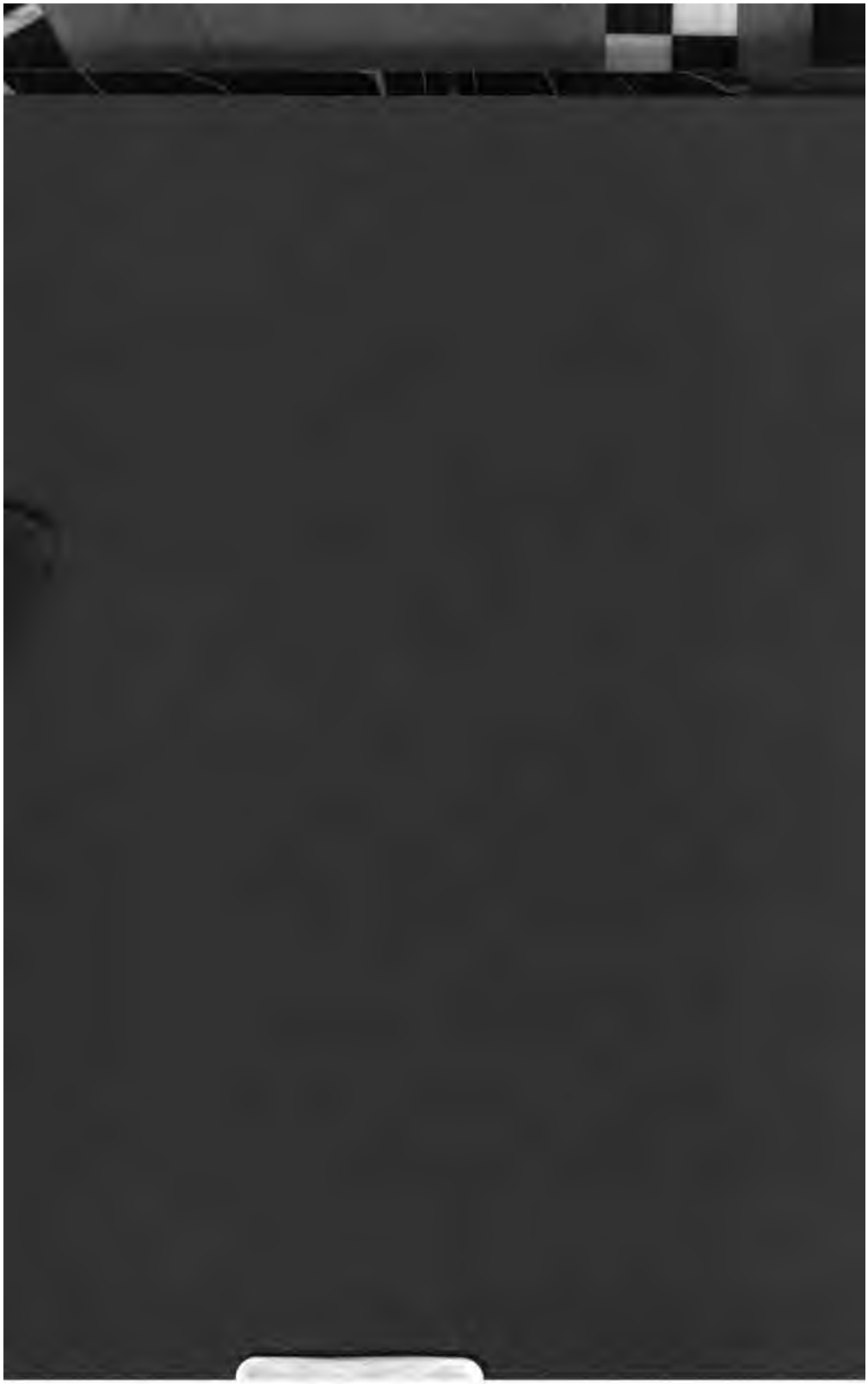
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Stanford University Libraries
3 6105 001 363 428



M426

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in

Hamburg.

Band III.

1891—1900.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.
1900.

153158

STANFORD LIBR

Inhaltsangabe von Band III.

Seite

I. Bericht über die Versammlungen 20. 98. 157. 188. 226. 263. 309. 367. 405. 426
II. Mitgliederverzeichnis 164. 315. 408

III. Abhandlungen.

R. Böger: Eine allgemein gültige Konstruktion einer Kurve 2. Ordnung aus fünf Punkten 1
E. Busche: Über Kroneckersche Äquivalenzen 3
J. Schröder: Bemerkung über das zweite Glied der Potenzentwickelung der durch $\mu = 0$ charakterisierten hyperelliptischen σ-Funktionen . . 7
H. Schubert: Über eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie 12
E. Busche: Über eine rationale nicht-Euklidische Maßbestimmung in der Ebene 37
P. Jaerisch: Zur Theorie der Schwingungen einer elastischen Kugel . . 51
J. Schröder: Zur Bestimmung des nur von den Konstanten des algebraischen Gebildes abhängigen Teiles der hyperelliptischen ϑ-Funktionen. 73
H. Schubert: Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen 86
E. Busche: Bemerkung über die Funktion $E(s)$ mit komplexem Argument 103
A. Hübner: Die Bewegungsachsen gestützter starrer Körper 107
Chr. Nehls: Graphische Darstellung der Koëfficienten algebraischer Gleichungen und der Näherungswerte von Kettenbrüchen 139
E. Busche: Über die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis n 167
H. Oppenheimer: Über eine Kegelschnittkonfiguration 173
J. Schröder: Einige Sätze über Teileranzahlen sowie einige Anwendungen der Geometrie auf Zahlentheorie 178
K. Eichler: Zur Theorie schwingender Saiten 193
P. Jaerisch: Zur Integration der Gleichungen des elastischen Kreiscylinders 202
J. Schröder: Verallgemeinerung eines Satzes über Teileranzahlen 219
H. Schubert: Ein zahlentheoretischer Satz 223
E. Busche: Beweis des vorstehenden Satzes von Herrn Schubert 225
E. Busche: Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes 233
E. Busche: Über die Teiler der natürlichen Zahlenreihe 234
P. Jaerisch: Zur Integration der Elasticitätsgleichungen isotroper Rotationskörper 249
A. Köpcke: Eine Funktion mit Symmetrieen in jedem Intervall. 258
P. Jaerisch: Transformation der hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung 273
O. Pund: Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie, insbesondere die Neper'schen Regeln für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke 280

Seite

J. Schröder: Die Potenzentwickelung von $F(x) = \dfrac{1 - \prod_0^{m-1} (1 - x^{ri+s})}{(1 - x^{rm}) \prod_0^{m-1} (1 - x^{ri+s})}$ 302

E. Hoppe: Die Anderung der Lichtschwingungen im magnetischen Felde 319
O. Pund: Über einige Relationen zwischen Modulsystemen 325
E. Busche: Über eine Anzahlbeziehung und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie 333
R. Böger: Der Kegelschnitt der neun Punkte 346
R. Böger: Eine Aufgabe ersten Grades 352
H. Schubert: Zur Theorie des Schlick'schen Problems 354
O. Pund: Über Abel'sche Gruppen und lineare Modulsysteme 371
A. Köpcke: Ein Satz über Funktionen mit Oscillationen in jedem Intervall 376
E. Busche: Eine Bemerkung über Binomialkoëfficienten 379
J. Schröder: Bemerkung über die Schubert'sche Funktion: $\psi(u_0, u_1 \ldots u_q)$ 382
R. Böger: Sechseck und Involution 387
R. Böger: Der Hesse'sche Satz und die adjungierten Involutionen 390
W. Kawalki: Die geradlinig begrenzten Flächenstücke des hyperbolischen Paraboloids 400
E. Hoppe: Michael Stifels handschriftlicher Nachlafs 411
O. Pund: Über Reduktion linearer Modulsysteme 423
Verzeichnis der Abhandlungen des 1890 verstorbenen Mitgliedes der Mathematischen Gesellschaft Wilhelm Lazarus, zusammengestellt nach Ohrtmann und nach dem Katalog der Math. Gesellschaft 426

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 1. Ausgegeben im Februar 1891.

Eine allgemein gültige Konstruktion einer Kurve 2. Ordnung durch 5 Punkte.

Von Rudolf Böger.

Eine Involution ist bestimmt durch zwei Elementenpaare. Statt aber zwei beliebige Elementenpaare zur Bestimmung einer Involution zu wählen, nimmt man häufig die beiden Doppelelemente, weil man dadurch die Betrachtungen zu vereinfachen glaubt. Sehr bald zeigt sich indessen, dafs die eingeführte Beschränkung die Untersuchungen aufs empfindlichste hemmt. Will man dann nicht durch Einführung des in diesem Falle inhaltsleeren Wortes „imaginär" die sich darbietenden Schwierigkeiten ungelöst bei Seite liegen lassen, so mufs man bei den Beweisen verschiedene Fälle unterscheiden, je nachdem die Involutionen Doppelelemente haben oder nicht. Es empfiehlt sich daher, bei der Darstellung einer Involution von vorn herein zwei beliebige Elementenpaare zu wählen.

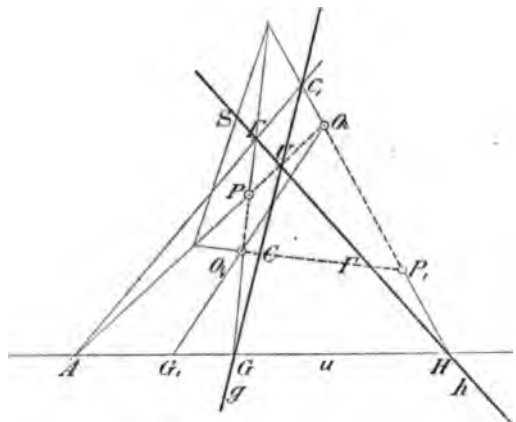
Aber auch dann noch zeigen sich beim Fortschritt der Untersuchungen Hemmnisse, weil zwei Elementenpaare nicht ausreichen, alle Fälle, welche bei der Darstellung einer Involution möglich sind, aufzuzählen. Hat nämlich die Involution (reelle) Doppelelemente, so giebt es unter den sie zusammensetzenden Elementenpaaren „imaginäre". Diese sind wieder durch zwei Elementenpaare darzustellen. Zu der allgemeinen Darstellung einer Involution gehören daher zwei mal zwei Elementenpaare.

Dafs durch Einführung dieser Darstellungsweise einer Involution die Beweisführung nicht verwickelter, sondern einheitlicher wird, glaube ich in meiner Abhandlung „Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen 2. Ordnung" gezeigt zu haben. Eine auf diese

Betrachtungen sich stützende Konstruktion der Kurve 2. Ordnung durch 5 Punkte ist auch in Bd. I dieser Mitteilungen (S. 132) gegeben worden. Bei dem Versuche nun, auf grund dieser Darstellung einer Involution durch 4 Elementenpaare ein ebenes Polarsystem 3. Ordnung zu konstruieren, hat sich eine andere Konstruktion der Kurve 2. Ordnung ergeben, die hier einen Platz finden möge, weil sie sich von den angedeuteten allgemeinen Betrachtungen loslösen läfst und ohne weitere Hülfssätze verständlich ist. Überdies ist die Konstruktion bequem, da sie nur das Ziehen einer Reihe von Verbindungslinien erfordert.

Die Kurve soll durch den Punkt P gehen und in den beiden Trägern g und h eine gegebene Involution erzeugen.

Konstruktion: Dem Schnittpunkte $g\,h = U$ seien in g und h die Punkte G und H zugeordnet. Die Verbindungslinien des gegebenen Punktes P mit U und G mögen $\overline{GH} = u$ und den Träger h in A und Γ_1 schneiden; die Verbindungslinie dieser Punkte A und Γ_1 schneide g in C_1. Die Verbindungslinie der den Punkten Γ_1 und C_1 in h und g zugeordneten Punkte Γ und C möge $\overline{HC_1}$ in P_1 schneiden. Projiziert man dann die in h gegebene involutorische Punktreihe aus P und P_1, so liefern die Schnittpunkte entsprechender Strahlen die Punkte der verlangten Kurve.



Beweis: Die Figur enthält aufser P und P_1 noch die Kurvenpunkte $\overline{PU}\,\overline{P_1H} = Q$ und $\overline{P\Gamma_1}\,\overline{P_1\Gamma} = Q_1$ (die in bezug auf g dieselbe Lage haben wie P und P_1 in bezug auf h). Da nach der Konstruktion die gezeichnete Kurve in h die gegebene Punktreihe erzeugt, so ist noch zu zeigen, dafs auch UG und CC_1 in g konjugierte Punkte sind. Dem Punkte U ist nach der Konstruktion H konjugiert; ferner ist ihm der Punkt konjugiert, welcher von ihm durch die Kurvenpunkte P und Q harmonisch getrennt ist; dieser aber wird erhalten durch die Verbindungslinie $\overline{HG}$, weil $\overline{PQ}$ durch h und u harmonisch geteilt wird [Viereck $GHC_1\Gamma_1$], folglich ist u die Polare von U und G dem Punkte U konjugiert. — Dem Punkte

$\overline{QQ_1} \cdot u = G_1$ ist, weil er in u liegt, der Punkt U konjugiert; ferner ist ihm der von ihm durch die Kurvenpunkte Q und Q_1 harmonisch getrennte konjugiert; dieser aber wird erhalten durch die Verbindungslinie $\overline{GU}$ [Projektion der harmonischen Punkte in $\overline{PQ}$ aus G], folglich ist G_1 der Pol von g. Mithin haben wir, da C in g liegt, als ersten ihm konjugierten Punkt den Punkt G_1, der zweite ist der von C durch die Kurvenpunkte P_1 und Q_1 harmonisch getrennte; dieser wird aber erhalten durch die Verbindungslinie $\overline{C_1 G_1}$ [Projektion der harmonischen Punkte in $\overline{QQ_1}$ aus C_1], d. h. C_1 ist dem Punkte C konjugiert.

Anmerkung: Eine gröfsere Zahl von Kurvenpunkten läfst sich zeichnen, wenn man durch den Punkt S, in welchem die Verbindungslinie der Diagonalpunkte $\overline{PQ} \cdot \overline{P_1 Q_1}$ und $\overline{PQ_1} \cdot \overline{P_1 Q}$ des Vierecks PQP_1Q_1 den Träger h schneidet, $\overline{Q_1 P}$ und $Q_1 \overline{P_1}$ perspektivisch auf einander bezieht und die so gewonnenen entsprechenden Punkte dieser Geraden von P_1 und P aus projiziert.

Über Kroneckersche Äquivalenzen.

Von E. Busche in Bergedorf.

Nennt man nach Herrn L. Kronecker (Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 30. April 1885) zwei Zahlen a und b äquivalent, $a \sim b$, wenn sie sich nur um eine ganze Zahl von einander unterscheiden, so kann man die Frage nach der Anzahl der nicht äquivalenten reellen Zahlen x aufwerfen, die die Äquivalenz

$$ax \sim 0 \tag{1}$$

befriedigen. Diese Anzahl ist offenbar, wenn a eine ganze reelle Zahl ist, gleich dem absoluten Betrage $|a|$ dieser Zahl, da die Zahlen $0, \frac{1}{|a|}, \frac{2}{|a|}, \cdots \frac{|a|-1}{|a|}$ die einzigen zwischen Null und 1 gelegenen Zahlen sind, die mit a multipliziert ein ganzzahliges Produkt ergeben, und alle übrigen Lösungen der Äquivalenz mit diesen äquivalent sind. Bringt man die angegebenen Lösungen auf die kleinsten Nenner, so sind diese die sämtlichen Teiler von a und zu jedem Teiler δ gehören $\varphi(\delta)$ verschiedene Zähler, so dafs man den bekannten Gaussschen Satz über die Eulersche φ-Funktion auf diese Weise sofort erkennen kann.

Es hat keine Schwierigkeit, diese Betrachtung auf einen von Null verschiedenen Wert der rechten Seite von (1) oder einen beliebigen rationalen oder irrationalen Wert von a auszudehnen, ich

will jedoch hier nur die Verallgemeinerung der Aquivalenz (1) untersuchen, die darin besteht, dafs n Äquivalenzen mit n Unbekannten betrachtet werden, deren Koeffizienten ganzzahlig und deren rechte Seiten gleich Null sind, und die Anzahl ihrer nicht äquivalenten Lösungen bestimmen. Dabei ergiebt sich folgender Satz:

Das System von homogenen linearen Äquivalenzen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\sim 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\sim 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &\sim 0 \end{aligned}$$

mit der von Null verschiedenen Determinante

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

hat $|R|$ nicht äquivalente Lösungen, die alle zwischen Null (einschl.) und 1 angenommen werden können, da die Koeffizienten a ganzzahlig sind.

Um diesen Satz zu beweisen, betrachte man das System von Äquivalenzen als ein System von Gleichungen, deren rechte Seiten die unbestimmten ganzen Zahlen $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$ sind. Dann ergiebt sich durch Auflösung desselben

$$x_\varrho = \frac{z_\varrho}{R} \qquad (\varrho = 1, 2 \cdots\cdots n)$$

und

$$z_\varrho = m_1\alpha_{1\varrho} + m_2\alpha_{2\varrho} + \cdots\cdots + m_n\alpha_{n\varrho},$$

wenn unter α_{ik} die zu a_{ik} adjungierte Subdeterminante verstanden wird. Damit nun $0 \leqq x_1 < 1$ sei, müssen die m so bestimmt werden, dafs

$$z_1 = m_1\alpha_{11} + m_2\alpha_{21} + \cdots + m_n\alpha_{n1} \tag{2}$$

abgesehen vom Zeichen $< R$ ist. Wenn $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \cdots \alpha_{n1}$ keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, was zuerst angenommen werden möge, so kann z_1 die Werte $0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm (|R| - 1)$ annehmen, wo die oberen oder die unteren Zeichen gelten, je nachdem R positiv oder negativ ist.

Ist z_1 irgend ein bestimmter der möglichen Werte, so kann die Gleichung (2) durch ∞^{n-1} verschiedene Wertsysteme der Zahlen m befriedigt werden, und wenn $m_1^0, m_2^0, \ldots m_n^0$ ein beliebiges derselben ist, so ist auch

$$(3)\quad \begin{cases} m_1 = m_1^0 \quad * \quad + t_{12}\alpha_{21} + t_{13}\alpha_{31} + \cdots \cdots\cdots + t_{1n}\alpha_{n1} \\ m_2 = m_2^0 - t_{12}\alpha_{11} \quad * \quad + t_{23}\alpha_{31} + \cdots\cdots\cdots + t_{2n}\alpha_{n1} \\ m_3 = m_3^0 - t_{13}\alpha_{11} - t_{23}\alpha_{21} \quad * \quad + t_{34}\alpha_{41} \cdots\cdots + t_{3n}\alpha_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n = m_n^0 - t_{1n}\alpha_{11} - t_{2n}\alpha_{21} - t_{3n}\alpha_{31} - t_{4n}\alpha_{41} \cdots - t_{n-1,n}\alpha_{n-1,1} * \end{cases}$$

ein solches, da alle mit den $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ beliebig anzunehmenden ganzen Zahlen $t_{\nu\mu}$ $(\nu < \mu)$ multiplizierten Glieder sich wegheben.

Es läfst sich nun zeigen, dafs die Bedingung für die z_ϱ, abgesehen vom Zeichen $< R$ zu sein, gerade hinreicht, um die m eindeutig zu bestimmen, so dafs zu jedem der $|R|$ Werte von x_1 ein Wertsystem der x_ϱ gehört. Setzt man die Werte der m in die Ausdrücke für $z_2, z_3, \ldots z_n$ ein, so ergiebt sich

$$z_2 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu^0\alpha_{\nu 2} + t_{12}(\alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{22}) + t_{13}(\alpha_{31}\alpha_{12} - \alpha_{11}\alpha_{32}) + \cdots\cdots$$

$$z_3 = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu^0\alpha_{\nu 3} + t_{12}(\alpha_{21}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}) + t_{13}(\alpha_{31}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{33}) + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_n = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu^0\alpha_{\nu n} + t_{12}(\alpha_{21}\alpha_{1n} - \alpha_{11}\alpha_{2n}) + t_{13}(\alpha_{31}\alpha_{1n} - \alpha_{11}\alpha_{3n}) + \cdots\cdots$$

Jetzt mache ich Gebrauch von einem von Borchardt direkt bewiesenen Determinantensatz, den Jacobi durch algebraische Betrachtungen gefunden hat (Baltzer, Determinanten § 7, 2), nach welchem eine Subdeterminante $h$ten Grades des Systems α (der Adjunkten) zu der Adjunkte der entsprechenden Subdeterminante des Systems a (der Elemente) das Verhältnis R^{h-1} hat. Die Faktoren der t in dem letzten Gleichungssystem sind Subdeterminanten 2. Grades der Adjunkten, also gleich gewissen Subdeterminanten $(n-2)$ten Grades der a multipliziert mit R. Die Gleichungen haben deshalb, wenn der Faktor R abgesondert wird, die Gestalt

$$(4) \qquad z_\varrho = M_\varrho^0 + R\cdot T_\varrho,$$

und es giebt mithin einen ganz bestimmten Wert T_ϱ^0 von T_ϱ, welcher bewirkt, dafs z_ϱ das Vorzeichen von R erhält und zugleich absolut genommen $< R$ ist. Dafs z_ϱ nicht von den zum Teil willkürlich angenommenen Gröfsen m^0 abhängt, ergiebt sich leicht, wenn man statt derselben nach (3) andere Gröfsen m' einführt, durch Anwendung desselben Determinantensatzes; die neuen Gröfsen M_ϱ' sind den M_ϱ^0 (mod. R) kongruent.

Aus den $n - 1$ Gleichungen

$$t_{12} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + t_{13} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + \cdots = T_2^0$$

$$t_{12} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} + t_{13} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + \cdots = T_3^0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_{12} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} \\ a_{2n} & a_{21} \end{vmatrix} + t_{13} \operatorname{adj} \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} \\ a_{3n} & a_{31} \end{vmatrix} + \cdots = T_n^0$$

kann man, indem man die erste mit a_{12}, die zweite mit a_{13}, u. s. w., die letzte mit a_{1n} multipliziert und darauf sämtliche Gleichungen addiert, alle t eliminieren bis auf die mit dem ersten Index 1, und zwar ergiebt sich die Gleichung

$$t_{12}\,\alpha_{21} + t_{13}\,\alpha_{31} + \cdots + t_{1n}\,\alpha_{n1} = a_{12}\,T_2^0 + a_{13}\,T_3^0 + \cdots + a_{1n}\,T_n^0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber nichts anderes als $m_1 - m_1^0$, so dafs m_1 bestimmt ist. Ganz analog kann man $m_2, m_3 \ldots m_n$ finden, und damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen: es giebt ein ganz bestimmtes System von Zahlen m, für welches x_1 gleich einem bestimmten der $|R|$ möglichen Brüche ist und zugleich $x_2, x_3 \ldots . x_n$ ebenfalls positive echte Brüche sind.

Wenn, was bis jetzt ausgeschlossen sein sollte, $\alpha_{11}, \alpha_{21} \ldots \alpha_{n1}$, einen gemeinsamen Teiler haben, so kann man statt x_1 irgend eine andere Unbekannte x_ϱ bevorzugen, falls eine der Reihen von Subdeterminanten $\alpha_{1\varrho}, \alpha_{2\varrho} \ldots\ldots \alpha_{n\varrho}$ ohne gemeinsamen Teiler sein sollte. Ist dies aber nicht der Fall, so erkennt man leicht, dafs das oben angewendete Schlufsverfahren seine Gültigkeit behält, dafs aber, wenn δ_1 der gröfste gemeinschaftliche Teiler von $\alpha_{11}, \alpha_{21} \ldots . \alpha_{n1}$, ist, jetzt zu jedem der $\left|\frac{R}{\delta_1}\right|$ Werte von z_1 genau δ_1 Wertsysteme der z_ϱ gehören. An die Stelle der Gleichung (4) tritt nämlich jetzt eine Gleichung von der Form

$$Z_\varrho = N_\varrho^0 + \frac{R}{\delta_1} S_\varrho,$$

woraus man sieht, dafs man ein mit dem richtigen Vorzeichen versehenes z_ϱ zwischen o und $\frac{R}{\delta_1}$, eins zwischen $\frac{R}{\delta_1}$ und $\frac{2R}{\delta_1}$ u. s. w. bestimmen kann, so dafs sich im ganzen δ_1 Werte von $|z_\varrho|$ ergeben, die $< |R|$ sind und zu demselben Wert von z_1 gehören.

Auch ohne die eben durchgeführte Untersuchung ist es sehr leicht, sich von der Existenz von Lösungen des Aquivalenzensystems zu überzeugen, und die Lösungen selbst zu finden. Nimmt man als die rechten

Seiten der Äquivalenzen n beliebige ganze Zahlen $m_1, \ldots m_n$ an und löst die entsprechenden Gleichungen, so bekommt man $x_1 = b_1 + \frac{z_1}{R}$, $x_2 = b_2 + \frac{z_2}{R} \cdots$, wo b_1, b_2.. ganze Zahlen und $\frac{z_1}{R}$, $\frac{z_2}{R} \cdots$ positive echte Brüche (oder Null) sind, welche eine Lösung des Äquivalenzensystems für $m_\varrho - \sum_1^n b_\varrho a_{\varrho\tau}$ als rechte Seiten bilden. Um aber zu beweisen, dafs zu einem bestimmten Wert von z_1 genau δ_1 Systeme von Werten z_ϱ gehören, dazu scheint der benutzte Determinantensatz doch notwendig zu sein.

Zum Schlufs bemerke ich, dafs der bewiesene Satz unmittelbar zu dem folgenden Satz über Kongruenzen führt:

Die Anzahl der Lösungen eines Systems von n linearen homogenen Kongruenzen mit n Unbekannten in Bezug auf denselben Modul ist gleich dem Modul, wenn die Determinante des Systems durch den Modul teilbar ist.

Es wäre merkwürdig, wenn dieser Satz nicht schon bekannt sein sollte.

Bemerkung über das zweite Glied der Potenzentwicklung der durch $\mu = 0$ charakterisierten hyperelliptischen σ-Funktionen.

Von J. Schröder in Hamburg.

Die Integration der Differentialgleichung für $d \log \vartheta\,(0, 0, .. 0)$ erfordert bekanntlich, dafs der Wert des zweiten Gliedes der zugehörigen σ-Entwickelung für gewisse besondere Argumente:

$$(w_1, w_2, \ldots, w_p) = (k_1^{p-1}, k_1^{p-2}, \ldots, k_1^0)$$

festgestellt wird.[1]) Aus invariantentheoretischen Gründen konnte nun geschlossen werden, dafs dieser Ausdruck: $\Gamma_2(k_1^{p-1}, \ldots, k_1^0)$ bis auf einen rein numerischen Faktor gleich der zweiten Überschiebung $\Delta_{\varphi\psi}(z)$ der beiden Partialformen φ_z^{p+1} und ψ_z^{p+1}, in welche die Grundform f_z^{2p+2} zerspalten war, sein mufste, wenn noch in $\Delta_{\varphi\psi}(z)$ für z der besondere Wert k_λ eingetragen wurde; d. h. es war:

$$\Gamma_2(k_1^{p-1}, .., k_1^0) = c \cdot \Delta_{\varphi\psi}(k_\lambda)$$

Die Bestimmung der Konstanten c wurde alsdann durch Berücksichtigung der Bedingung vollzogen, dafs der in Frage stehende

1) S. d. Diss. d. Verf.: Ueber den Zusammenhang der hyperellipt. σ- und ϑ-Functionen (Göttingen 1890) S. 49 u. 50.

$\vartheta(0, 0, \ldots 0)$-Wert in bezug auf jeden der Verzweigungswerte von der nullten Dimension sein musste. Daraus resultierte eine lineare Gleichung für c, deren Lösung:

$$c = \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)}$$

lautete.

Hiernach wurde dann:

$$(1) \qquad \Gamma_2(k_\lambda^{p-1}, \ldots, k_\lambda^0) = \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)} \cdot \Delta_{\varphi\psi}(k_\lambda).$$

Es ist nun leicht, dieses Ergebnis auch direkt aus der allgemeinen Definitionsgleichung der σ-Funktionen, wie sie von Herrn Klein gegeben ist, herzuleiten. Dies möge im folgenden geschehen:

Wir treffen zu dem Zweck zunächst die Festsetzung, dafs für die Anzahl ν der Punktepaare (x, y) die für $\mu = 0$ zulässige kleinste Zahl, nämlich $\nu = 1$ gewählt werde. Alsdann ist das σ selbst in folgender Weise definiert:

$$(2) \qquad \sigma(w_1, \ldots, w_p) = \sigma(x, y) = \frac{\Omega(xy)}{2(x-y)} \begin{vmatrix} \sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(x)} \\ -\sqrt{\varphi(y)}\sqrt{\psi(y)} \end{vmatrix}.$$

Indem man rechter Hand für $\Omega(x, y)$ seinen Wert substituiert[1]) und die Determinante entwickelt, wird:

$$\sigma(x, y) =$$

$$\frac{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\psi(x)}\sqrt{\varphi(y)}}{2\sqrt[4]{f(x)}\sqrt[4]{f(y)}} \cdot c^{\int_y^x \int_y^x \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z,z')}{2(z-z')^2} \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{dz'}{\sqrt{f(z')}}}$$

oder, wenn für die Exponentialgrösse ihre Reihenentwickelung eingeführt wird:

$$(3) \qquad \sigma(x, y) = \frac{\sqrt{\varphi(x)}\sqrt{\psi(y)} + \sqrt{\varphi(y)}\sqrt{\psi(x)}}{2\sqrt[4]{f(x)}\sqrt[4]{f(y)}} \cdot$$

$$\left\{1 + \frac{1}{2}\int_{\bar{y}}^{\bar{x}}\int_{y}^{x} \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(z, z')}{2(z-z')^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \cdot \frac{dz'}{\sqrt{f(z')}} + \cdots\right\}$$

Nunmehr lassen wir die weitere Annahme Platz greifen, dafs der Punkt x dem Punkte y auf der Riemannschen Fläche konsekutiv werde. Wir setzen also

$$x = y + dy, \quad \bar{x} = \bar{y} + d\bar{y}.$$

Demgemäfs wird aus der Glg. (3):

---

1) S. F. Klein, Math. Ann., Bd. 32, S. 367.

(4) $$\sigma(y+dy,\,y) =$$

$$\frac{\sqrt{\varphi(y+dy)}\,\sqrt{\psi(y)}+\sqrt{\varphi(y)}\,\sqrt{\psi(y+dy)}}{2\sqrt[4]{f(y+dy)}\,\sqrt[4]{f(y)}}\left\{1+\frac{1}{2}\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+d\bar{y}}\int_{y}^{y+dy}+\cdots\cdots\right\}.$$

Die rechte Seite entwickeln wir nun nach steigenden Potenzen des Inkrementes dy, und zwar nehmen wir diese Entwickelungen zuvörderst bezüglich der Ausdrücke $\sqrt{\varphi(y+dy)}$, $\sqrt{\psi(y+dy)}$, $\sqrt[4]{f(y+dy)}$ und des Doppelintegrals vor, um durch Kombination derselben schliefslich die fragliche Entwickelung für $\sigma(y+dy,\,y)$ selbst zu gewinnen.

Es ergiebt sich ohne weiteres:

(5) $$\sqrt{\varphi(y+dy)} =$$

$$\sqrt{\varphi(y)}+\frac{\varphi'(y)}{2\sqrt{\varphi(y)}}dy+\frac{1}{4\sqrt{\varphi(y)}}\left(\varphi''(y)-\frac{1}{2}\frac{\varphi'^2(y)}{\varphi(y)}\right)dy^2+\cdots\cdots$$

und ganz entsprechend

(6) $$\sqrt{\psi(y+dy)} =$$

$$\sqrt{\psi(y)}+\frac{\psi'(y)}{2\sqrt{\psi(y)}}dy+\frac{1}{4\sqrt{\psi(y)}}\left(\psi''(y)-\frac{1}{2}\frac{\psi'^2(y)}{\psi(y)}\right)dy^2+\cdots\cdots$$

(7) $$\frac{1}{\sqrt[4]{f(y+dy)}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{f(y)}}\left\{1-\frac{f'(y)}{4f(y)}dy+\frac{1}{8f(y)}\left(\frac{5}{4}\frac{f'^2(y)}{f(y)}-f''(y)\right)dy^2+\cdots\cdots\right\}$$

Betreffs des Doppelintegrals aber ist folgende Überlegung anzustellen:

Es ist zunächst, wenn sich die innere Integration auf die Variable z beziehen möge:

$$J=\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+d\bar{y}}\frac{dz'}{\sqrt{f(z')}}\int_{y}^{y+dy}\frac{\sqrt{f(z)}\,\sqrt{f(z')}+\frac{F(zz')}{2(z-z')^2}}{\sqrt{f(z)}}dz$$

$$=\int_{\bar{y}}^{\bar{y}+d\bar{y}}\frac{dz'}{\sqrt{f(z')}}\left(\frac{\sqrt{f(y)}\,\sqrt{f(z')}+\frac{F(yz')}{2(y-z')^2}}{\sqrt{f(y)}}dy\right).$$

Nehmen wir nun an, dafs der von $\bar{y}$ nach $\bar{y}+d\bar{y}$ verlaufende Integrationsweg dem Wege von y nach $y+dy$ Punkt für Punkt konjugiert sei, so dürfen wir ihn geradezu durch den letzteren ersetzen, wenn wir nur gleichzeitig $\sqrt{f(z')}$ mit $-\sqrt{f(z')}$ vertauschen. Dann haben wir offenbar:

$$J = \int_{y}^{y+dy} \frac{-\sqrt{f(y)}\sqrt{f(z')} + F(yz')}{2(y-z')^2} \frac{dz'}{-\sqrt{f(z')}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$$

$$= \left[\frac{\sqrt{f(y)}\sqrt{f(z')} - F(yz')}{2(y-z')^2}\right]_{z'=y} \frac{dy^2}{f(y)}.$$

Der in die Klammer eingeschlossene Ausdruck nimmt nun für $z' = y$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Der wahre Wert ist aber leicht zu ermitteln. Man findet nämlich, dafs:

$$(8) \quad \left[\frac{\sqrt{f(y)}\sqrt{f(z')} - F(yz')}{2(y-z')^2}\right]_{z'=y} = \frac{-(2p+1)f'^2(y) + 2(p+1)f''(y)f(y)}{16(2p+1)f(y)}$$

wird; mithin ist vorläufig:

$$(9) \quad \ldots J = \frac{-(2p+1)f'^2(y) + 2(p+1)f''(y)f(y)}{16(p+1)f(y)} \cdot \frac{dy^2}{f(y)}$$

Für den Zähler aber kann mit Benutzung des Symbols der Hesseschen Form H von f gesetzt werden:

$$-(2p+1)f'^2(y) + 2(p+1)f''(y)f(y) = (2p+2)^2(2p+1)H(y),$$

wenn H durch das invariantentheoretische Symbol:

$$H(y) = \tfrac{1}{2}(ff')^2 f_y^{2p} f_y'^{2p}$$

definiert ist.

Folglich ist dann der gesuchte Wert des Doppelintegrals:

$$(10) \quad J = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \frac{H(y)}{f^3(y)}\, dy^2$$

Tragen wir nun die Ergebnisse (5), (6), (7), 10) in die Gleichung (4) ein, so entsteht, indem wir successive die Glieder 0., 1. und 2. Ordnung in dy ausrechnen und dabei die aus der Gleichung

$$f_{2p+2} = \varphi_{p+1} \cdot \psi_{p+1}$$

fliessenden Relationen:

$$f' = \varphi\psi' + \varphi'\psi,\ f'' = \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \varphi''\psi$$

gehörig beachten, die folgende Entwickelung:

$$(11) \quad \sigma(y+dy, y) =$$

$$1 + * + \left\{(p+1)^2 H(y) + \tfrac{1}{4}(\varphi'(y)\psi(y) - \varphi(y)\psi'(y))^2\right\} \frac{dy^2}{8f^2(y)} + \cdots\cdots$$

Der innerhalb der $\{\}$-Klammer befindliche Ausdruck:

$$\varphi'(y)\psi(y) - \varphi(y)\psi'(y)$$

ist indessen proportional der Funktionaldeterminante der beiden Formen φ und ψ; denn es besteht die Beziehung:

(12) $\varphi'(y)\psi(y) - \varphi(y)\psi'(y) = (p+1)\cdot(\varphi\psi)\varphi_y^{p}\psi_y^{p} = (p+1)(\varphi,\psi)_1$;

infolgedessen wird:

(13) $\sigma(y\,dy, y) = 1 + * + \frac{(p+1)^2}{8f^2(y)}\left\{H(y) + \frac{1}{4}(\varphi,\psi)_1^2\right\}dy^2 + \cdots\cdots$

Das Quadrat der ersten Überschiebung $(\varphi, \psi)_1$ aber ist bekanntlich rational und ganz ausdrückbar durch die Formen φ und ψ selbst, sowie deren zweite Überschiebungen über einander und über sich selbst: $\Delta_{\varphi\psi}$, $\Delta_{\varphi\varphi}$, $\Delta_{\psi\psi}$. Das Gleiche gilt auch von der Hesseschen Form H. Die betreffenden Relationen lauten:

(14) $(\varphi,\psi)_1^2 = -\frac{1}{2}\Delta_{\varphi\varphi}\cdot\psi^2 + \Delta_{\varphi\psi}\cdot\varphi\psi - \frac{1}{2}\Delta_{\psi\psi}\cdot\varphi^2$

und:

(15) $H(y) = \frac{1}{8}\Delta_{\varphi\varphi}\cdot\psi^2 - \frac{1}{4(2p+1)}\Delta_{\varphi\psi}\cdot\varphi\psi + \frac{1}{8}\Delta_{\psi\psi}\cdot\varphi^2.$

Mit Rücksicht auf diese Beziehungen wird nunmehr:

(16) $\sigma(y+dy, y) = 1 + * + \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)}\Delta_{\varphi\psi}(y)\cdot\frac{dy^2}{f(y)} + \cdots\cdots\cdots$

oder wenn wir für $\Delta_{\varphi\psi}$ sein invariantentheoretisches Symbol einführen wollen:

(16a) $\sigma(y+dy, y) = 1 + * + \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)}(\varphi\psi)^2\varphi_y^{p-1}\psi_y^{p-1}\frac{dy^2}{f(y)} + \cdots\cdots$

Schliesslich machen wir den letzten Schritt in unserer Ueberlegung, indem wir den bisher willkürlichen Punkt y in einen beliebigen Verzweigungspunkt k_λ unserer zweiblättrigen Fläche rücken lassen; dadurch erhalten wir dann:

(17) $\sigma(k_\lambda + dk_\lambda, k_\lambda) = 1 + * + \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)}(\varphi\psi)^2\varphi_{k_\lambda}^{p-1}\psi_{k_\lambda}^{p-1}\frac{dk_\lambda}{f(k_\lambda)} + \cdots\cdots$

Hiermit ist das gewünschte Ergebnis gewonnen; denn die rechts stehende Entwickelung gestattet direkt abzulesen, dass der in der Dissertation mit $\Gamma_2(k_\lambda^{p-1}, \cdots, k_\lambda^0)$ bezeichnete Ausdruck in der That den Wert hat:

$$\Gamma_2(k_\lambda^{p-1}, \cdots, k_\lambda^0) = \frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)}(\varphi\psi)^2\varphi_{k_\lambda}^{p-1}\psi_{k_\lambda}^{p-1}.$$

Über eine Verallgemeinerung der Aufgaben der abzählenden Geometrie.

(Von H. Schubert in Hamburg.)

An der Spitze meines „Calcüls der abzählenden Geometrie“ (Leipzig 1879) habe ich die Aufgaben dieses Forschungsgebiets dahin formuliert, dafs sie die Zahlen x zu bestimmen suchen, welche angeben, wie viel geometrische Gebilde Γ gegebener Definition gewisse gegebene Bedingungen Z_1, Z_2 ... erfüllen. Bei der Lösung solcher Aufgaben hat man sich bisher die Zahlen z_1, z_2, ..., welche angeben, wie oft jede der Bedingungen Z_1, Z_2, ... erfüllt werden soll, fast immer als bestimmte, nicht als allgemeine, Zahlen gedacht. Ein namentlich für die algebraische Deutung der Resultate der abzählenden Geometrie wesentlicher Fortschritt besteht nun darin, dafs man immer x als Funktion der allgemein gedachten Zahlen z_1, z_2, ... darzustellen sucht. Dabei erscheint es zweckmäfsig, auch die Dimension des Raums, in dem man sich das Gebilde Γ liegend denkt, allgemein gleich n zu setzen, wobei Z_1, Z_2, ... so zu verallgemeinern sind, dafs sie für $n = 3$ (oder $n = 2$) die uns geläufigen Bedingungen ergeben. Dadurch findet man dann auch die Art und Weise, wie unsere Raum-Dimension 3 in den bestimmten Anzahlen enthalten ist, was natürlich nur bei allgemein gehaltenem n hervortreten kann. So ist es bekannt, dafs es in fester Ebene ($n = 2$) 1 Kegelschnitt giebt, der durch fünf gegebene Punkte geht, dass es in unserm dreidimensionalen Raume ($n = 3$) 92 Kegelschnitte giebt, die acht gegebene Strahlen schneiden, und dafs es in einem vierdimensionalen linearen Raume ($n = 4$) 6620 Kegelschnitte[1]) giebt, die elf gegebene Ebenen schneiden. Diese drei Zahlen 1, 92, 6620, deren Zusammenhang mit den Zahlen 2, 3, 4 gewifs nicht erraten werden kann, ergeben sich nun aus einer der unten mitgeteilten Formeln, nämlich der allgemeinen Kegelschnittformel, wenn man dieselbe so spezialisiert, dafs die Ebene des Kegelschnitts zwanglose Lage haben soll, während der Kegelschnitt selbst nur eine einzige Bedingung, nämlich die, einen gegebenen $(n-2)$-dimensionalen linearen Raum zu schneiden, $3n - 1$ mal erfüllen soll, und wenn man nach dieser Spezialisierung in der entstandenen Funktion von n diesen Buchstaben gleich 2, 3 oder 4 setzt.

---

1) Vergl. meine Abhandlung in Bd. I, Heft 9 der „Mitteil. der Hamb. Math. Ges.“ Seite 298.

Für den Strahl, die Ebene und überhaupt lineare Räume beliebiger Dimension habe ich schon die fundamentalsten der sich darbietenden Probleme in dem neuen allgemeinen Sinne erledigt.[1]) Für Kegelschnitte habe ich in der Festschrift[2]) der Hamb. Math. Ges. die Berechnung begonnen, aber weder vollständig erledigt noch auch zu einer befriedigenden Hauptformel geführt. Inzwischen habe ich nicht allein für Kegelschnitte und Ebenenpaare, sondern auch für projektive Grundgedilde und korrelative Ebenen je eine elegante Hauptformel entwickelt, welche die bekannten von Chasles und mir, sowie von den Herren Sturm und Hirst berechneten einzelnen Anzahlen zusammenfasst. Zugleich habe ich dadurch die Wege geebnet, welche zu den analogen Hauptformeln für Flächen und überhaupt Punkträume zweiten Grades, sowie für korrelative Räume dritter und höherer Dimension führen. Diese Formeln enthalten als Spezialfälle die von Herrn Zeuthen und mir berechneten Anzahlen für Flächen und dreidimensionale Räume zweiten Grades, sowie die neuerdings von Herrn Hirst berechneten Anzahlen für korrelative Räume dritter Dimension.[3]) Im folgenden teile ich vorläufig die wichtigsten von diesen allgemeinen Anzahl-Formeln kurz mit, indem ich verspreche, eine ausführlichere und begründende Abhandlung demnächst für die Math. Ann. fertig zu stellen.

Wie für die Lösung des Charakteristikenproblems linearer Räume,[4]) so ist auch für die neue Untersuchungsrichtung jene Bezeichnung von fundamentaler Bedeutung, die ich in den Math. Ann. Bd. 26, S. 33 für die linearen Räumen auferlegbaren Lage-Bedingungen eingeführt habe. Um diese Bezeichnung hier nochmal kurz erklären zu können, verstehe ich unter dem Zeichen $[i]$ einen i-dimensionalen linearen Raum. Dann lässt sich jene auch im folgenden immer angewandte Bezeichnung kurz so aussprechen: Das Symbol

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots a_d), \text{ wo } 0 \leqq a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_d \leqq n \text{ ist,}$$

setzt voraus, dafs ein $[a_d]$, in ihm liegend ein $[a_{d-1}]$ u. s. f.

---

1) Vergl. meine Abh. über die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums im 26. Bande der Math. Ann., sowie meine Abh. über Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension im 8. Bande der Acta Math.

2) Festschrift anläfslich der 200j. Jubelfeier der Math. Gesellsch. in Hamburg, zugleich Band II der Mitteil., S. 172 u. f.

3) In den „Proceedings of the London Math. Society" vol. 21, Nr. 375 bis 377.

4) Vergl. meine Abh. in den „Mitteilungen der Hamb. Math. Ges." Band I, Heft 6, S. 134.

gegeben ist, und bezeichnet dann für einen $[d]$ die Bedingung, dafs der $[d]$ mit jedem $[a_i]$ einen $[i]$ gemein habe. **Demgemäfs wird im folgenden**

$$(u, v, w)$$

immer die Bedingung bezeichnen, dafs eine Ebene in einem $[w]$ liegt, ferner mit einem in dem $[w]$ liegenden $[v]$ einen Strahl gemein hat und endlich einen in dem $[v]$ liegenden $[u]$ in einem Punkte schneidet. Speziell bedeutet also z. B. $(0, n-1, n)$, dafs eine in einem $[n]$ gedachte Ebene durch einen gegebenen Punkt geht, ferner $(0, 1, n)$, dafs sie einen gegebenen Strahl enthält, endlich $(n-2, n-1, n)$, dafs sie in einem $[n]$ zwanglos liegt.

Der Binomialkoefficient $\frac{b!}{f!\,(b-f)!}$ wird immer kurz mit b_f bezeichnet. Ferner soll immer $\varphi(b, f)$ die Summe

$$b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_f$$

bezeichnen, so dafs z. B. ist: $\varphi(b, b) = 2^b$, ferner: $\varphi(b, f) = 0$, wenn f negativ ist, endlich:

$$\varphi(u+v, v) - \varphi(u+v, u) \equiv (u+v)_{u+1} + (u+v)_{u+2} + \cdots + (u+v)_v.$$

§. 1. Die allgemeine Kegelschnitt-Formel.

Die elementarsten, einem Kegelschnitt in fester Ebene auferlegbaren Bedingungen, auf welche sich viele andere Bedingungen, z. B. die der Berührung, zurückführen lassen, sind erstens die Bedingung μ, dafs der Kegelschnitt durch einen gegebenen Punkt gehe, zweitens die Bedingung ν, dafs er eine gegebene Gerade berühre. Demgemäfs bezeichnen wir für einen in einem $[n]$ liegenden Kegelschnitt mit μ die Bedingung, dafs einer seiner Punkte in einem gegebenen $[n-2]$ liege, und mit ν die Bedingung, dafs eine seiner Tangenten in einem gegebenen $[n-1]$ liege. Während der Kegelschnitt die Bedingungen μ und ν mehrfach erfüllt, kann aber auch seine Ebene beliebige Lage-Bedingungen erfüllen. Diese letzteren lassen sich aber alle durch die oben mit (u, v, w) bezeichneten Bedingungen ausdrücken. Wir fragen daher nach der Anzahl der Kegelschnitte, welche a mal die Bedingung μ, b mal die Bedingung ν erfüllen, und welche dabei ihre Ebene die Bedingung (u, v, w) erfüllen lassen, wo $a + b = u + v + w + 2$ sein mufs, damit die Frage Sinn hat. Wir verlangen also eine Formel, die das Bedingungs-Symbol $(u, v, w)\ \mu^a\ \nu^b$ allgemein als Funktion von u, v, w, a, b darstellt. Diese Formel lautet:

$$(1)(u,v,w)\,\mu^a\nu^b = 2^u.\varphi(a, v+w+1).[\varphi(v+w,w) - \varphi(v+w, v)]$$
$$+ 2^v.\varphi(a,w+u+1).[\varphi(w+u, u) - \varphi(w+u, w)]$$
$$+ 2^w.\varphi(a,u+v+1).[\varphi(u+v, v) - \varphi(u+v, u)].$$

Aus dieser Formel folgen für $0 \leqq u < v < w \leqq 3$ gleichzeitig die sämtlichen Zahlen, welche Chasles 1864 und 1867 in den Comptes rendus berechnet hat, ferner für $0 \leqq u < v < w \leqq 4$ die von mir in den Mitt. der Hamb. Math. Ges. Bd. I, S. 298 abgeleiteten Zahlen. Wir setzen noch in Formel 1): $u = n-2$, $v = n-1$, $w = n$, $a = 3n-1$, also $b = 0$, und erhalten speziell:

$$(2) \qquad (n-2, n-1, n)\,\mu^{3n-1}$$
$$= \frac{(2n-2)!\,2^{n-2}}{n!\,(n-1)!}\cdot\left[2^{3n-1} - \varphi(3n-1, n-2) - \frac{(2n+2).(3n-1)!}{(n-1)!\,(2n)!}\right],$$

eine Formel, die für $n = 2, 3, 4$ die in der Einleitung genannten Zahlen 1, 92, 6620 ergiebt.

§ 2. Die Formeln für Punktepaare, Strahlenpaare und Ebenenpaare.

Sowohl zur Ableitung der in § 1 mitgeteilten Kegelschnittformel wie auch zur Ausdehnung der Untersuchung auf Flächen und Räume zweiten Grades ist die Kenntnis von analogen Formeln erforderlich, die sich auf Paare von Punkten, Strahlen und Ebenen beziehen. Für jedes dieser Gebilde bezeichne p immer einen Punkt, s einen Strahl, e eine Ebene, sowie auch: p die Bedingung, dafs ein Punkt p auf einem $[n-1]$ liege, s die Bedingung, dafs ein Strahl s einen gegebenen $[n-2]$ schneide, e die Bedingung, dafs eine Ebene e einen gegebenen $[n-3]$ schneide. Ferner sei immer dem Gebilde a mal die Bedingung e, b mal die Bedingung s, c mal die Bedingung p auferlegt.

I) Für das Punktepaar, das aus einem Strahle s und zwei darauf-liegenden Punkten p besteht, und das in einer Ebene liegt, der die Bedingung (u, v, w) auferlegt ist, ergiebt sich, was geometrisch evident ist, null, falls $u > 0$ ist. Ist u aber gleich 0, so erhält man $(b + c = v + w + 1)$:

$$(3) \qquad (0, v, w)\,s^b p^c = \varphi(v+w, w) - \varphi(v+w, v)$$
$$- 2^{v+w-b}.[\varphi(b, w) - \varphi(b, v)].$$

II) Für das Strahlenpaar, das aus einem Punkte p und zwei durch ihn gehenden Strahlen s besteht, und das in einer Ebene liegt, der die Bedingung (u, v, w) auferlegt ist, ergiebt sich $(b + c = u + v + w + 1)$:

$$(4)\quad (u, v, w)\, s^b\, p^c = 2^u \cdot b_{v+w+1} \cdot [\varphi(v+w, w) - \varphi(v+w, v)] + 2^v \cdot b_{w+u+1} \cdot [\varphi(w+u, u) - \varphi(w+u, w)] + 2^w \cdot b_{u+v+1} \cdot [\varphi(u+v, v) - \varphi(u+v, u)].$$

III) Für das Ebenenpaar, das aus einem Strahle s, einem auf ihm liegendem Punkte p und zwei durch ihn gehenden Ebenen e besteht, und das in einem [3] liegt, dem die Bedingung (t, u, v, w) auferlegt ist, ergiebt sich: $(a + b + c = t + u + v + w + 1)$:

$$(5)\quad (t, u, v, w)\, e^a\, s^b\, p^c$$
$$= a_{t+u+1} \cdot 2^{a-t-u-1} \cdot [\varphi(t+u, u) - \varphi(t+u, t)][(v+w-c)_v - (v+w-c)_u$$
$$- a_{t+v+1} \cdot 2^{a-t-v-1} \cdot [\varphi(t+v, v) - \varphi(t+v, t)][(u+w-c)_u - (u+w-c)_w$$
$$+ a_{t+w+1} \cdot 2^{a-t-w-1} \cdot [\varphi(t+w, w) - \varphi(t+w, t)][(u+v-c)_u - (u+v-c)_v$$
$$+ a_{u+v+1} \cdot 2^{a-u-v-1} \cdot [\varphi(u+v, v) - \varphi(u+v, u)][(t+w-c)_t - (t+w-c)_w$$
$$- a_{u+w+1} \cdot 2^{a-u-w-1} \cdot [\varphi(u+w, w) - \varphi(u+w, u)][(t+v-c)_t - (t+v-c)_v$$
$$+ a_{v+w+1} \cdot 2^{a-v-w-1} \cdot [\varphi(v+w, w) - \varphi(v+w, v)][(t+u-c)_t - (t+u-c)_v$$

IV) Denkt man sich bei dem soeben definierten Gebilde statt eines Punktes p zwei Punkte p, so entsteht ein Gebilde, das mit als Ausartung der Flächen zweiter Ordnung auftritt, und für das eine Formel gilt, die aus (5) hervorgeht, indem man den letzten Faktor jedes der 6 Glieder durch einen andern Faktor ersetzt, und zwar den Faktor $(v + w - c)_v - (v + w - c)_w$ durch den Faktor

$$\varphi(v + w, w) - \varphi(v + w, v) - 2^{c-1} \cdot [\varphi(v + w - c + 1, w) - \varphi(v + w - c + 1, v)],$$

woraus die Ersetzung der andern Faktoren durch Analogie ersehen werden kann. Aus den Formeln in III und IV entsteht die Formel für das Ebenenpaar, das nur aus einem Strahle s und zwei Ebenen e besteht, wenn man entweder bei III $c = 1$ oder bei IV $c = 2$ setzt.

§ 3. Projektive gerade Punktreihen.

Die Probleme, welche Herr Sturm Probleme der räumlichen Projektivität genannt hat, und welche von ihm im 6. und 12. Bande der Math. Ann. gelöst sind,[1]) behandeln die Gebilde, welche aus zwei Grundgebilden bestehen, deren Elemente projektiv zugeordnet sind. Wir betrachten zunächst das Gebilde, das aus zwei projektiven geraden Punktreihen besteht, die auf zwei Strahlen s und s' liegen. Wir denken uns dieses Gebilde in einem $[n]$ und legen ihm dem entsprechend die Bedingung auf, dafs sein Strahl s die Bedingung (v, w)

1) Vergl. auch § 28 und § 30 meines „Kalküls".

und sein Strahl s' die Bedingung (v', w') erfüllt. Ferner möge das Gebilde b mal die Bedingung $(s + s')$ erfüllen, welche verlangt, dafs entweder der Strahl s oder der Strahl s' einen $[n - 2]$ schneidet. Endlich möge das Gebilde a mal die Projektivitäts-Bedingung ξ erfüllen, welche verlangt, dafs die Strahlen s und s' von zwei gegebenen $[n - 1]$ in projektiv entsprechenden Punkten geschnitten werden. Dann mufs $a + b = v + w + v' + w' + 1$ sein. Es läfst sich nun die Zahl der Paare projektiver gerader Punktreihen, welche (v, w) und (v', w'), sowie a mal die Bedingung ξ, b mal die Bedingung $s + s'$ erfüllen, allgemein durch die eingeführten Buchstaben ausdrücken, und zwar durch die Formel:

$$(6) \qquad (v, w)\,(v', w')\,\xi^a\,(s + s')^b$$
$$= (v + v')_v \cdot (w + w')_w \cdot [\varphi\,(b, v + v') + \varphi\,(b, w + w') - 2^b]$$
$$- (v + w')_v \cdot (w + v')_w \cdot [\varphi\,(b, v + w') + \varphi\,(b, w + v') - 2^b]$$

Man bemerke, dafs bei $b = 0$ sich für $(v, w)\,(v', w')\,\xi^a$ eine Determinante ergiebt, nämlich:

$$(7) \qquad (v, w)\,(v', w')\,\xi^a = \begin{vmatrix} (v + v')_v, & (w + v')_w \\ (v + w')_v, & (w + w')_w \end{vmatrix}.$$

Beispielsweise setzen wir in (7) $v = 2$, $w = 3$, $v' = 2$, $w' = 3$, also $a = 11$ und erhalten

$$(2, 3)\,(2, 3)'\,\xi^{11} = \begin{vmatrix} 4_2, & 5_3 \\ 5_2, & 6_3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 20 - 10 \cdot 10 = 20$$

für die bekannte Zahl der Strahlenpaare, welche sich in unserem Raume zu 11 Paaren zugeordneter Ebenen so legen lassen, dafs die Schnittpunkte des einen Strahles zu den 11 Schnittpunkten des anderen Strahles projektiv werden.

§ 4. Projektive Strahlbüschel.

Dem Gebilde, das aus zwei projektiven Strahlbüscheln besteht, legen wir die Bedingung $(u, v, w)\,(u', v', w')\,\xi^a\,(p + p')^b$ auf, wo (u, v, w) und (u', v', w') Bedingungen für die Lage der beiden Ebenen sind, in denen die Strahlbüschel liegen, wo $p + p'$ ausspricht, dafs entweder der Scheitel des einen oder der Scheitel des anderen Strahlbüschels auf einem $[n - 1]$ liegt und wo endlich die Projektivitätsbedingung ξ verlangt, dafs zwei gegebene $[n - 2]$ die Ebenen der beiden Strahlbüschel in Punkten schneiden, welche auf projektiv zugeordneten Strahlen liegen. Ist $a + b = u + v + w + u' + v' + w' + 1$, so giebt es eine endliche Anzahl von Paaren projektiver Strahl-

büschel, welche die genannte Bedingung erfüllen, und diese Anzahl wird durch die eingeführten Buchstaben vermöge der folgenden Formel allgemein ausgedrückt:

$$(8) \qquad (u, v, w)\,(u', v', w')\,\xi^a\,(p + p')^b$$
$$= (u+u')_u \cdot (v+v')_v \cdot (w+w')_w \cdot [a_{u+u'-b} + a_{v+v'-b} + a_{w+w'-b}]$$
$$- (u+u')_u \cdot (v+w')_v \cdot (w+v')_w \cdot [a_{u+u'-b} + a_{v+w'-b} + a_{w+v'-b}]$$
$$- (v+u')_v \cdot (u+v')_u \cdot (w+w')_w \cdot [a_{v+u'-b} + a_{u+v'-b} + a_{w+w'-b}]$$
$$+ (v+u')_v \cdot (u+w')_u \cdot (w+v')_w \cdot [a_{v+u'-b} + a_{u+w'-b} + a_{w+v'-b}]$$
$$+ (w+u')_w \cdot (u+v')_u \cdot (v+w')_v \cdot [a_{w+u'-b} + a_{u+v'-b} + a_{v+w'-b}]$$
$$- (w+u')_w \cdot (v+v')_v \cdot (u+w')_u \cdot [a_{w+u'-b} + a_{v+v'-b} + a_{u+w'-b}].$$

Beispielsweise spezialisieren wir, indem wir $u = 1$, $v = 2$, $w = 3$, $u' = 1$, $v' = 2$, $w' = 3$, $a = 13$, also $b = 0$ setzen. Dann kommt:

$$(1, 2, 3)\,(1, 2, 3)'\,\xi^{13}$$
$$= 2_1 \cdot 4_2 \cdot 6_3 \cdot [13_2 + 13_4 + 13_6] - 2_1 \cdot 5_2 \cdot 5_3 \cdot [13_2 + 13_5 + 13_5]$$
$$- 3_2 \cdot 3_1 \cdot 6_3 \cdot [13_3 + 13_3 + 13_6] + 3_2 \cdot 4_1 \cdot 5_3 \cdot [13_3 + 13_4 + 13_5]$$
$$+ 4_3 \cdot 3_1 \cdot 5_2 \cdot [13_4 + 13_3 + 13_5] - 4_3 \cdot 4_2 \cdot 4_1 \cdot [13_4 + 13_4 + 13_4]$$
$= 3120$ in Übereinstimmung mit dem am Schlufs von § 30 meines Kalküls ausgesprochenen Resultate.

§. 5. Korrelative Ebenen.

Auch die sämtlichen Anzahlen, welche Herr Hirst[1]) und Herr Sturm[2]) für die einfachen Korrelationsbedingungen unterliegenden Paare korrelativer Ebenen berechnet haben, gehorchen einer und derselben Formel, die ich hier folgen lasse. Die beiden Ebenen, deren Punkte und Strahlen sich korrelativ entsprechen, seien in einem $[n]$ den Bedingungen (u, v, w) bezw. (u', v', w') unterworfen. Ferner bezeichne μ die Bedingung, dafs zwei gegebene $[n-1]$ die beiden Ebenen in konjugierten Strahlen schneiden, d. h. in solchen Strahlen, dafs der dem einen Strahle korrelativ entsprechende Punkt auf dem anderen liegt. Endlich bezeichne ν die Bedingung, dafs zwei gegebene $[n-2]$ die beiden Ebenen in konjugierten Punkten schneiden. Es handelt sich nun darum, die Zahl derjenigen Paare korrelativer Ebenen, welche die Bedingungen (u, v, w) und (u', v', w'), sowie a mal die Bedingung μ, b mal die Bedingung ν erfüllen, wo $a + b = u + v + w + u' + v' + w' + 2$ sein mufs, durch die eingeführten

1) Proc. of the London Math. Soc. Bd. 5 und 8.
2) Math. Ann. Bd. 12, S. 254.

Buchstaben auszudrücken. Dies geschieht allgemein durch folgende Formel:

$$(9) \qquad (u, v, w)(u', v', w')\mu^a\nu^b = 2^b D - R,$$

wo D die Determinante

$$\begin{vmatrix} (u+u')_u, & (v+u')_v, & (w+u')_w \\ (u+v')_u, & (v+v')_v, & (w+v')_w \\ (u+w')_u, & (v+w')_v, & (w+w')_w \end{vmatrix}$$

bedeutet, und wo R gleich dem folgenden Ausdruck ist:

$$\begin{aligned} R = {} & (u+u')_u \cdot (v+v')_v \cdot (w+w')_w \cdot \\ & [\varphi(b, u+u'-a) + \varphi(b, v+v'-a) + \varphi(b, w+w'-a)] \\ & - (u+u')_u \cdot (v+w')_v \cdot (w+v')_w \cdot \\ & [\varphi(b, u+u'-a) + \varphi(b, v+w'-a) + \varphi(b, w+v'-a)] \\ & - (u+v')_u \cdot (v+u')_v \cdot (w+w')_w \cdot \\ & [\varphi(b, u+v'-a) + \varphi(b, v+u'-a) + \varphi(b, w+w'-a)] \\ & + (u+v')_u \cdot (v+w')_v \cdot (w+u')_w \cdot \\ & [\varphi(b, u+v'-a) + \varphi(b, v+w'-a) + \varphi(b, w+u'-a)] \\ & + (u+w')_u \cdot (v+u')_v \cdot (w+v')_w \cdot \\ & [\varphi(b, u+w'-a) + \varphi(b, v+u'-a) + \varphi(b, w+v'-a)] \\ & - (u+w')_u \cdot (v+v')_v \cdot (w+u')_w \cdot \\ & [\varphi(b, u+w'+a) + \varphi(b, v+v'-a) + \varphi(b, w+u'-a)]. \end{aligned}$$

Beispielsweise ergiebt sich hieraus für $u=1$, $v=2$, $w=3$, $u'=1$, $v'=2$, $w'=3$, $a=0$, also $b=14$ die Zahl 2384 für die Zahl derjenigen Ebenenpaare unseres Raumes, welche 14 Paare gegebener zugeordneter Strahlen in 14 Paaren konjugierter Punkte einer Korrelation treffen.

Setzt man in 9) $b=0$, so kommt (u, v, w) (u', v', w') μ^a gleich der Determinante D. Vergleicht man dieses Resultat mit Formel 7) wo die analoge, aus (v, w) (v', w') gebildete Determinante erscheint, so lässt sich die folgende weitere Verallgemeinerung vermuten: Unterwirft man zwei korrelative d-dimensionale lineare Räume den Lage-Bedingungen

$$(f_0, f_1, f_2, \cdots f_d) \text{ bezw. } (f_0', f_1', f_2', \cdots f_d')$$

und ausserdem $a$mal der Bedingung, dass ein Paar von gegebenen, zugeordneten $[n-1]$ die beiden $[d]$ in zwei konjugierten $[d-1]$ der Korrelation schneiden, so muss $a=(f_0+f_1+\cdots f_d)+(f_0'+f_1'+\cdots f_d')+d$ sein, damit es eine endliche Anzahl von korrelativen Raum-Paaren giebt, welche die angegebenen Bedingungen erfüllen. Für diese endliche Anzahl ergiebt sich die Determinante:

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} (f_0+f_0')_{f_0}, (f_1+f_0')_{f_1}, \ldots, (f_d+f_0')_{f_d} \\ (f_0+f_1')_{f_0}, (f_1+f_1')_{f_1}, \ldots, (f_d+f_1')_{f_d} \\ (f_0+f_2')_{f_0}, (f_1+f_2')_{f_1}, \ldots, (f_d+f_2')_{f_d} \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ \cdot \quad\quad \cdot \\ (f_0+f_d')_{f_0}, (f_1+f_d')_{f_1}, \ldots, (f_d+f_d')_{f_d} \end{vmatrix},$$

wo jedes $(f_i + f'_k)_{f_i}$ den Binomialkoeffizienten $\frac{(f_i+f_k')!}{f_i! \cdot f_k'!}$ bedeutet.

Zum Schlufs nur noch die Bemerkung, dafs auch die Zahlen welche Herr Hirst jüngst in dem Proc. of the London Math. Soc vol. 21 für korrelative dreidimensionale Räume abgeleitet hat, de Formel gehorchen, welche aus Nr. 9 durch Analogie-Schlufs von de Ebene auf den Raum hervorgeht, und zwar ergeben sich zunächs natürlich nur diejenigen Zahlen, welche sich auf die von Herrn Hirst ν und ϱ genannten Bedingungen beziehen. Um sie zu erhalten hat man in der so durch Analogie resultierenden Formel $t = 0, u = 1$ $v = 2, w = 3, t' = 0, u' = 1, v' = 2, w' = 3$ zu setzen.

Hamburg, Dezember 1890.

Bericht über die Versammlungen im 201. Vereinsjahr 1890/91.

Erstattet vom Jahrverwalter I. F. Bubendey.

Der Bericht über das 200. Vereinsjahr mufste früher als gewöhnlich abgeschlossen werden, weil der als Festschrift zur 200jährigen Jubelfeier erscheinende 2. Band der Mitteilungen noch vor dem Feste zur Verteilung kommen sollte. Der vorliegende Bericht hat sich deshalb noch auf die letzten Versammlungen des 200. Vereinsjahres zu erstrecken, welche in ihrem geschäftlichen Teil wesentlich in Anspruch genommen waren durch die Vorbereitungen zur Jubelfeier.

Versammlung am 14. Dezember 1889.

Nach Erledigung der geschäftlichen Angelegenheiten berichtete Herr W. Lazarus über die mathematischen Grundlagen der Berechnung von Invalidenpensionen, indem er an das im verflossenen Sommer beschlossene Reichsgesetz über Invaliditäts- und Altersversicherung anknüpfte. Obgleich dienstunfähig gewordene Beamte und Arbeiter

schon seit sehr langer Zeit pensioniert werden, hat man erst in der neuesten Zeit angefangen, Erfahrungen über Invaliditätsverhältnisse zu sammeln. Als Professor Dr. Karl Heym in Leipzig 1855 mit seinen auf diesem Gebiet grundlegenden Arbeiten auftrat, war hierfür nichts weiter vorhanden als die Angabe von Hülse, dafs im Beharrungszustande 68 Invaliden auf 1000 Arbeiter zu rechnen seien.

Heym, auf Hypothesen angewiesen, setzte die Wahrscheinlichkeit im nächsten Jahre Invalide zu werden gleich einer Summe, deren erstes Glied konstant, während das zweite eine mit dem Alter wachsende geometrische Progression ist. Für 80 Jahre ist die Summe = 1. Die Sterblichkeit der Invaliden setzte Heym gleich derjenigen der diensttauglichen Arbeiter. Die finanziellen Ergebnisse der von Heym berechneten Verhältnisse waren trotz der Unrichtigkeit der Hypothesen ziemlich gut, weil die Fehler der Hypothesen sich in ihren Wirkungen zum Teil aufhoben. 1868/69 veröffentlichte Dr. Aug. Wiegand in Halle die bei den deutschen Eisenbahngesellschaften gemachten Erfahrungen über Invaliditäts- und Sterblichkeitsverhältnisse. G. Behm und seit 1886 Dr. H. Zimmermann setzten diese Arbeiten fort und schufen dadurch das beste Material, welches wir über diesen Gegenstand besitzen.

Der hartnäckige und von beiden Seiten mit grofsem Scharfsinn durchgeführte Streit zwischen Dienger, Behm und Zimmermann einerseits, Karup und Küttner andererseits wurde vom Redner besprochen und der Nachweis geführt, dafs das Verfahren der letzteren der Berechtigung nicht entbehrt.

Der Vortragende wendet sich sodann zu der dem Gesetzentwurfe von der Reichsregierung beigegebenen mathematischen Denkschrift und der in derselben enthaltenen Tabelle über die Anzahl der Personen, welche, ausgehend von einer bestimmten Anzahl Aktiver eines jüngsten Alters, Jahr für Jahr dienstfähig geblieben sind, und schliefst mit der Erklärung der Methode, nach welcher die Werte der Invalidenpensionen berechnet worden sind und welche nicht einwandsfrei erscheint.

Herr Dr. Hoppe macht einige Mitteilungen über eine Arbeit von Lippmann und Mebius über Induktion.

Versammlung am 11. Januar 1890.

Die Herren Wasserbaudirektor Nehls-Hamburg und Dr. Servus-Charlottenburg werden als Mitglieder aufgenommen.

Der Jahrverwalter legt 52 Dankschreiben vor, welche in Er-

widerung auf die Übersendung des ersten Teiles der Festschrift eingegangen sind.

Herr Professor Matthiessen-Rostock hat der Gesellschaft eine umfangreiche Handschrift aus dem vorigen Jahrhundert zum Geschenk gemacht, welche die mit grofser Ausdauer durchgeführte Lösung sämtlicher Aufgaben der Meifsnerschen Kunstkette, des Sinnenconfectes von Paul Halcke und verwandter Veröffentlichungen aus der Zeit der Gründung der Gesellschaft enthält.

Den wissenschaftlichen Teil der Sitzung eröffnete Herr Dr. Eichler mit einem Vortrage über die in der ersten Zeit ihres Erscheinens nicht hinreichend erkannte und deshalb nicht voll gewürdigte Grafsmann'sche Ausdehnungslehre. Der eigenartige Kalkül derselben wurde erläutert und einzelne Beispiele gegeben, während weitere Ausführungen für die nächste Sitzung in Aussicht gestellt wurden.

Herr Dr. Repsold berichtete über von ihm angestellte Versuche, den persönlichen Fehler bei astronomischen Durchgangsbeobachtungen durch Benutzung eines Apparates zu beseitigen. (Vergl. Bericht über die Versammlung vom 14. Oktober 1890.)

Versammlung am 1. Februar 1890.

Der Jahrverwalter berichtet über das bevorstehende Jubelfest, über die bereits in grofser Zahl eingelaufenen Glückwunschschreiben und über die in Aussicht stehende Teilnahme auswärtiger Mathematiker. — Herr Professor Schur wird als auswärtiges Mitglied, die Herren Dr. Classen und Dr. Herrmann werden als einheimische Mitglieder aufgenommen.

Herr Dr. Eichler setzt die Mitteilungen über Anwendung der Grafsmann'schen Ausdehnungslehre fort und zeigt, wie dieselbe nicht allein geeignet ist, gewisse Eigenschaften der ebenen und räumlichen Gebilde in einfacherer und natürlicherer Weise vor Augen zu führen, als die analytische Geometrie solches vermag, sondern auch in vielen anderen Zweigen der Mathematik verwendet werden kann, z. B. zur Berechnung der Wurzeln aus einem Systeme linearer Gleichungen oder zur Klarlegung der Prinzipien der theoretischen Mechanik.

Herr Dr. Hoppe berichtet über den Inhalt der mathematischen Note, welche Herr Professor Hermite seinem Glückwunschschreiben hinzugefügt hat und welche den folgenden Wortlaut hat:

Sur une formule de Jacobi concernant l'intégrale elliptique à module imaginaire.

Le Cahier 103 du Journal de M. M. Kronecker et Weierstrass p. 87 contient un article bien intéressant de M. Woldemar Heymann ou la rélation célèbre de Jacobi

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+if)\sin^2\varphi}} = P + iQ$$

dans laquelle on a

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+f^2}-e+1}} \cdot \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}}$$

$$Q = \frac{\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1-e)^2+f^2}-e+1}} \cdot \int_0^x \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{(1-x)(1+k\lambda x)(1+kx)(1-\lambda x)}}$$

$$k = \frac{\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e-1}{\sqrt{e^2+f^2}-e}, \qquad \lambda = \frac{\sqrt{(1-e)^2+f^2}+e-1}{\sqrt{e^2+f^2}+e}$$

est remplacée par la suivante qui est beaucoup plus simple:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(e+if)\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}f} \int_0^w \sqrt{\frac{(1+iw)\,dw}{w\left(1+\frac{2e}{f}w-w^2\right)\left(1+\frac{2e-2}{f}w-w^2\right)}}$$

les variables étant liées par l'équation:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{f}{2w}\left(1+\frac{2e}{f}w-w^2\right).$$

On va voir que la question devient encore plus facile, si l'on part de l'intégrale:

$$J = \int \frac{U\,dx}{\sqrt{X(x-a-ib)}}$$

ou X est un polynome à coefficients réels de degré quelconque n, U désignant une fonction rationelle de la variable. Il suffit alors d'employer la substitution élémentaire $x = \frac{t^2-1}{2t}$ qui ramène le radical $\sqrt{x^2+1}$ à la forme rationelle $\frac{t^2+1}{2t}$. Qu'on fait en effet $x-a = \frac{b(t^2-1)}{2t}$, ce qui donne: $x-a-ib = \frac{b(t-i)^2}{2t}$, on aura aussi:

$$\frac{dx}{\sqrt{x-a-ib}} = -\sqrt{\frac{b}{2}}\,\frac{(t+i)dt}{t\sqrt{t}}.$$

Désignant par $\frac{T}{t^n}$, ou T est un polynome du degré $2n$ en t, la

transformée de X par la substitution considerée, et par T, la transformée de U, qui sera une fonction rationelle de t, nous aurons immédiatement:

$$J = -\sqrt{\frac{b}{2}} \int \frac{T_1(t+i)t^{\frac{n-3}{2}}}{\sqrt{T}} dt.$$

Soit $n = 2$, ce qui donne l'intégrale elliptique, on pourra écrire:

$$J = -\sqrt{\frac{b}{2}} \int \frac{T_1(t+i)dt}{\sqrt{tT}};$$

c'est bien la réduction aux intégrales hyperelliptiques de première classe, puisque T est un polynome du 4me degré en t.

200jähriges Stiftungsfest. 15. und 17. Februar 1890.

Für die Jubelfeier war der auf den 17. Februar fallende Fastnacht-Montag in Aussicht genommen, weil dieser Tag der Überlieferung gemäfs als Stiftungstag angesehen wird und von jeher durch die mit der Hauptversammlung verbundene Festmahlzeit hervorgehoben ist.

Die wissenschaftliche Feier war dagegen auf den vorhergehenden Sonnabend als den regelmäfsigen Versammlungstag verlegt, und es war ermöglicht, trotz der zu erwartenden gröfseren Zahl von Gästen die Versammlung wie gewöhnlich im Patriotischen Gebäude abzuhalten, indem der Vorstand der Bürgerschaft in bereitwilligem Entgegenkommen den Sitzungssaal dieser Körperschaft für die Feier zur Verfügung gestellt hatte.

Um 7 Uhr versammelten sich die Freunde und Mitglieder der Gesellschaft in den festlichen Räumen, zunächst die in den Vorsälen unter der Leitung der Oberlehrer Herren Ahlborn und Dr. Jaerisch ausgestellten Porträts von Mathematikern in Augenschein nehmend. Von verschiedenen Seiten, in erster Linie von Herrn Heinrich Strack, waren wertvolle Blätter für diese Ausstellung hergegeben, so dafs die Sammlung nicht allein die Bildnisse der in Hamburg wirksam gewesenen Vertreter der Wissenschaft, sondern auch diejenigen der berühmten Mathematiker des Altertums, des Mittelalters und der Neuzeit in recht vollständiger Weise umfafste und ein eigenartiges, der Feier angemessenes Interesse bot. —

Die Teilnehmer der Festsitzung, welche unter dem Vorsitze des Ehrenmitgliedes der Gesellschaft, Herrn Senator Dr. Stammann abgehalten wurde, füllten die Räume des Sitzungssaales voll aus. Neben

einer Vertretung Eines hohen Senates und des Vorstandes der Bürgerschaft waren Abgeordnete der wissenschaftlichen Anstalten und der wissenschaftlichen Vereine der Stadt erschienen.

Der Ehrenpräsident, Herr Senator Dr. Stammann, eröffnete die Sitzung mit einer Ansprache, in welcher er darauf hinwies, wie die Verhältnisse in Hamburg am Ende des 17. Jahrhunderts der Gründung der Gesellschaft günstig waren. Nach einem Überblick über die lebenskräftige Entwicklung der Gesellschaft in den verflossenen 200 Jahren gab Herr Senator Dr. Stammann dem Wunsche Ausdruck, dafs dieselbe auch ferner ihrem stets hochgehaltenen Wahrspruche

Antiqua emendo
Substituoque nova.

treu bleiben möge, der Wissenschaft zum Nutzen, der Vaterstadt zur Zierde, dem Vaterlande zur Ehre!

In der darauf folgenden Festrede dankte der Jahrverwalter, Herr Professor Dr. Schubert, zunächst den Behörden des hamburgischen Staates und allen Freunden der Gesellschaft, welche zum Gelingen des Festes in so reichem Mafse beigetragen haben, und wendete sich sodann zur Charakterisierung des Wesens der mathematischen Forschung, indem er das konservative Verhalten derselben gegen früher gefundene Wahrheiten schilderte, welchem ein fortschrittlicher Zug gegenüberstehe, bedingt durch die unaufhaltsame Folge, in welcher sich ein Theorem an das andere schliefst, einem wohlbegründeten und in gewaltige Höhen endlos aufstrebendem Turmbau vergleichbar. Drittens wurde ausgeführt, dafs die mathematische Forschung den Vorzug der Selbstgenügsamkeit habe, indem sie im Vereine mit der Philosophie weit weniger abhängig sei von der Aufsenwelt als alle anderen Wissenschaften. Wie die Mathematik indessen andern Disciplinen ihre Sprache zu leihen vermag, wirken auch Fragen der Praxis belebend auf die mathematische Forschung ein. Redner schlofs mit dem Hinweis darauf, dafs in der mathematischen Gesellschaft gegenwärtig ein glückliches Verhältnis theoretischer und praktischer Interessen vorwalte, welches hoffentlich noch lange zum Segen der Gesellschaft, zum Heile der Wissenschaft und zur Ehre Hamburgs andauern möge.

Die Reihenfolge der auf die Festrede folgenden Begrüfsungen wurde von dem Schriftführer, Herrn Oberlehrer Dr. Hoppe, durch die Verlesung des aus dem Civilkabinet Sr. Majestät des Kaisers übersandten Glückwunschschreibens eröffnet. Herr Professor Schoute aus Groningen überbrachte unter Überreichung einer Adresse die Grüfse der Wiskundig Genootschap in Amsterdam, der vor

einem Jahrhundert von den holländischen Mitgliedern der Hamburger Gesellschaft begründeten Vereinigung. Es folgte eine Begrüfsung des Kartellverbandes mathematischer und mathematisch-naturwissenschaftlicher Vereine der deutschen Hochschulen. Zahlreiche Abordnungen der Gymnasien Hamburg-Altonas, der Seewarte, der Sternwarte, der wissenschaftlichen Anstalten und der befreundeten Vereine liefsen ihre Beglückwünschungen folgen. Die geographische Gesellschaft überreichte als Geschenk die Büste von Gauss, der naturwissenschaftliche Verein Büsten der Gründer der Gesellschaft, Heinrich Meifsner und Valentin Heins, während der ärztliche Verein eine Präsidentenglocke als Festgeschenk darbrachte.

Dank dem Entgegenkommen der Patriotischen Gesellschaft, welche der Mathematischen Gesellschaft die Wände des regelmäfsig benutzten Sitzungszimmers zur Unterbringung der Festgeschenke zur Verfügung gestellt hat, haben die Büsten sowohl wie die Mehrzahl der überreichten künstlerisch ausgestatteten Adressen eine dauernde Aufstellung gefunden, an den regelmäfsigen Sitzungsabenden die Erinnerung an das Jubelfest wach erhaltend.

Adressen wurden überreicht von den Lehrerkollegien der Gelehrtenschule des Johanneums, des Realgymnasiums und der höheren Bürgerschule, von der Patriotischen Gesellschaft, der Geographischen Gesellschaft, dem Naturwissenschaftlichen Verein, dem Architekten- und Ingenieur-Verein, der Zoologischen Gesellschaft, dem Gewerbeverein, dem hamburger Bezirksverein des Vereins deutscher Ingenieure und dem Chemiker-Verein.

Herr Professor Dr. Georg Rümker übergab dem Archiv der Gesellschaft Urkunden zur Erinnerung an den von 1819—1862 der Gesellschaft als Mitglied angehörenden Direktor der Sternwarte Chr. Karl Ludwig Rümker.

Es wurden ferner die folgenden Festschriften überreicht:

Vom Verein für hamburgische Geschichte „Topographische Studien über die Gewässer in und bei Hamburg" von C. T. Gaedechens.

Vom Direktor und dem Lehrerkollegium des Realgymnasiums des Johanneums „Das Gesetz des freien Falles mit Rücksicht auf die Abnahme der Beschleunigung und mit Benutzung einer nach Potenzen des Argumentes $a + \sin a$ fortschreitenden Reihenentwicklung der Function $\cos a$" von Professor Dr. Arnold Matern.

Von Herrn Professor Dr. F. Wibel, Direktor des chemischen Staatslaboratoriums „Prinzipielle Irrtümer in der Erklärung, Ausführung und Berechnung der Dampfdichten-Bestimmung nach I. Dumas."

Die sämtlichen Begrüfsungsreden wurden vom Mitjahrverwalter,

Herrn Bauinspektor Bubendey, entgegengenommen und durch kurze Worte des Dankes erwidert. Zum Schlusse gab der Jahrverwalter, Herr Professor Dr. Schubert, den Beschluſs der Mathematischen Gesellschaft kund, jene 9 Professoren, welche in so bereitwilliger Weise Beiträge zum wissenschaftlichen Teile der Festschrift eingesandt und dadurch derselben einen besonderen Glanz verliehen hatten, zu Ehrenmitgliedern der Gesellschaft zu ernennen:

Dr. H. Bruns, Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte zu Leipzig.

Dr. M. Cantor, Professor der Mathematik zu Heidelberg.

Dr. S. Günther, Professor der Geographie zu München.

Dr. A. Hurwitz, Professor der Mathematik zu Königsberg.

Dr. L. Kronecker, Professor der Mathematik und Mitglied der Kgl. Preuſsischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Dr. E. Netto, Professor der Mathematik zu Gieſsen.

Dr. Th. Reye, Professor der Mathematik zu Straſsburg.

Dr. R. Sturm, Professor der Mathematik zu Münster.

Dr. K. Weierstrass, Professor der Mathematik und Mitglied der Kgl. Preuſsischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Herr Professor Dr. Cantor, welcher der Sitzung beiwohnte, benutzte die Gelegenheit, im Namen seiner Kollegen wie im eigenen Namen den Dank für diese Auszeichnung auszusprechen.

Damit war die Tagesordnung erschöpft, so daſs um $10^1/_4$ Uhr die Festsitzung, deren würdevoller Verlauf allen Teilnehmern dauernd in Erinnerung bleiben wird, von dem Herrn Ehrenpräsidenten geschlossen wurde.

Ein gemeinsames Abendessen vereinigte hierauf die Festteilnehmer in den Räumen des Vereins für Kunst und Wissenschaft. Nach den vielseitigen Redegenüssen, welche die Festsitzung gebracht hatte, wurde der Schwerpunkt gelegt auf die behagliche Unterhaltung und den Gesang der ernsten und heiteren Lieder, welche die Festzeitung „Snuten und Poten“ brachte.

Am 17. Februar, dem Fastnachtmontage, war von der Abhaltung der Hauptversammlung abgesehen, weil das historische Festessen, dessen Mittelpunkt wie immer „Snuten und Poten mit Erbsenbrei und Sauerkraut“ bildeten, diesmal im groſsen Kreise und unter Hinzuziehung der Damen, abgehalten wurde. Etwa 250 Personen waren im groſsen Festsaale des Hamburger Hofes vereinigt. Zahlreiche Freunde der Gesellschaft aus dem Kreise der Staatsbehörden und der befreundeten Vereine hatten es sich nicht nehmen lassen, dem Jubelfeste der ältesten mathematischen Gesellschaft beizuwohnen. In

bester Stimmung, gewürzt durch festliche Reden und gemeinsamen Gesang der Tafellieder, wurde die Stunde gefeiert, in der vor 200 Jahren Heinrich Meifsner und Valentin Heins im Kreise ihrer Genossen den Grund zu der Gesellschaft gelegt hatten.

Nach aufgehobener Tafel wurden die in den Nebenräumen aufgestellten Geschenke besichtigt und bald rief die Musik zur Fröffnung des Festballes, welchem ein von Herrn Dr. Hoppe geleiteter Kotillon mit mathematisch-physikalischen Runden einen besonderen Reiz verlieh. Erst gegen Morgen trennten sich die letzten Festgenossen, mit dem frohen Bewufstsein, dafs das 200jährige Jubelfest der mathematischen Gesellschaft aufs herrlichste verlaufen sei.

Hauptversammlung am 8. März 1890.

Nachdem der abgehende Jahrverwalter, Herr Professor Dr. Schubert, den Jahresbericht einschliefslich des Kassenberichtes erstattet hat, wird Herr Dr. Repsold zum Adjunkten erwählt. Es wird beschlossen, dafs die Vortragenden hinfort einen kurzen Eigenbericht vor Beginn des Vortrages zu den Akten zu geben haben.

Herr Bauinspektor Bubendey übernimmt hierauf die Geschäfte des Jahrverwalters, indem er zunächst seinem Vorgänger den lebhaften Dank für die umsichtige Geschäftsführung während des in erster Linie den Vorbereitungen zur Jubelfeier gewidmeten Jahres ausspricht.

Herr Dr. Hoppe verliest eine Reihe der zum Feste eingetroffenen Adressen und Glückwunschschreiben, und es wird beschlossen, alle Begrüfsungen durch ein Dankschreiben zu erwidern. Herr Ahlborn legt einen Teil der am Festabend ausgestellten Porträts von Mathematikern vor, welche eingehend besichtigt werden. Herr Sieveking erfreute die Gesellschaft durch das Geschenk eines Aschenbechers in der Form eines hyperbolischen Paraboloides.

Versammlung am 12. April 1890.

Herr Wasserbaudirektor Nehls hält den angekündigten Vortrag über Richtungskoefficienten und imaginäre Einheiten. Einleitend wird die Bedeutung der Richtungskoefficienten und der duplexen, triplexen u. s. w. Gröfsen in der reinen und angewandten Mathematik, die nach Ansicht des Vortragenden noch stark unterschätzt und vielfach falsch beurteilt wird, besprochen und eine kurze Kritik der Darstellung des Gegenstandes in den gegenwärtigen Lehrbüchern geübt. Anknüpfend an die Entwicklung der Richtungskoefficienten

für Linien in der Ebene und im Raume wird gezeigt, wie mit der ersten und zweiten imaginären Einheit der Weg gefunden ist für die Feststellung aller höheren Zahleneinheiten dieser Art und der Gröfsengebiete von 4, 5 und mehr Dimensionen. Der Weg dürfe indessen nicht dazu führen, von Zahlensystemen zu reden, in denen man beliebig viele Wurzeln aus der Null ziehen könne und in denen es Produkte geben solle, deren Wert von der Änderung eines ihrer Faktoren unabhängig sei und deshalb auch gleich Null werden könne, ohne dafs einer der Faktoren Null wird. Zum Schlufs weist Redner auf die bahnbrechenden und vielseitigen Arbeiten von Dr. Hermann Scheffler in Braunschweig hin und empfiehlt deren Studium. Herr Professor Dr. Schubert fügt einige Bemerkungen über den Gegenstand hinzu.

Versammlung am 10. Mai 1890.

Herr Professor Weyer in Kiel wird als auswärtiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. Im §. 7 der Statuten wird der Satz gestrichen, dafs die ohne Entschuldigung in den Versammlungen fehlenden Mitglieder eine Strafe von 25 Pfennigen zu zahlen haben.

Herr Professor Dr. Schubert beschäftigte sich zunächst mit der zur Lösung der diophantischen Gleichungen zweiten Grades dienenden Pell'schen Gleichung $x^2 - a\,y^2 = 1$ und zeigte, dafs bei Entwicklung von $\sqrt{a}$ in einen Kettenbruch die Auffindung des kleinsten Zahlenpaares für x und y erheblich verkürzt werde, wenn auch negative Partialnenner zugelassen werden. Wenn $a = b^2 \pm c$ gesetzt wird, ist, wie weiter gezeigt wird, das kleinste der Pell'schen Gleichung genügende Zahlenpaar eine ganze Funktion von b und c, sobald $4\,b$ durch c teilbar ist. Redner stellt die Frage, ob jenes kleinste und deshalb alle Zahlenpaare vielleicht immer ganze Funktionen von b und c seien, und, wenn nicht, welche Bedingungen b und c erfüllen müssen, damit es der Fall sei.

Derselbe Redner geht hierauf zu dem angekündigten Vortrag über „immerwährende Kalender" über und zeigt nach einer geschichtlichen Einleitung mehrere Tabellen-Einrichtungen, welche in einfachster Weise Wochentag, Mondesalter und Osterdatum ergeben und von denen die vom Vortragenden im Maiheft von „Vom Fels zum Meer" veröffentlichte neu ist. Sehr elegant kann man immerwährende Kalender durch Einführung von 1 oder 2 Schiebern gestalten, wie an dem „Panchronisten" des Vortragenden sowie an vorgelegten Entwürfen von Schiebereinrichtungen für Mondesalter und Osterdatum gezeigt wird.

Versammlung am 14. Juni 1890.

Herr Dr. Th. Tuch wird als einheimisches Mitglied aufgenommen.

Herr Dr. Köpcke führte in einem Vortrage über den allgemeinen Gröfsenbegriff zunächst den Gedanken aus, dafs der in der Mathematik beliebte Ausdruck Begriffserweiterung nicht ganz treffend sei, da man einen klar gefafsten Begriff nicht erweitern könne, ohne ihn zu entstellen. Es wird dann dargelegt, dafs von den drei Definitionen der Irrationalzahlen, welche durch Dedekind, Weierstrass und Cantor gegeben sind, die sehr populär gewordene Auffassung von Dedekind leider wenig den Umständen, unter denen in der Analysis Irrationalzahlen auftreten, entspricht und dafs sich die Weitläufigkeiten, mit denen die anderen beiden Definitionen verbunden sind, nicht vermeiden lassen. Wie nun aber auch die Irrationalzahlen definiert sein mögen, immer bilden sie eine abzählbare Menge, die Gesamtheit aller Zahlen ist aber nach den Untersuchungen Cantor's nicht abzählbar, darum bildet die Gesamtheit der definierbaren Irrationalzahlen noch nicht das sogenannte Zahlenkontinuum. Dieses ist vielmehr die erste abgeleitete Zahlenmenge der Rationalzahlen oder einer anderen überall dichten Zahlenmenge.

Herr Dr. Böger berichtet hierauf über die Wiener'sche Arbeit: „Zur Theorie der Umwendungen".

Versammlung am 13. September 1890.

Von der Patriotischen Gesellschaft sind bis auf weiteres die Zimmer No. 36 und 37 ihres Gebäudes für die Versammlungen zur Verfügung gestellt. Das erstere ist in den Wandflächen mit den zum Jubelfest geschenkten Büsten und Adressen geschmückt.

Nach Erledigung der geschäftlichen Angelegenheiten trägt Herr Wasserbaudirektor Nehls über graphische Integrationen vor, bei denen es sich entweder um die Wertermittelung bestimmter Integrale oder um die Lösung von Differenzialgleichungen handelt. In manchen Fällen läfst sich das Ziel, den Wert des Integrals in der Zeichnung durch eine gerade Linie darzustellen, nur mit Schwierigkeiten unmittelbar erreichen, während die Lösung leicht gelingt durch Umwandlung des gegebenen Integrals in ein Flächen- oder Momentenintegral. Die Flächen und Momente werden dann planimetrisch oder nach einem Näherungsverfahren bestimmt. Nach einer Erläuterung an Beispielen wird auf die hohe Bedeutung der rein graphischen Behandlung der einfachen Differenzialgleichung zweiter Ordnung für die graphische

Statik der Träger und Gewölbekonstruktionen hingewiesen und ein Verzeichnis der Litteratur über Graphische Integrationen zu den Akten gegeben, welches neben den Schriften von Vojáček, Solin, Mises, Gasteiger, Werner, Landsberg, Amsler, Harlacher und Abdank-Abakanowicz die zahlreichen Arbeiten, welche der Vortragende über diesen Gegenstand veröffentlicht hat, enthält.

Versammlung am 11. Oktober 1890.

Herr Professor Dr. Schubert berichtet über die im Anschluſs an die Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Bremen als Abteilung dieser Gesellschaft begründete Vereinigung deutscher Mathematiker und fordert zum Beitritt zu derselben auf.

Herr Dr. Keferstein hält einen Vortrag über die Grundeigenschaften der natürlichen Zahlenreihe und teilt mit, daſs ihm eine Entgegnung*) auf seine Abhandlung in der Festschrift „über den Begriff der Zahl“ seitens des Herrn Professors Dedekind in Braunschweig zugegangen sei, in welcher dieser seine eigene Herleitung der Zahlenreihe und namentlich auch seine Definition der Unendlichkeit eines Systems gegenüber den Einwänden des Vortragenden unverändert aufrecht erhält. Herr Dr. Keferstein erklärt, daſs er infolge dieser Erwiderung seine von vornherein nur in bedingter Form gegebenen Vorschläge zu Abänderungen der Aufstellungen des Herrn Professor Dedekind zurückziehe.

Herr Dr. Busche fragt nach einem arithmetischen Beweis des folgenden Satzes:

Die linearen Functionen $ax + by = m$
$cx + dy = n$,

in denen a und b ebenso wie auch c und d teilerfremde Zahlen sind, nehmen für $|ad - bc|$ Werte von x und y, die zwischen 0 und 1 liegen (0 incl.), ganzzahlige Werte m und n an.

Auf geometrischem Wege durch Betrachtung von Gitterpunktsystemen lässt sich der Satz verhältnismäſsig einfach beweisen.

Herr Dr. Repsold berichtet über Versuche, welche kürzlich mit dem im vorigen Winter von ihm besprochenen neuen Verfahren bei astronomischen Durchgangsbeobachtungen angestellt worden sind, und erinnert daran, daſs bei dem bisher üblichen Verfahren der Beobachter gleichzeitig im Raume und in der Zeit zu messen hat. Da der hierbei

*) Die für den Abdruck in diesen „Mitteilungen“ bestimmte Abhandlung des Herrn Professor Dedekind konnte leider wegen Raummangel nicht aufgenommen werden. Die Redaktionskommission.

sich ergebende persönliche Fehler erheblich gröfser ist, als Messungen allein im Raume oder allein in der Zeit ihn rechtfertigen würden, so sei er wahrscheinlich in der kombinierten Thätigkeit der Sinnesorgane in Raum und Zeit begründet. Bei dem neuen Verfahren hat der Beobachter nur im Raume zu messen, während die Messung in der Zeit selbstthätig von dem Apparate besorgt wird. Es ist daher anzunehmen, dafs derjenige Teil des persönlichen Fehlers, welcher von der Zeit abhängt, verschwindet. Der in der räumlichen Messung übrigbleibende Teil, der Einstellungsfehler, ist erfahrungsgemäfs verhältnismäfsig gering. Es ist aber nicht unwahrscheinlich, dafs das neue Verfahren dazu beitragen wird, auch diesen Fehler noch zu verringern, da das Hin- und Herspielen des Fadens vor dem Stern, welches beim Nachsuchen unvermeidlich auftritt, von ähnlicher Wirkung sein mufs wie das übliche Einstellen in entgegengesetzten Richtungen, durch welches man derartige Fehler möglichst zu heben pflegt. Es war demnach zu erwarten, dafs das neue Verfahren den persönlichen Fehler auf ein sehr geringes Mafs zurückführen würde. Die kürzlich von seiten des Kgl. Geodätischen Instituts in Berlin angestellten Versuche haben nun ergeben, dafs die Beobachter bei Anwendung der neuen Methode noch manche Unbequemlichkeit empfunden haben, dafs aber die Mittelwerte der persönlichen Gleichung dennoch allmählich von 0,'05 auf weniger als 0,'01 zurückgegangen sind, während das alte Verfahren daneben einen konstanten Betrag von 0,'17 ergeben hat.

Zum Schlufs macht noch Herr Dr. Wagner eine Mitteilung, betreffend das durch die merkwürdigen Punkte eines Dreieckes gebildete Dreieck.

Versammlung am 8. November 1890.

Der Jahrverwalter eröffnet die Versammlung mit Worten der Trauer über den am 16. Oktober erfolgten Tod des hochverdienten Mitgliedes Wilhelm Lazarus und verliest eine ausführliche Darstellung der eigenartigen Entwickelung des Verstorbenen, welcher in seltener Weise verstanden hat, geschäftliche Tüchtigkeit in seinem Berufe als Assecuradeur mit wissenschaftlichem Forschungsdrang zu vereinigen, so dafs es ihm selbst vergönnt war, auf den ihm eigenen Gebieten zu den Fördereren der mathematischen Erkenntnis gezählt zu werden.

Zum Zeichen ehrenden Andenkens erheben die Anwesenden sich von den Sitzen.

Auf Antrag von Herrn Professor Dr. Schubert wird beschlossen, den verlesenen Nekrolog möglichst unverkürzt im Hamburgischen Correspondenten zum Abdruck zu bringen.

Zum Mitgliede der Redaktionskommission für die Mitteilungen, welcher seitens des Vorstandes die Herren J. F. Bubendey und Dr. Hoppe angehören, wird Herr Dr. Busche erwählt.

Nach einer Mitteilung des Herrn Dr. Busche, welche an die Behandlung der Pell'schen Gleichung durch Herrn Professor Dr. Schubert in der Mai-Versammlung anknüpft, bespricht Herr Dr. Hoppe die Differenzialgleichung der Wirkung der elektrischen Kraft. Der Vortragende geht zunächst auf die von jeher einander gegenüberstehenden Ansichten der vermittelten und der unvermittelten Fernwirkung ein. Nachdem auf dem Gebiete der Elektrizitätslehre und des Magnetismus die Ansicht der unvermittelten Fernwirkung durch die mathematischen Ableitungen von Coulomb Ampère, Weber und Neumann in den letzten 100 Jahren einen weiten Vorsprung gewonnen hatte, ist, veranlafst durch die Arbeiten Faraday's, erst in neuerer Zeit auch die vermittelte Fernwirkung in mathematischer Weise behandelt, in erster Linie von Maxwell, dessen Ableitungen indessen den Übelstand haben, dafs sie von Gleichungssystemen ausgehen, welche für die Fernwirkung aufgestellt waren, und schliefslich zu Ergebnissen kommen, welche dieser Grundlage nicht bedürfen und ohne dieselbe in entgegengesetztem Sinne gedeutet werden. Das hat Poynting und Heaviside veranlafst, die Rechnung ohne Annahme der Fernwirkung durchzuführen. Nach ihrem Vorgange hat Hertz für den gröfsesten Teil der elektrischen und magnetischen Erscheinungen Gleichungssysteme aufgestellt, die den Thatsachen genügen und von heterogenen Voraussetzungen frei sind. Der Vortragende leitet die Fundamentalgleichungen dieser Theorie aus den Maxwell'schen Gleichungen ab, zeigt die Weiterentwickelung derselben nach der Hertz'schen Methode für die verschiedenen Formen der Nichtleiter und Leiter, um schliefslich die Resultate auf den Fall, dafs zwei gleichartige elektrostatisch geladene Körper aufeinander wirken, anzuwenden.

Versammlung am 13. Dezember 1890.

Der Jahrverwalter legt einen neuen Rechenschieber von Billeter in Zürich vor, bei welchem der bewegliche Teil aus einer durchsichtigen Glasplatte mit mehreren Zahlenreihen besteht und welcher gegenüber den älteren Konstruktionen eine weitere Decimalstelle gewährleistet.

In einem Vortrage über die projektivische Maſsbestimmung auf den Grundgebilden I. Stufe führt Herr Dr. J. Schröder aus, daſs, während früher streng zwischen den projektiven und metrischen Eigenschaften der Figuren geschieden wurde, die neuere Geometrie doch gelehrt habe, wie sich die Metrik in das System der projektiven Geometrie einordnet. Alle Metrik im Raume kommt auf projektive Beziehungen zum unendlich fernen, imaginären Kugelkreis, die Metrik der Ebene also auf solche Beziehungen zu den beiden unendlich fernen Kreispunkten hinaus. In der That sind auch die Formeln, welche die Elementargeometrie für die Entfernung zweier Punkte und für den Winkel zweier Geraden liefert, der Ausdruck derartiger projektiven Beziehungen. Im Zusammenhange hiermit wurde der merkwürdigen von Laguerre aufgestellten Formel gedacht, durch welche der Winkel zweier Geraden als Logarithmus eines Doppelverhältnisses von 4 Strahlen, nämlich der beiden betrachteten Geraden und der beiden Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Kreispunkten dargestellt wird. Hierauf wandte sich der Vortrag den allgemeinen projektivischen Maſsbestimmungen auf den Grundgebilden I. Stufe, insbesondere auf der geraden Punktreihe und im ebenen Strahlbüschel zu. Obgleich die gewöhnliche Strecken- und Winkelmessung sich völlig undualistisch gegenüberstehen, ist ihnen doch die Eigenschaft gemeinsam, daſs für beiderlei Maſsunterschiede das Gesetz der Addierbarkeit besteht und daſs auſserdem die Maſsunterschiede durch Verschiebung der Geraden in sich bezw. durch Drehung des Büschels um seinen Mittelpunkt nicht geändert werden. Im projektiven Sinne kommt dies auf lineare Transformation des Grundgebildes in sich hinaus. Entsprechend den verschiedenen Arten linearer Transformationen lassen sich dann 3 verschiedene Arten von Maſsbestimmungen aufstellen, die als hyperbolische, elliptische und parabolische unterschieden sind. Im Sinne der hyperbolischen Maſsbestimmung hat die Gerade zwei reelle unendlich ferne Punkte; sie zerfällt in zwei Teile, deren jeder unendlich lang ist. Analog hat in dieser Maſsbestimmung das Strahlbüschel zwei reelle Strahlen, welche mit jedem anderen einen unendlich groſsen Winkel einschlieſsen. Die elliptische Maſsbestimmung erteilt dem Grundgebilde zwei imaginäre unendlich ferne Elemente; die Gerade hat endliche Länge und die Summe der Winkel im Büschel ist endlich. Diesen Charakter besitzt unsere gewöhnliche Winkelmessung. Die parabolische Maſsbestimmung legt dem Grundgebilde ein unendlich fernes Element bei; überdies werden die Maſsunterschiede gegeben durch algebraische Funktionen. Hierher gehört die uns geläufige Streckenmessung.

Zum Schluſs wurde das zum Vortrag gebrachte als ein Abschnitt aus Cayley's allgemeiner Maſsbestimmung charakterisiert.

Versammlung am 10. Januar 1891.

Herr Dr. Aug. Michaelsen, Realgymnasiallehrer in Altona, ist als einheimisches Mitglied aufgenommen.

Der wissenschaftliche Teil der Versammlung wurde durch kleinere Mitteilungen ausgefüllt. Herr Wasserbau-Direktor Nehls behandelte die Simpson'sche Regel, der man bei elementarer Ableitung meist eine algebraische Kurve zweiten Grades zu Grunde zu legen pflege, die indessen nur ein besonderer Fall einer unbestimmten algebraischen Kurve dritten Grades sei. Es wurde das Verfahren geschildert, bei Anwendung der Regel die Natur der Kurve zu berücksichtigen, welche die zu berechnende Fläche begrenzt.

Herr Dr. Wagner zeigte, daſs auſser denjenigen Konoiden, deren Seitenlinien Kurven ersten oder zweiten Grades sind, auch solche mit Hülfe der Inhaltsformel für das Prismatoid genau berechnet werden können, bei denen die Seitenlinien divergierende Parabeln dritten, aber nicht höheren Grades sind.

Herr Ahlborn zeigte eine von der Serret'schen Methode abweichende Lösung kubischer und biquadratischer Gleichungen.

Eingegangene Schriften.

Die Gesellschaft hat den Schriftenaustausch mit den auf Seite 76 des ersten Teiles der Festschrift aufgezählten auswärtigen Gesellschaften fortgesetzt und ist im Laufe des letzten Jahres ferner in Schriftenaustausch getreten mit:

der Physikalisch Ökonomischen Gesellschaft in Königsberg;
der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich;
dem Circulo Matematico di Palermo.

Die Königliche Akademie der Wissenschaften in Berlin ist bezüglich ihrer mathematisch-naturwissenschaftlichen Mitteilungen ebenfalls mit der Gesellschaft in Schriftenaustausch getreten.

Neben der Wiskundig Genootschap in Amsterdam, deren Glückwünsche Herr Professor Schoute persönlich überbrachte, hat eine Reihe weiterer auswärtiger Gesellschaften zum Teil künstlerisch ausgestattete Adressen zur Jubelfeier übersandt. Es gebricht an Raum, den unsererseits seiner Zeit direkt erstatteten Dank hierfür wie für die in groſser Zahl der Gesellschaft zugegangenen brieflichen und telegraphischen Grüſse, und für die von Vertretern der Wissen-

schaft übersandten Druckschriften an dieser Stelle im einzelnen zu wiederholen. Wir müssen uns vielmehr darauf beschränken, allen Freunden der Gesellschaft nochmals zu danken, indem wir zugleich bemerken, dafs wir wertvolle Beiträge für unsere Bibliothek verdanken den Herren:

Auwers, J. Blater, H. Bruns, E. Busche, Ernest Cesàro, M. F. Caspary, G. Eneström, E. Glinzer, J. P. Gram, E. Grohn, A. Grimpen, H. Heddäus, J. Hermes, J. Horn, D. Bierens de Haan, A. Hurwitz, Felix Klein, A. Köpcke, Kurd Lafswitz, M. E. Lemoine, F. Lindemann, R. Lohnstein, L. Lorenz, M. E. Mathieu, M. Maurice, E. Netto, M. d'Ocagne, L. F. Ofterdinger, C. le Paige, H. Poincaré, M. Rosenkranz, J. Sievers, M. Simon, W. Schaper, P. H. Schoute, J. Schröder, H. Schroeter, H. Schubert, A. Steen, T. N. Thiele, Th. Tuch, H. Valentiner, A. Voss, H. Wagner, G. Wallenberg, G. D. E. Weyer, H. G. Zeuthen, K. Zindler.

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 2. Ausgegeben im Februar 1892.

Über eine rationale nicht-Euklidische Maſsbestimmung in der Ebene.

Von E. Busche in Bergedorf.

1.

In den Programmen der Hansaschule zu Bergedorf von 1890 und 1891 habe ich versucht, die Zahlenreihe ohne Zuhilfenahme einer Längeneinheit auf die Punkte einer Geraden zu beziehen. Diese Beziehung will ich hier zunächst ausführlicher begründen.

Wenn jeder Punkt einer Graden mit einer reellen Zahl so bezeichnet ist, daſs die zu den der Gröſse nach geordneten Zahlen A, B, C gehörigen Punkte A, B, C derartig liegen, daſs A durch B von C getrennt ist, so nenne ich die Punktreihe eine lineare und die Beziehung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten der Geraden eindeutig und stetig. Um eine solche lineare Punktreihe zu konstruieren, sehe ich die Existenz von wenigstens einer solchen Punktreihe auf der Geraden als nicht weiter zu beweisende Voraussetzung an. Durchläuft die Variabele X die Zahlenwerte der als vorhanden vorausgesetzten Punktreihe und Y die einer zweiten eindeutig auf die Zahlenreihe bezogenen Punktreihe auf derselben Geraden, so müssen die Werte von X und Y sich auch gegenseitig eindeutig entsprechen, d. h. sie müssen durch eine bilineare Gleichung

$$\alpha XY + \beta X + \gamma Y + \delta = 0$$

verbunden sein. Da diese Gleichung drei wesentliche Konstanten beitzt, so darf man zu drei verschiedenen Werten von X die zugehörigen unter sich verschiedenen Werte von Y beliebig wählen, dann aber ist jedem Wert von X ein Wert von Y zugewiesen, so daſs

als Fundamentaleigenschaft einer eindeutig auf die Zahlenreihe bezogenen Punktreihe die Thatsache sich ergiebt, dafs sie durch drei ihrer Punkte bestimmt ist. Aus der bilinearen Gleichung schliefst man auch wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Punktreihe X, dafs die Punktreihe Y stetig ist; sie ist also eine lineare Punktreihe.

Zwei auf verschiedenen Geraden liegende lineare Punktreihen sind zu einander projektivisch. Denn wenn sie einen Punkt entsprechend gemein haben, kann offenbar die eine als die Projektion der anderen aus einem Punkte betrachtet werden, der sich als Schnittpunkt der Verbindungslinien zweier entsprechenden Zahlenpaare der beiden Punktreihen ergiebt. Durch dieses Projizieren wird eben eine eindeutige stetige Beziehung zwischen den Punkten der beiden Geraden herbeigeführt, wie sie der Begriff der linearen Punktreihe verlangt.

Um eine durch drei Punkte gegebene lineare Punktreihe thatsächlich zu konstruieren, d. h. jeder Zahl den ihr zukommenden Platz auf der Geraden anzuweisen, ist es notwendig, das lineare Punktfeld und deshalb zunächst den linearen Strahlenbüschel zu definieren. Der lineare Strahlenbüschel, von dem man ebenso gut wie von der linearen Punktreihe hätte ausgehen können, kann jetzt einfach als durch Projektion einer linearen Punktreihe von einem nicht zu ihr gehörigen Punkte aus entstanden erklärt werden. Dabei wird jeder Strahl des Büschels mit der Zahl bezeichnet, die er auf der Punktreihe trifft. Die bisher erkannten Eigenschaften der linearen Punktreihe übertragen sich ohne weiteres auf den linearen Strahlenbüschel.

Denkt man sich nun zwei lineare Strahlenbüschel mit verschiedenen Mittelpunkten in derselben Ebene, so schneidet ein beliebiger Strahl x des einen Büschels einen beliebigen Strahl y des anderen in einem Punkte $x \mid y$, und die Zahlen x, y mögen die Koordinaten dieses Punktes genannt werden. Auf diese Weise wird jedem Punkt der Ebene ein Paar von reellen Zahlen zugeordnet, und umgekehrt entspricht jedem Zahlenpaar ein Punkt der Ebene. Nur die auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte der Strahlenbüschel liegenden Punkte machen eine Ausnahme, da jeder von ihnen mit dem Zahlenpaar x_0, y_0 bezeichnet werden kann, wenn x_0, y_0 die Zahlenwerte sind, die dem Verbindungsstrahl in den beiden Büscheln zukommen. Das so konstruierte Punktfeld ist kein lineares, da eine Gleichung ersten Grades zwischen x und y, durch die die beiden Strahlenbüschel projektivisch aufeinander bezogen werden, im allgemeinen die Gleichung eines Kegelschnittes ist. Nur wenn die lineare Gleichung durch die schon erwähnten Werte x_0, y_0 erfüllt wird, ist sie die Gleichung

einer Geraden, da in diesem Falle die Strahlenbüschel perspektivisch aufeinander bezogen sind. Damit dieser Fall bei jeder linearen Gleichung eintrete, mufs man $x_0 = y_0 = \infty$ setzen, also annehmen, dafs die beiden Strahlenbüschel ihren Unendlichkeitsstrahl gemeinschaftlich haben. Das durch zwei in dieser besonderen Lage befindliche Strahlenbüschel erzeugte Punktfeld soll ein lineares Punktfeld genannt werden.

Sind $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ zwei beliebige Punkte des Punktfeldes, so liegt der Punkt $x_1 + (x_2 - x_1)\,t \mid y_1 + (y_2 - y_1)\,t$ für jeden Wert von t auf der Verbindungslinie der beiden Punkte $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$, denn eine lineare Gleichung, der diese beiden Zahlenpaare genügen, wird auch durch $x_1 + (x_2 - x_1)\,t$, $y_1 + (y_2 - y_1)\,t$ erfüllt. Ein lineares Punktfeld ist durch vier Punkte, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen, bestimmt, wenn diese Punkte mit vier beliebigen Zahlenpaaren bezeichnet werden, von denen jedoch z. B. $x_3 \mid y_3$ nicht zu $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ in der Beziehung stehen darf, dafs

$$x_3 = x_1 + (x_2 - x_1)\,t, \quad y_3 = y_1 + (y_2 - y_1)\,t$$

ist. Durch vier solche Punkte ist in der That jeder andere Punkt des linearen Punktfeldes bestimmt, wie ich a. a. O. gezeigt habe. Für den Zweck, den ich hier im Auge habe, genügt es, wenn ich einen bestimmten Punkt einer linearen Punktreihe in derselben Weise konstruiere und berechne, die bei der Konstruktion eines linearen Punktfeldes aus vier gegebenen Punkten überhaupt anzuwenden ist.

Es sei eine lineare Punktreihe durch drei Punkte oder Zahlen a, b, c gegeben. Diese Punktreihe betrachte man als zu einem linearen Punktfelde gehörig und bezeichne die Punkte dementsprechend mit $a \mid 0$, $b \mid 0$, $c \mid 0$. Durch den Punkt $c \mid 0$ werde eine beliebige von dem Träger der Punktreihe verschiedene Gerade gezogen und auf ihr zwei beliebige Punkte mit $c \mid d$ und $c \mid e$ bezeichnet. Es ist klar, dafs die so gelegenen und bezeichneten fünf Punkte demselben linearen Punktfelde angehören und dieses bestimmen. Der Schnittpunkt der Geraden, die $a \mid 0$ mit $c \mid e$ und $b \mid 0$ mit $c \mid d$ verbinden, mufs einerseits mit

$$a + (c - a)\,t \mid et,$$

andererseits mit

$$b + (c - b)\,t' \mid dt'$$

bezeichnet werden. Aus den hieraus folgenden Gleichungen

$$a + (c - a)\,t = b + (c - b)\,t'$$

$$et = dt'$$

lassen sich t und t' berechnen, und der Schnittpunkt ergiebt sich als der Punkt

$$\frac{ae\,(b-c) - bd\,(a-c)}{e\,(b-c) - d\,(a-c)} \Big| \frac{(b-a)\,de}{e\,(b-c) - d\,(a-c)}.$$

Den bisher ganz beliebigen Zahlen d und e mufs, wie hieraus ersichtlich ist, noch die Bedingung auferlegt werden, dafs $e\,(b-c) - d\,(a-c)$ von Null verschieden sei. Durch Vertauschung von d und e findet man, dafs der Schnittpunkt der Geraden, die $a \mid 0$ mit $c \mid d$ und $b \mid 0$ mit $c \mid e$ verbinden, der Punkt

$$\frac{ad\,(b-c) - be\,(a-c)}{d\,(b-c) - e\,(a-c)} \Big| \frac{(b-a)\,de}{d\,(b-c) - e\,(a-c)}$$

ist, wo der Nenner wieder von Null verschieden vorausgesetzt wird. Der erste Punkt möge kurz mit $f \mid g$, der zweite mit $h \mid k$ bezeichnet werden. Der Punkt, in dem die Verbindungslinie von $f \mid g$ mit $h \mid k$ die Punktreihe mit den Punkten $a \mid 0$, $b \mid 0$, $c \mid 0$ trifft, ist einerseits mit

$$f + (h-f)\,t \mid g + (k-g)\,t,$$

andererseits mit

$$a + (b-a)\,t' \mid 0$$

zu bezeichnen. Daraus ergiebt sich

$$t = \frac{g}{g-k}.$$

Der gesuchte Punkt ist also

$$f + \frac{h-f}{g-k} \cdot g \Big| 0$$

oder, wenn man die Werte von f, g, h, k einsetzt,

$$\frac{-ac + 2ab - bc}{a - 2c + b} \Big| 0.$$

Betrachtet man nun die ursprüngliche lineare Punktreihe wieder ohne Rücksicht auf das lineare Punktfeld, so hat man also auf die angegebene Weise zu den drei beliebigen Punkten a, b, c der Punktreihe durch Konstruktion die Lage und durch Rechnung den Wert eines vierten Punktes abgeleitet. Die Konstruktion ist aber keine andre als die des vierten harmonischen Punktes, der durch a und b von c getrennt ist, und zu dem gefundenen Zahlenwerte des Punktes kommt man unmittelbar, wenn man aus der Gleichung

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = -1$$

die mit c konjugierte vierte harmonische Zahl zu a, b, c berechnet. So hat sich der Satz ergeben: Zu drei gegebenen Punkten einer

linearen Punktreihe wird die Lage eines vierten Punktes x, dessen Zahlenwert aus der Gleichung

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{x-a}{x-b} = -1$$

folgt, dadurch gefunden, dafs man den vierten mit c konjugierten harmonischen Punkt zu a, b, c konstruiert.

Jetzt ist es leicht, eine lineare Punktreihe wirklich herzustellen: Man nehme auf einer Geraden drei beliebige Punkte an und bezeichne sie mit 0, 1, ∞. Darauf konstruiere man den von 0 durch 1 und ∞ getrennten vierten harmonischen Punkt zu den drei gegebenen und bezeichne ihn mit 2, aus 1, 2, ∞ konstruiere man ebenso den Punkt 3, aus 2, 3, ∞ den Punkt 4 u. s. w. So kann man zunächst alle ganzen positiven und negativen Zahlen finden. Den Ort des rationalen Bruches $\frac{m}{n}$ findet man darauf, indem man zu $-m$, m, mn den zu mn konjugierten Punkt konstruiert. Die Lage eines mit einer irrationalen Zahl bezeichneten Punktes kann man naturgemäfs auf diese Weise nur mit beliebiger Genauigkeit dadurch finden, dafs man die irrationale Zahl in beliebig wenig voneinander verschiedene rationale Grenzen einschliefst.

Sind von einer zu konstruierenden linearen Punktreihe Y nicht die Punkte 0, 1, ∞ gegeben, sondern drei beliebige Punkte a, b, c, so kann man z. B. so verfahren: Man konstruiere zuerst in der angegebenen Weise eine lineare Punktreihe X, deren Punkt 0 mit a, 1 mit b, ∞ mit c zusammenfällt, und berechne aus der zwischen X und Y bestehenden bilinearen Gleichung, deren Koeffizienten durch die angegebene Zuordnung der drei Punktepaare bestimmt sind, zu jedem Wert von X den zugehörigen Wert von Y. Praktisch verfährt man bei der Konstruktion einer linearen Punktreihe mit den gegebenen Punkten a, b, c natürlich am einfachsten, wenn man etwa durch c eine beliebige Gerade legt, auf ihr eine äquidistante lineare Punktreihe annimmt, die den Punkt c mit der zu bestimmenden linearen Punktreihe entsprechend gemein hat, und diese äquidistante Punktreihe von dem Schnittpunkt der Verbindungslinien der die Zahl a und b in den beiden Punktreihen darstellenden Punktepaare aus auf den Träger der gesuchten Punktreihe projiziert. Eine äquidistante Punktreihe ist eine solche, die mit einem gewöhnlichen Mafsstabe konstruiert werden kann; ihr unendlich ferner Punkt repräsentiert die Zahl ∞.

Es könnte die Frage aufgeworfen werden, ob die Voraussetzung, die ich bei der Aufstellung des Begriffs der linearen Punktreihe gemacht habe, dafs nämlich eine eindeutige und stetige Zuordnung der reellen Zahlen zu den Punkten einer Geraden überhaupt möglich ist,

nicht eines Beweises bedürfe, oder — was dasselbe ist — bewiesen werden könne. In dem Programm von 1890 habe ich diese Voraussetzung nicht ausdrücklich gemacht, sondern einen dem hier eingeschlagenen Wege gerade entgegengesetzten Weg befolgt, indem ich zu den gegebenen Zahlen a, b, c den vierten harmonischen Punkt konstruierte und ihn mit der Zahl bezeichnete, die ihm, wie vorher bewiesen wurde, in der linearen Punktreihe thatsächlich zukommt. Auf dieselbe Weise fortfahrend kann man beliebig vielen Punkten der Geraden ihre Zahlen zuweisen, aber ob man ohne Benutzung der jetzt zu Grunde gelegten Voraussetzung wirklich nachweisen könne, dafs die so hergestellte Beziehung zwischen den reellen Zahlen und den Punkten der Geraden eindeutig und stetig ist, scheint mir zweifelhaft zu sein.

2.

Als Entfernung AB des Punktes A einer linearen Punktreihe von dem Punkt B derselben Reihe definiere ich die Differenz $B - A$.

Als Winkel ab zwischen dem Strahl a eines linearen Strahlenbüschels und dem Strahl b desselben Büschels definiere ich die Differenz $b - a$.

Die geometrische Bedeutung dieser Mafsunterschiede sehe ich darin, dafs sie die Anzahl der zwischen den gegebenen Elementen liegenden ganzen Elemente der Grundgebilde angeben, d. h. solcher Elemente, die ganze Zahlen darstellen. Diese Elemente liegen natürlich auf demjenigen der beiden von den gegebenen Elementen begrenzten Teile des Grundgebildes, der das die Zahl ∞ repräsentierende Element nicht enthält. Dieser Teil ist als die von A und B begrenzte Strecke oder der von a und b eingeschlossene Winkel zu betrachten, so dafs durch die begrenzenden Elemente und ihre Reihenfolge die Mafsunterschiede eindeutig definiert sind. Dabei kommt es selbstverständlich nicht darauf an, ob die Strecke im gewöhnlichen Sinne des Wortes endlich ist oder nicht.

Nur wenn die zweite der gegebenen Zahlen gröfser ist als die erste und denselben Bruchrest hat wie diese, giebt die Differenz die Anzahl der zwischen den Zahlen liegenden ganzen Elemente wirklich an. Anderenfalls mufs der Begriff „Anzahl von ganzen Elementen“ eben durch diese Differenz definiert werden.

Die Mafsunterschiede sind, wie ohne weiteres aus der Definition folgt, projektiv, d. h. invariant bei Verwandlung des linearen Grundgebildes in ein anderes durch Projektion.

Für die Erweiterung der Begriffe der Entfernung und des Winkels sind noch folgende Abänderungen ihrer Definitionen von Wichtigkeit:

Die Entfernung zweier Punkte einer linearen Punktreihe ist die Anzahl derjenigen ganzen Strahlen eines die Punktreihe projizierenden Strahlenbüschels, die die von den Punkten begrenzte Strecke treffen.

Der Winkel zwischen zwei Strahlen eines linearen Strahlenbüschels ist die Anzahl derjenigen ganzen Punkte einer das Strahlenbüschel schneidenden Punktreihe, die in dem von den Strahlen begrenzten Winkel[1]) liegen.

Für beide Maßunterschiede gilt die Gleichung

$$AB + BC + CA = 0.$$

3.

Ein lineares Punktfeld wird dadurch konstruiert, daß man in einer Ebene zwei lineare Strahlenbüschel mit verschiedenen Mittelpunkten annimmt, die ihren Unendlichkeitsstrahl gemeinschaftlich haben. Der Schnitt des Strahles x des einen Büschels mit dem Strahl y des anderen liefert den Punkt $x \mid y$ des Punktfeldes. Der Punkt heißt ein ganzer Punkt, wenn seine Koordinaten x und y beide ganzzahlig sind. Der gemeinschaftliche Unendlichkeitsstrahl der beiden erzeugenden Strahlenbüschel möge die Axe des linearen Punktfeldes heißen.

Ein lineares Strahlenfeld wird dadurch konstruiert, daß man in einer Ebene zwei lineare Punktreihen auf verschiedenen Geraden annimmt, die ihren Unendlichkeitspunkt gemeinschaftlich haben. Die Verbindungslinie des Punktes X der einen Reihe mit dem Punkt Y der anderen liefert den Strahl $X \mid Y$ des Strahlenfeldes. Der Strahl heißt ein ganzer Strahl, wenn seine Koordinaten X und Y beide ganzzahlig sind. Der gemeinschaftliche Unendlichkeitspunkt der beiden erzeugenden Punktreihen möge das Zentrum des linearen Strahlenfeldes heißen.

Das lineare Punktfeld kann zugleich als ein lineares Strahlenfeld angesehen werden. Es sei nämlich

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

die Gleichung einer Geraden, also x und y variabel, X und Y konstant. Dann trifft diese Gerade den Strahl $x = 0$ in dem Punkte $0 \mid -\frac{1}{Y}$ und den Strahl $y = 0$ in dem Punkte $-\frac{1}{X} \mid 0$. Läßt man X und Y alle reellen Werte annehmen, so sind die so erhaltenen Geraden des Punktfeldes die Strahlen eines linearen Strahlenfeldes,

1) Das Wort „Winkel“ gebrauche ich als Analogon sowohl zu „Entfernung“ als auch zu „Strecke“; in der ersten Bedeutung werde ich es auch durch „Zahlenwert eines Winkels“ ersetzen, wobei dann also nicht an den absoluten Betrag zu denken ist.

dessen erzeugende Punktreihen auf den beiden Nullstrahlen der das Punktfeld erzeugenden Strahlenbüschel liegen, und dessen Zentrum mit dem Punkt 0 | 0 des Punktfeldes zusammenfällt, während die Axe des Punktfeldes als Strahl des Strahlenfeldes mit 0 | 0 zu bezeichnen ist. Das Punktfeld und das Strahlenfeld zusammen sollen ein lineares ebenes System genannt werden.

Auf die Form

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

läfst sich eine lineare Gleichung nicht bringen, deren konstantes Glied gleich Null ist. Eine solche Gleichung ist bei variabelen x, y die Gleichung einer durch das Zentrum des linearen Systems gehenden Geraden, bei veränderlichen X, Y die Gleichung eines auf der Axe liegenden Punktes. Die durch das Zentrum gehenden Strahlen und die auf der Axe liegenden Punkte kann man zweckmäfsig durch die Koordinatenverhältnisse $\frac{Y}{X}$ und $\frac{y}{x}$ voneinander unterscheiden. Sie bestimmen einen linearen Strahlenbüschel des Zentrums und eine lineare Punktreihe der Axe. Die Gerade

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

geht dann durch den Punkt $\frac{Y}{X}$ der Axe, und der Punkt

$$Xx + Yy + 1 = 0$$

liegt auf dem Strahl $\frac{y}{x}$ des Zentrums.

Durch Einführung homogener Koordinaten könnte man es natürlich erreichen, dafs die erzeugenden Punktreihen mit der Axe, die erzeugenden Strahlenbüschel mit dem Zentrum gleichberechtigt würden. Da aber die geometrische Deutung der hier zu benutzenden Mafsunterschiede durch Einführung homogener Koordinaten an Anschaulichkeit sehr verlieren würde, behalte ich die nicht homogenen Koordinaten bei. Ich bemerke nur, dafs bei der Definition der homogenen Koordinaten der Umstand zu benutzen ist, dafs, wenn auf einer Geraden zwei lineare Punktreihen X_1 und X_2 liegen, auch das Verhältnis $\frac{X_1}{X_2}$ eine lineare Punktreihe durchläuft, wenn X_1 und X_2 ihren Unendlichkeitspunkt gemeinschaftlich haben.

Zu der in der Überschrift angegebenen rationalen Mafsbestimmung für das lineare ebene System wird man geführt, wenn man die möglichst genaue und möglichst einfache Verallgemeinerung der für die Grundgebilde erster Stufe eingeführten Mafsbestimmung aufsucht.

Es ist dies offenbar nicht die Maſsbestimmung, die ich a. a. O. gebraucht habe, wo ich als Maſsunterschied der beiden Elemente $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ die Funktion $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ definiere, sondern einfach die Summe der Koordinatendifferenzen $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)$ selbst. Diese soll jetzt als Entfernung oder als Winkel bezeichnet werden, je nachdem $x_1 \mid y_1$ und $x_2 \mid y_2$ Punkte oder Strahlen sind. Diese Maſsbestimmung, zu der ja auch z. B. die Möbiussche geometrische Addition von Strecken führt, hat vor allem den Vorzug, daſs sie eine unmittelbare geometrische Bedeutung besitzt, die der geometrischen Bedeutung der entsprechenden Funktion bei den Gebilden erster Stufe durchaus entspricht. Es ist nämlich

die Entfernung zweier Punkte gleich der Anzahl der ganzen Strahlen x und y der beiden das lineare Punktfeld erzeugenden Strahlenbüschel, die zwischen den beiden Punkten hindurchgehen.	der Winkel zweier Strahlen die Anzahl der ganzen Punkte X und Y der beiden das lineare Strahlenfeld erzeugenden Punktreihen, die zwischen den beiden Strahlen liegen.

Dabei ist das Wort „Anzahl“ natürlich wieder in dem früher angegebenen modifizierten Sinn zu verstehen und zu bedenken, daſs von den beiden Anzahlen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ die eine oder beide negativ sein können.

Sind A, B, C drei gleichartige Elemente des linearen ebenen Systems, und ist AB der Maſsunterschied zwischen den beiden Elementen A und B, so gilt wieder die Gleichung

$$AB + BC + CA = 0.$$

Der Vollständigkeit wegen mögen hier noch die folgenden Definitionen und Sätze Platz finden, obgleich ich von ihnen keinen Gebrauch machen werde:

Der Punktinhalt einer geschlossenen Figur ist gleich der Anzahl der in ihrem Innern liegenden ganzen Punkte. Der Punktinhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten $x_1 \mid y_1$, $x_2 \mid y_2$, $x_3 \mid y_3$, das von der Axe nicht getroffen wird, ist	Der Strahleninhalt einer geschlossenen Figur ist gleich der Anzahl der ganzen Strahlen, die ihren Umfang nicht treffen. Der Strahleninhalt eines Dreiseits mit den Seiten $X_1 \mid Y_1$, $X_2 \mid Y_2$, $X_3 \mid Y_3$, das das Zentrum einschlieſst, ist
$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.	$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

4.

Es sollen nun einige durch das eingeführte Maſssystem zum Ausdruck zu bringende Eigenschaften des linearen ebenen Systems aufgezählt werden. Dabei ist vor allem das Analogon zu den unendlich fernen imaginären Kreispunkten der gewöhnlichen analytischen Geometrie und zu dem absoluten Kegelschnitt der allgemeinen Cayleyschen Maſsbestimmung bemerkenswert. Dieses Analogon ist ein reeller Punkt auf der Axe und dual entsprechend eine reelle Gerade des Zentrums.

Die Aufgabe, alle reellen Punkte $x \mid y$ zu bestimmen, die von dem Punkt $x_0 \mid y_0$ dieselbe Entfernung haben wie der Punkt $x_1 \mid y_1$, führt auf die Gleichung

$$x - x_0 + y - y_0 = x_1 - x_0 + y_1 - y_0$$

oder

$$x + y = x_1 + y_1 = z_1,$$

d. h. alle diese Punkte liegen auf einer bestimmten Geraden, deren Koordinaten beide den Wert $-\frac{1}{z_1}$ haben, die folglich durch den Punkt 1 der Axe geht. Also:

Auf irgend einer Geraden des Punktes 1 der Axe liegen nur solche Punkte, die von irgend einem festen Punkte alle dieselbe Entfernung haben. Dieser Punkt soll der absolute Punkt des linearen ebenen Systems heiſsen, seine Gleichung ist

$$X - Y = 0;$$

2 Punkte, die mit dem absoluten Punkt in gerader Linie liegen, haben die Entfernung Null voneinander.

Durch irgend einen Punkt des Strahls 1 des Zentrums (der das Zentrum mit dem Punkt — 1 der Axe verbindet) gehen nur solche Geraden, die mit irgend einer festen Geraden alle denselben Winkel bilden. Diese Gerade soll die absolute Gerade des Systems heiſsen, ihre Gleichung ist

$$x - y = 0;$$

2 Strahlen, die sich auf der absoluten Geraden schneiden, bilden den Winkel Null miteinander.

Die beiden absoluten Elemente des linearen ebenen Systems sind durch die erzeugenden Elemente harmonisch voneinander getrennt.

Durchläuft der Punkt $x \mid y$ eine nicht durch den absoluten Punkt gehende Gerade

$$Xx + Yy + 1 = 0,$$

Dreht sich der Strahl $X \mid Y$ um einen die absolute Gerade nicht enthaltenden Punkt

$$Xx + Yy + 1 = 0,$$

und bezeichnet man die Entfernung des beweglichen Punktes von einem festen Punkte $x_1 \mid y_1$ mit z, so dafs

$$x + y = z + x_1 + y_1$$

ist, so ergiebt sich zu jedem Wert von z ein bestimmter Punkt $x \mid y$. Bezeichnet man jeden Punkt der Geraden mit seiner Entfernung von dem Punkte $x_1 \mid y_1$, so erhält man auf der Geraden eine lineare Punktreihe, deren Unendlichkeitspunkt auf der Axe und deren Nullpunkt auf der Verbindungslinie des Punktes $x_1 \mid y_1$ mit dem absoluten Punkt liegt.

und bezeichnet man den Winkel des beweglichen Strahles mit einem festen Strahl $X_1 \mid Y_1$ mit Z, so dafs

$$X + Y = Z + X_1 + Y_1$$

ist, so ergiebt sich zu jedem Wert von Z ein bestimmter Strahl $X \mid Y$. Bezeichnet man jeden Strahl des Punktes mit dem Zahlenwert seines Winkels mit dem Strahl $X_1 \mid Y_1$, so erhält man in dem Punkt einen linearen Strahlenbüschel, dessen Unendlichkeitsstrahl durch das Zentrum und dessen Nullstrahl durch den Schnittpunkt des Strahles $X_1 \mid Y_1$ mit der absoluten Geraden geht.

Die Transformationen des linearen ebenen Systems, unter denen diejenigen besonders hervorzuheben sind, bei denen die Mafsunterschiede invariant bleiben, will ich hier, weil ich sie nicht benutzen werde, übergehen und mich gleich zur Betrachtung der Kurven 2. Grades wenden. Dabei beschränke ich mich auf solche Kegelschnitte, die in einer möglichst engen Beziehung zu den ausgezeichneten Elementen des linearen ebenen Systems stehen.

Die Gleichung

$$(x + y)^2 + 2\varrho(y - x) = 0,$$

wo ϱ eine reelle von Null verschiedene Zahl bezeichnet, ist die Gleichung einer Kurve 2. Ordnung, die die Axe im absoluten Punkt, die absolute Gerade im Zentrum berührt.

Die Gleichung

$$(X + Y)^2 + 2 \cdot \frac{2}{\varrho}(Y - X) = 0$$

ist die Gleichung des Strahlenbüschels 2. Ordnung, der die links erwähnte Kurve 2. Ordnung einhüllt.

Die verschiedenen Punkte des Kegelschnittes können am einfachsten durch ihre Entfernungen vom Zentrum voneinander unterschieden werden, da zu jeder Entfernung ein Punkt der Kurve gehört. Ist nämlich

$$x + y = 2z,$$

so ist

$$x - y = \frac{2z^2}{\varrho},$$

also $\frac{\varrho z + z^2}{\varrho} \mid \frac{\varrho z - z^2}{\varrho}$ der Punkt des Kegelschnittes, der die Entfernung $2z$ vom Zentrum hat. Die Tangente dieses Punktes hat die

Koordinaten $-\frac{2z-\varrho}{2z^2}$ | $-\frac{2z+\varrho}{2z^2}$, so dafs der Winkel, den sie mit der Axe bildet, gleich $-\frac{2}{z}$ ist.

Bei der Angabe der folgenden auf die einfachste Weise abzuleitenden Sätze will ich bei den sich auf den Strahlenbüschel 2. Ordnung beziehenden Theoremen den Winkel, den ein beliebiger Strahl mit der Axe bildet, nicht mit $2Z$ bezeichnen, entsprechend der Entfernung $2z$ eines beliebigen Kurvenpunktes vom Zentrum, sondern mit $-\frac{2}{z}$, weil dadurch eine engere Beziehung zwischen den sich dual entsprechenden Sätzen herbeigeführt wird.

Solche Sätze sind:

Der Schnittpunkt der Tangenten in den Punkten mit den Entfernungen $2z_1$ und $2z_2$ vom Zentrum hat die Entfernung $z_1 + z_2$ vom Zentrum, so dafs die Entfernungen des Schnittpunktes von den Berührungspunkten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Sie sind $z_2 - z_1$ und $z_1 - z_2$.

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten, die die Winkel $-\frac{2}{z_1}$ und $-\frac{2}{z_2}$ mit der Axe bilden, schliefst mit der Axe den Winkel $-\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$ ein, so dafs die Winkel zwischen der Verbindungslinie und den Tangenten sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Sie sind $-\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}$ und $-\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$.

Irgend eine 3. Tangente, die in dem Punkte $2z$ vom Zentrum berührt, trifft die erste Tangente in der Entfernung $z_1 + z$, die zweite in der Entfernung $z_2 + z$ vom Zentrum, so dafs die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte gleich $z_2 - z_1$ ist, unabhängig davon, welche dritte Tangente die beiden festen Tangenten schneidet.

Die Verbindungslinie irgend eines 3. Kurvenpunktes, dessen Tangente den Winkel $-\frac{2}{z}$ mit der Axe bildet, mit dem ersten Berührungspunkte bildet mit der Axe den Winkel $-\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z}\right)$, die Verbindungslinie desselben Punktes mit dem zweiten Berührungspunkt bildet mit der Axe den Winkel $-\left(\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z}\right)$, so dafs der Winkel dieser beiden Verbindungslinien gleich $-\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_1}$ ist, unabhängig davon, welcher dritte Kurvenpunkt mit den beiden festen Kurvenpunkten verbunden wird.

Der Satz links gilt übrigens von jeder Kurve 2. Grades, die die Axe im absoluten Punkt berührt, der Satz rechts von jeder solchen Kurve, die die absolute Gerade im Zentrum berührt. Da durch ein gewöhnliches Cartesisches Koordinatensystem ebenfalls ein spezielles lineares ebenes System gebildet wird, so gilt der Satz links auch in Bezug auf ein gewöhnliches Koordinatensystem für eine Parabel, deren Axe die Gerade $x + y = 0$ ist.

Bezeichnet man jeden Punkt des Kegelschnittes mit seiner Entfernung vom Zentrum, so entsteht auf dem Kegelschnitt eine lineare Punktreihe, d. h. eine solche, die von jedem Punkte der Kurve durch einen linearen Strahlenbüschel projiziert wird; vier harmonischen Zahlen dieser Punktreihe entsprechen vier harmonische Punkte des Kegelschnittes.

Auch wenn man alle Strahlen, die einen festen Punkt des Kegelschnittes mit einem beweglichen Punkte der Kurve verbinden, mit den Entfernungen dieses beweglichen Punktes von dem festen Punkte bezeichnet, erhält man einen linearen Strahlenbüschel, dessen Nullstrahl die Tangente des festen Punktes, dessen Unendlichkeitsstrahl die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem absoluten Punkt ist.

Einen zweiten linearen Strahlenbüschel desselben Kegelschnittpunktes erhält man, indem man jeden Strahl mit dem Zahlenwert des Winkels bezeichnet, den er mit der Tangente des Punktes bildet. Der Nullstrahl dieses Büschels ist wieder die Tangente, der Unendlichkeitsstrahl die Verbindungslinie mit dem Zentrum.

Bezeichnet man jede Tangente des Kegelschnittes mit dem Zahlenwert ihres Winkels mit der Axe, so entsteht ein linearer Strahlenbüschel zweiter Ordnung, d. h. ein solcher, der von jedem seiner Strahlen in einer linearen Punktreihe getroffen wird; vier harmonischen Zahlen dieses Büchels entsprechen vier harmonische Tangenten des Kegelschnittes.

Auch wenn man alle Punkte, in denen eine feste Tangente des Kegelschnittes von dessen übrigen Tangenten geschnitten wird, mit dem Zahlenwert des Winkels zwischen der beweglichen Tangente und der festen Tangente bezeichnet, erhält man eine lineare Punktreihe, deren Nullpunkt der Berührungspunkt der Tangente, deren Unendlichkeitspunkt der Schnittpunkt der festen Tangente mit der absoluten Geraden ist.

Eine zweite lineare Punktreihe derselben Kegelschnittstangente erhält man, indem man jeden ihrer Punkte mit seiner Entfernung vom Berührungspunkte bezeichnet. Der Nullpunkt dieser Reihe ist wieder der Berührungspunkt, der Unendlichkeitspunkt ist der Schnittpunkt mit der Axe.

Da die beiden Büschel ihren Nullstrahl gemeinsam haben, so haben sie noch einen anderen reellen Strahl gemeinschaftlich. Alle diese zweiten gemeinschaftlichen Strahlen für die sämtlichen Kegelschnittspunkte als Zentren der Strahlenbüschel gehen durch den Punkt $-\frac{1}{2\varrho} \mid \frac{1}{2\varrho}$, wenn man die Winkel von der Tangente zum beweglichen Strahl und zugleich die Entfernung von dem festen Punkt zum beweglichen Punkt rechnet oder beide Maſsunterschiede das Zeichen wechseln läſst. Rechnet man dagegen nur einen Maſsunterschied in umgekehrter Weise, so gehen alle zweiten gemeinschaftlichen Strahlen durch den Punkt $\frac{1}{2\varrho} \mid -\frac{1}{2\varrho}$. Diese beiden Punkte liegen auf der Verbindungslinie des Zentrums mit dem absoluten Punkt und sind durch diese Punkte harmonisch voneinander getrennt.

Da die beiden Reihen ihren Nullpunkt gemeinsam haben, so haben sie noch einen anderen reellen Punkt gemeinschaftlich. Alle diese zweiten gemeinschaftlichen Punkte für die sämtlichen Kegelschnittstangenten als Träger der Punktreihen liegen auf der Geraden $-\frac{1}{2\varrho} \mid \frac{1}{2\varrho}$, wenn man die Entfernung von dem Berührungspunkt zum beweglichen Punkt und zugleich den Winkel von der festen Tangente zur beweglichen Tangente rechnet oder beide Maſsunterschiede des Zeichen wechseln läſst. Rechnet man dagegen nur einen Maſsunterschied in umgekehrter Weise, so liegen alle zweiten gemeinschaftlichen Punkte auf der Geraden $\frac{1}{2\varrho} \mid -\frac{1}{2\varrho}$. Diese beiden Geraden gehen durch den Schnittpunkt der Axe mit der absoluten Geraden und sind durch diese Geraden harmonisch von einander getrennt.

Betrachtet man für zwei feste Punkte die zwei Paare der links erwähnten linearen Strahlenbüschel, so erzeugen die beiden linearen Büschel derselben Art je einen Kegelschnitt. Diese beiden Kegelschnitte gehen durch die angenommenen Punkte des ursprünglichen Kegelschnittes und durch den Schnittpunkt der Tangenten dieser Punkte, und der eine berührt aufserdem den ursprünglichen Kegelschnitt in dem absoluten Punkte, der andere im Zentrum. Der vierte gemeinschaftliche Punkt dieser beiden Kegelschnitte liegt immer auf der Verbindungslinie des Zentrums mit dem absoluten Punkte und auf der Verbindungslinie des Schnittpunktes der Tangenten mit dem Schnittpunkte der absoluten Geraden und der Axe.

Dieser Satz kann unabhängig von dem betrachteten Koordinatensystem ausgesprochen werden. Denn offenbar kann man zu jedem vorgegebenen nicht zerfallenden Kegelschnitt ein lineares ebenes System auf unendlich vielfache Weise so annehmen, daſs der Kegel-

schnitt zu diesem System die hier betrachtete ausgezeichnete Lage besitzt. Der angegebene Satz lautet dann so:

Gehen zwei Kegelschnitte durch dieselben beiden Punkte eines dritten Kegelschnittes und durch den Schnittpunkt der Tangenten des dritten Kegelschnittes in den beiden Punkten, und berühren die beiden Kegelschnitte den dritten noch in je einem Punkte, so liegt der vierte gemeinschaftliche Punkt der beiden ersten Kegelschnitte auf der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte und auf der Verbindungslinie der schon genannten Tangenten mit dem Schnittpunkt der Tangenten der beiden Berührungspunkte.

Der letzte Teil dieses Satzes ist ein besonderer Fall eines bekannten Satzes über drei Kegelschnitte mit zwei gemeinschaftlichen Punkten.[1]) Ob der erste Teil des Satzes bekannt ist, weifs ich nicht.

Zum Schlufs möge noch die Krümmung des in der ausgezeichneten Lage zum linearen ebenen System befindlichen Kegelschnittes berechnet werden. Unter Krümmung einer Kurve hat man das Verhältnis zwischen dem Winkel zweier unmittelbar aufeinander folgenden Tangenten und der Entfernung zweier unmittelbar aufeinander folgenden Punkte der Kurve zu verstehen. Der Winkel ist $d(X+Y)$, die Entfernung ist $d(x+y)$. Nimmt man z als unabhängige Variabele an, so ist $X+Y=-\frac{2}{z}$, also $d(X+Y)=\frac{2}{z^2}$, ferner $x+y=2z$, also $d(x+y)=2$. Die Krümmung des Kegelschnittes in dem Punkte, der die Entfernung $2z$ vom Zentrum hat, ist demnach gleich $\frac{1}{z^2}$.

Zur Theorie der Schwingungen einer elastischen Kugel.

Von Dr. P. Jaerisch in Hamburg.

In der Arbeit „Schwingungszahlen einer elastischen Hohlkugel“[2]) weist J. Loschmidt auf die Versuche hin, aus den Schwingungszahlen eines elastischen Körpers Einsicht in die Konstitution der chemischen Elemente zu gewinnen, und stellt sich die Aufgabe, die Schwingungszahlen der elastischen Hohlkugel auf Grund der Formeln, welche ich in meinen Arbeiten[3]) gegeben habe, zu berechnen.

---

1) S. Salmon-Fiedler, Kegelschnitte. Art. 284.

2) Sitzungsber. der Wiener Akademie XCIII 2 1886.

3) Journal für reine u. angew. Math. Bd. LXXXVIII pag. 131 u. Dissertation Breslau 1878. Man vergl. auch meine Arbeiten im Journal f. r. u. a. M. Bd. CIV p. 178 und Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg Bd. I p. 275.

Es handelt sich insbesondere um eine theoretische Grundlage für das Verteilungsgesetz der Spektrallinien des Wasserstoffs, für welches Balmer in den Berichten der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Basel[1]) eine einfache empirische Formel aufgestellt hat, aus der sich die Wellenlängen mit grofser Genauigkeit berechnen lassen. Schuster[2]) und Cornu[3]) wählten als Ausgangspunkt die Schwingungen der Saiten und Stäbe. Doch scheint nach Loschmidt dazu das Studium elastischer Kugelschalen mehr geeignet, insbesondere mit Rücksicht darauf, dafs man wohl die Ätherhüllen als wesentliche Bestandteile der Atome und Moleküle ansieht, welche bei allen Erscheinungen des Lichts, der Wärme, der Elektricität und des Magnetismus in Wirksamkeit treten, ohne jedoch ihren Einflufs bis jetzt in Rechnung gezogen zu haben.

Auf ähnliche Untersuchungen weisen die Arbeiten Sir William Thomsons[4]) über Molekularphysik hin, in welchen das Molekül aus einem festen Kern bestehend und durch eine Anzahl von Kugelschalen umschlossen angenommen wird. Ich werde daher eingehender als bisher die Schwingungszustände der elastischen Kugel behandeln, um zugleich eine Grundlage für die Betrachtung konzentrischer Kugelschalen von ungleicher Dichtigkeit und verschiedenen Elasticitätskonstanten zu gewinnen.

Das letztere Problem, das an sich von Interesse ist, weil es die Theorie der Reflexion und Brechung einer Kugelfläche einschliefst, scheint insbesondere für die obigen Fragen von Bedeutung, insofern es sich darum handelt, in weiterer Annäherung den Einflufs zu berücksichtigen, den die Massenteilchen auf die Schwingungszustände der umgebenden Ätherhüllen ausüben. Das Thomsonsche Problem würde sich dann annähernd mit demjenigen decken, bei welchem die Kugelschalen unendlich dünn mit von Kugelschale zu Kugelschale sich stetig ändernder Dichtigkeit angenommen werden.

Ich habe gezeigt, dafs sich die Schwingungen einer elastischen Kugel sondern lassen 1) in rein longitudinale Schwingungen, 2) in rein transversale Schwingungen, 3) in koexistierende longitudinale und transversale Schwingungen. Loschmidt erhält nun für die Schwingungszahlen der rein transversalen Schwingungen einer dünnen Kugelschale eine sehr einfache Formel. Ich werde zeigen, dafs sich

1) Verhandlungen der Naturf. Ges. zu Basel Bd. 7 und Wiedemann Ann. 25. p. 80. 1885.

2) Proceedings of the R. Soc. Nr. 209. 1881.

3) Comp. rend. Nr. 19. Mai. 1885.

4) Sir William Thomson: Lectures on molecular dynamics. Baltimore 1884

auch in dem Falle koexistierender, longitudinaler und transversaler Schwingungen die Schwingungszahlen, sowie die drei Konstanten, welche von den Dimensionen der Kugelschale abhängen, in einfacher Weise berechnen lassen. Dagegen werden die Formeln für eine Kugelschale von endlicher Dicke, insbesondere für die Schwingungen des dritten Zustandes so kompliziert, dafs man zu dem Zwecke der Anwendung bestrebt sein mufs, dieselben durch vereinfachende Annahmen umzuformen, zumal da man in Rücksicht auf die oben genannten Probleme in weiterer Annäherung gerade Kugelschalen zu betrachten haben wird, deren Dicke gegen den inneren Radius nicht als unendlich klein angesehen werden kann. Darauf weisen die Resultate der kinetischen Gastheorie hin. Denn man kann die die Moleküle umgebenden Ätherhüllen in gewisser Hinsicht mit den von Clausius sog. Wirkungssphären derselben identifizieren. Andererseits kann die Ätherhülle eines Massenteilchens nicht weiter reichen als bis zu den nächsten dasselbe umgebenden Massenteilchen.

Es bieten sich nun zur Vereinfachung der Formeln zwei Möglichkeiten. Einmal hat man die Dimensionen der Wellenlängen im Vergleich zu den Dimensionen der Moleküle und Atome in Rücksicht zu ziehen, und dann wird die Dichtigkeit des umgebenden Äthers eine sehr viel geringere sein, als diejenige der eingeschlossenen Masse, wenn auch zu einem Vergleich weder die Theorie noch die Beobachtung bis jetzt einen Anhalt geboten hat.

Was das Verhältnis der Dimensionen der Wellenlängen des Lichts zu den Dimensionen der Massenteilchen resp. ihrer Ätherhüllen anbelangt, so hat man bei Anwendung von Durchschnittswerten für die Wellenlänge $\lambda = 10^{-4} \cdot 5$ mm, für den Grenzradius der kugelförmig gedachten Ätherhüllen $c = 10^{-7} \cdot 3$ mm[1]). Da nun die Verrückungen proportional mit $\frac{\cos}{\sin} mt$ gefunden werden, so ist $m = \frac{2\pi}{T}$ zu setzen, wo T die Schwingungszeit bezeichnet, und daher ergiebt sich für die durch die transcendenten Gleichungen zu bestimmende Gröfse $\frac{mc}{\omega}$, wo ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bezeichnet, der Wert

$$\frac{mc}{\omega} = \frac{2\pi c}{\omega T} = \frac{2\pi c}{\lambda}.$$

Es ist also $\frac{mc}{\omega}$ gleich dem Verhältnis des Umfanges eines Massenteilchens resp. seiner Ätherhülle zur Wellenlänge und daher bei Anwendung auf die Lichtschwingungen eine sehr kleine Zahl.

1) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. 1877. § 105.

Anderseits werden sich die Formeln, auch abgesehen von Schwingungen innerhalb der Ätherhüllen und der Massenteilchen, einfacher gestalten lassen in dem Falle, in welchem $\frac{mc}{\omega}$ einen sehr grofsen Wert hat, wenn also die Wellenlänge im Vergleich zu den Dimensionen des Körpers sehr klein ist. Für Lichtschwingungen tritt dieser Fall schon für mäfsige Werte der Entfernung von dem Kugelmittelpunkte ein.

Um bei Einführung der genannten Vereinfachungen die Hauptglieder der Entwickelungen hervortreten zu lassen, eignen sich für kleine Werte von $\frac{mc}{\omega}$ die Integrale der von dem Kugelradius abhängigen Differentialgleichung sowohl in der von Loschmidt als in der von mir gegebenen Form. Loschmidt geht von dem von Lamé benutzten Integrale $-\frac{X_1^n \sin x - X_2^n \cos x}{x^n}$ aus, das schon bei Poisson[1]) auftritt, obwohl ohne Hinweis darauf, dafs X_1^n, X_2^n für ganzzahlige Werte von n endliche Polynome sind. Loschmidt erhält dann auf einfachem Wege das zweite Integral derselben Differentialgleichung in der ähnlichen Form $\frac{X_2^n \sin x + X_1^n \cos x}{x^n}$. Aber die von ihm zur Berechnung der Polynome X_1^n, X_2^n gegebene Reduktionsformel scheint für ein beliebiges n weniger geeignet. Loschmidt selbst giebt die Polynome nur für spezielle Werte von n an. Doch da die von Loschmidt angewendete Form der Integrale gerade für optische Fragen von Bedeutung ist, und da sie die transcendenten Gleichungen auf eine Form zu bringen gestattet, welche in ähnlicher Weise auch bei anderen Problemen auftritt, so sollen die Integrale auf anderem Wege in ähnlicher Form hergestellt werden; und zwar lassen sich dieselben aus denjenigen Integralen gewinnen, welche für dieselbe Differentialgleichung in den Vorlesungen von F. Klein (herausggb. v. F. Pockels) aufgestellt sind, und die sich, soviel mir bekannt ist, zuerst in der Theorie des Schalles von Rayleigh (Braunschweig 1880) vorfinden. Zugleich geht aus dem Zusammenhange, in welchem dieselben zu den von mir aufgestellten Integralen g^n und h^n stehen, hervor, dafs das eine Integral von der Form $\frac{X_1^n \sin x - X_2^n \cos x}{x^n}$ für den Mittelpunkt der Kugel ($x = 0$) endlich bleibt, welchen Wert auch n annimmt. Für sehr grofse

1) Poisson: Théorie de la chaleur. Paris 1835. pag. 161.

Werte von $\frac{mc}{\omega}$ werden die Hauptglieder durch Umkehrung der genannten Polynome erhalten.

---

§ 1. Die von dem Kugelradius abhängige Differentialgleichung, welche bei Kugelschwingungen auftritt, hat die Form:

$$\frac{d^2R^n}{dr^2} + \left(m^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R^n = 0. \tag{1}$$

Ich habe für dieselbe die Integrale aufgestellt:

$$\begin{cases} g^n = r^{n+1}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot 2n+3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2n+3\cdot 2n+5} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n+3\cdot 2n+5\cdot 2n+7} + \cdots\right\}, \\ h^n = r^{-n}\left\{1 + \frac{x^2}{2\cdot 2n-1} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2n-1\cdot 2n-3} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n-1\cdot 2n-3\cdot 2n-5} + \cdots\right\}, \end{cases}$$

wo $x = mr$ gesetzt ist.

Anderseits läfst sich die Gleichung durch Bessel'sche Funktionen integrieren, so dafs die Integrale in der Form erhalten werden:

$$\begin{cases} R_1^n = \sqrt{x}\, J^{n+\frac{1}{2}}(x), \\ R_2^n = \sqrt{x}\, J^{-n-\frac{1}{2}}(x), \end{cases} \tag{3}$$

wo die Bessel'sche Funktion $J^\nu(x)$ zu definieren ist durch die beiden Darstellungen:

$$J^\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2\cdot 2\nu+2} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2\nu+2\cdot 2\nu+4} - \cdots\right\}, \tag{4a}$$

$$J^\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{1 - \frac{1^2-4\nu^2}{1\cdot 2\cdot (8x)^2} + \cdots\right\}\cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\frac{1-4\nu^2}{1\cdot 8x} - \frac{1^2-4\nu^2\cdot 3^2-4\nu^2}{1\cdot 2\cdot 3(8x)^3} + \cdots\right\}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)^{1}). \tag{4b}$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$\begin{cases} Y_1^n(x) = 1 - \frac{n-1\cdot n\cdot n+1\cdot n+2}{2!\,(2x)^2} + \frac{n-3\cdot n-2\cdot n-1\cdot n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3\cdot n+4}{4!\,(2x)^4} - \cdots, \\ Y_2^n(x) = \frac{n\cdot n+1}{1!\,2x} - \frac{n-2\cdot n-1\cdot n\cdot n+1\cdot n+2\cdot n+3}{3!\,(2x)^3} + \cdots, \end{cases}$$

---

1) Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ v. F. Pockels, pag. 110 u. 98.

so folgt aus (4b):

$$(6a)\qquad J^{n+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{Y_1^n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)+Y_2^n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\},$$

$$(6b)\qquad J^{-n-\frac{1}{2}}(x)=(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{Y_1^n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)-Y_2^n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

Durch (3) werden daher die Integrale der obigen Gleichung in einer Form dargestellt, welche der von Loschmidt angewendeten Form ähnlich, wenn auch weniger einfach ist; aber die Polynome Y_1^n und Y_2^n sind für jedes n dargestellt. Ihren Zusammenhang mit den Polynomen X_1^n, X_2^n bei Loschmidt werden spätere Formeln klarlegen.

Hätte man zur Bildung von R_1^n, R_2^n nicht (4b), sondern (4a) benutzt, so würde man

$$(7)\qquad R_1^n=kg^n,\qquad R_2^n=k^1h^n$$

erhalten haben, wo mit k und k^1 Konstante bezeichnet werden; somit ist $R_1^n=0$ für $x=0$, welchen Wert n auch annimmt.

In den Darstellungen (5) für Y_1^n und Y_2^n sind die Hauptglieder vorangestellt für grofse Werte von x; für kleine Werte von x hat man, um die Hauptglieder hervortreten zu lassen, die Polynome in umgekehrter Ordnung zu schreiben. Dabei sind gerade und ungerade Werte von n zu unterscheiden. Man erhält:

1) n ungerade:

$$(8a)\begin{cases} Y_1^n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{x^n}\\ \left\{x-\dfrac{2n-4}{3!2n-1}x^3+\dfrac{2n-8\cdot2n-6}{5!2n-3\cdot2n-1}x^5+\cdots(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots n-1}{n!n+2\cdot n+4\cdots2n-1}x^n\right\}\\ Y_2^n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{x^n}\\ \left\{1-\dfrac{2n-2}{2!2n-1}x^2+\dfrac{2n-6\cdot2n-4}{4!2n-3\cdot2n-1}x^4-\cdots(-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{4\cdot6\cdot8\cdots n+1}{(n-1)!n+2\cdot n+4\cdots2n-1}x^{n-1}\right. \end{cases}$$

2) n gerade:

$$(8b)\begin{cases} Y_1^n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{x^n}\\ \left\{1-\dfrac{2n-2}{2!2n-1}x^2+\dfrac{2n-6\cdot2n-4}{4!2n-3\cdot2n-1}x^4-\cdots(-1)^{\frac{n}{2}}\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots n}{n!n+1\cdot n+3\cdots2n-1}\right.\\ Y_2^n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}-1}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{x^n}\\ \left\{x-\dfrac{2n-4}{3!2n-1}x^3+\dfrac{2n-8\cdot2n-6}{5!2n-3\cdot2n-1}x^5+\cdots(-1)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{4\cdot6\cdot8\cdots n}{(n-1)!\cdot n+3\cdots2n-1}x^{n-1}\right. \end{cases}$$

Zum Vergleiche mit den Polynomen X_1^n, X_2^n bei Loschmidt mögen für einige Werte von n die Polynome Y_1^n, Y_2^n hingestellt werden:

a)
$$\begin{cases} Y_1^0 = 1, & Y_2^0 = 0, \\ Y_1^1 = 1, & Y_2^1 = \frac{1}{x}, \\ Y_1^2 = -\frac{1\cdot 3}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{3}\right), & Y_2^2 = \frac{1\cdot 3}{x}, \\ Y_1^3 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3}\left(x-\frac{1}{3\cdot 5}x^3\right), & Y_2^3 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3}\left(1-\frac{2}{5}x^3\right), \\ Y_1^4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{x^4}\left(1-\frac{3}{7}x^2+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}x^4\right), & Y_2^4 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{x^4}\left(x-\frac{2}{3\cdot 7}x^3\right), \\ Y_1^5 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{x^5}\left(x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}x^5\right); & Y_2^5 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{x^5}\left(1-\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{7\cdot 9}x^4\right). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ferner ergeben sich aus (3) und (6) die Werte:

(9b)
$$\begin{cases} R_1^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, \\ R_1^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}(\sin x - \cos x), \\ R_1^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1\cdot 3}{x^2}\left[\left(1-\frac{x^2}{3}\right)\sin x - x\cos x\right], \\ R_1^3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3}\left[\left(1-\frac{2}{5}x^2\right)\sin x - \left(x-\frac{x^3}{3\cdot 5}\right)\cos x\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_2^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x, \\ R_2^1 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}(x\sin x + \cos x), \\ R_2^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1\cdot 3}{x^2}\left[x\sin x + \left(1-\frac{x^2}{3}\right)\cos x\right], \\ R_2^3 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{x^3}\left[\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 5}\right)\sin x + \left(1-\frac{2}{5}x^2\right)\cos x\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Diese Formeln zeigen, dafs sich die Integrale (3) der obigen Differentialgleichung von den von Loschmidt gegebenen Formen nur durch konstante Faktoren unterscheiden.

Noch möge bemerkt werden, dafs durch (3) die Kugelschwingungen als solche charakterisiert werden, welche entweder nach dem Mittelpunkte der Kugel hin konvergieren oder von demselben aus

divergieren; denn mit Rücksicht auf die Zeit werden sich die V rückungen in der Form ergeben:

$$F \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left(\frac{mr}{\omega} \pm \frac{2\pi t}{T}\right)$$

wo m, r, ω die in der Einleitung bezeichnete Bedeutung haben.

Ich füge die folgenden bekannten Relationen hinzu, von den Gebrauch gemacht werden soll:

$$(9c) \quad \begin{cases} J^{-\nu}\frac{dJ^{\nu}}{dx} - J^{\nu}\frac{dJ^{-\nu}}{dx} = \frac{2}{\pi}\frac{\sin \nu\pi}{x} & \text{für nicht ganzzahlige } \nu, \\ J^{\nu}\frac{dY^{\nu}}{dx} - Y^{\nu}\frac{dJ^{\nu}}{dx} = \frac{1}{x} & \text{für ganzzahlige } \nu. \end{cases}$$

§ 2. Für rein longitudinale und rein transversale Schwingung hat die transcendente Gleichung, von welcher die Schwingungszahlen abhängen, die Form

$$(10) \qquad \frac{dr^{-\tau}R_m^n}{dr} = 0,$$

wo R_m^n das allgemeine Integral der Gleichungen (1) bezeichnen s Ich werde zeigen, dafs die Wurzeln der Gleichung (10), welche $r = r_0$ und $r = r_1$ zu erfüllen ist, reell sind für positive Werte v τ, für welche $\tau < n + 1$ ist.

Zunächst folgt in bekannter Weise, dafs die Wurzeln m ni komplex imaginär sein können. Aus (1) leitet man, wenn m u m' zwei ungleiche Werte von m bezeichnen, die Gleichung

$$R_{m'}\frac{d^2R_m}{dr} - R_m\frac{d^2R_{m'}}{dr} + (m^2 - m'^2)\,R_m R_{m'} = 0 \quad ^1)$$

ab und aus dieser

$$(10a) \quad \left[R_{m'}\frac{dR_m}{dr} - R_m\frac{dR_{m'}}{dr}\right]_{r_0}^{r_1} + (m^2 - m'^2)\int_{r_0}^{r_1} R_m R_{m'}\,dr = 0.$$

Der Klammerausdruck verschwindet der Gleichung (10) weg Gäbe es nun eine komplexe Wurzel $m = \alpha + i\beta$, so müfste auch konjugierte $\alpha - i\beta$ vorhanden sein; diese setze ich gleich m'. D würde aus der vorigen Gleichung folgen

$$(11) \qquad 2i\alpha\beta\int_{r_0}^{r_1} R_m R_{m'}\,dr = 0,$$

1) Die oberen resp. unteren Indices werden, wenn eine Verwechselung unm lich ist, weggelassen.

worin R_m, $R_{m'}$ konjugierte Funktionen sind. Das Produkt zweier solcher ist eine reelle positive Gröfse, und da eine Summe solcher Gröfsen nicht verschwinden kann, so mufs entweder $\beta = 0$ oder $\alpha = 0$ sein d. h. die Wurzeln sind entweder reell oder rein imaginär.

Dafs die Wurzeln nicht rein imaginär sein können, läfst sich in folgender Weise zeigen. Ich befolge dabei eine von mir in meiner Dissertation zuerst angewendete Methode.

Aus (1) folgt

$$\int_{r_0}^{r_1} R \frac{d^2R}{dr^2} dr + m^2 \int_{r_0}^{r_1} (R)^2 dr - n(n+1) \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr = 0.$$

Da nun

$$\int_{r_0}^{r_1} R \frac{d^2R}{dr^2} dr = \left[R \frac{dR}{dr}\right]_{r_0}^{r_1} - \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 dr$$

ist, und aus (10) die Gleichungen

$$\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 = \tau \left(\frac{R}{r}\right)_0, \quad \left(\frac{dR}{dr}\right)_1 = \tau \left(\frac{R}{r}\right)_1$$

folgen, in denen die Indices 0 und 1 besagen sollen, dafs r durch r_0 resp. r_1 zu ersetzen ist, so erhält man

$$(12) \quad m^2 = \frac{\int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{dR}{dr}\right)^2 dr + n(n+1) \int_{r_0}^{r_1} \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr + \frac{\tau}{r_0} (R)_0^2 - \frac{\tau}{r_1} (R)_1^2}{\int_{r_0}^{r_1} (R)^2 dr}.$$

Dieser Ausdruck kann nicht für ein rein imaginäres m bestehen. Um dies zu zeigen, untersuchen wir zunächst die vom Integral freien Glieder. Wir haben dazu $(R)_0$ und $(R)_1$ zu bilden. Es sei

$$(13) \quad R^n = R_1^n - B_n R_2^n.$$

Für die Konstante B_n folgt aus (10):

$$(14) \quad B_n = \left(\frac{dr - \tau R_1}{dr}\right)_0 : \left(\frac{dr - \tau R_2}{dr}\right)_0 = \left(\frac{dr - \tau R_1}{dr}\right)_1 : \left(\frac{dr - \tau R_2}{dr}\right)_1.$$

Den ersten Wert von B_n verwende ich zur Bildung von $(R)_0$, den zweiten zur Bildung von $(R)_1$. Berücksichtigt man dann, dafs aus (9 c) folgt

$$R_1 \frac{dR_2}{dr} - R_2 \frac{dR_1}{dr} = c,$$

wo c eine Konstante ist, so erhält man mit Rücksicht auf (10)

$$(R)_0 = \frac{r_0^{-\tau} c}{\left(\frac{dr^{-\tau} R_2}{dr}\right)_0}, \qquad (R)_1 = \frac{r_1^{-\tau} c}{\left(\frac{dr^{-\tau} R_2}{dr}\right)_1}.$$

Hieraus folgt durch (14)

$$(R)_0 : (R)_1 = \frac{1}{r_1^{-\tau}} \left(\frac{dr^{-\tau} R_1}{dr}\right)_1 : \frac{1}{r_0^{-\tau}} \left(\frac{dr^{-\tau} R_1}{dr}\right)_0,$$

und weil R_1 bis auf eine Konstante $= g^n$ in (2) ist, so ergiebt sich nach Division durch $m^{n-\nu+1}$

$$(R)_0 : (R)_1 = \left\{(n-\tau+1) r_1^n - \frac{n-\tau+3}{2 \cdot 2n+3} m^2 r_1^{n+2} + \frac{n-\tau+5}{2 \cdot 4 \cdot 2n+3 \cdot 2n+5} m^4 r_1^{n+4} \ldots\right\}$$

$$: \left\{(n-\tau+1) r_0^n - \frac{n-\tau+3}{2 \cdot 2n+3} m^2 r_0^{n+2} + \frac{n-\tau+5}{2 \cdot 4 \cdot 2n+3 \cdot 2n+5} m^4 r_0^{n+4} \ldots\right\}.$$

Wäre nun m rein imaginär, so würde $(R_0) : (R_1)$ durch den Quotienten zweier convergenten Reihen mit positiven Gliedern ausgedrückt sein, und weil $r_1 > r_0$ vorausgesetzt ist, so würde folgen

$(R)_0 > (R)_1$, also auch $(R)_0^2 > (R_1)^2$ und um so mehr $\frac{(R)_0^2}{r_0} > \frac{(R)_1^2}{r_1}$.

Diese Schlüsse gelten jedenfalls für jeden positiven Wert von τ, für welchen $\tau < n + 1$ ist.

Benutzt man ferner auch für R_2 die Darstellung von h in (2), so bestehen R_1 und R_2 für ein rein imaginäres m aus reellen Gliedern, ebenso nach (13) und (14) R und $\frac{dR}{dr}$; und die Quadrate dieser letzteren Gröfsen enthalten auch für ein rein imaginäres m nur reelle positive Elemente. Somit würde in (12) das Quadrat einer rein imaginären Gröfse ausgedrückt sein durch den Quotienten reeller positiver Gröfsen.

Somit ist bewiesen, dafs die Gleichung (12) für ein rein imaginäres m nicht bestehen kann. Da nun m weder komplex imaginär noch rein imaginär sein kann, so mufs m reell sein. Jetzt folgt aus (10a)

$$(15) \qquad \int_{r_0}^{r_1} R_m^n R_{m'}^n \, dr = 0 \quad \text{für } m \lesseqgtr m'.$$

Dieses ist die nach F. Klein sog. Orthogonalitäts-Eigenschaft der Funktionen R^n; sie dient dazu, um die Konstanten der Verrückungen den Anfangsbedingungen gemäfs zu bestimmen. Doch ist noch die Auswertung von $\int_{r_0}^{r_1} (R_m^n)^2 \, dr$ erforderlich. Dazu kann die Beziehung

(3) dienen, in welcher die Funktionen R^n zu den Besselschen Funktionen stehen.

Aus der Gleichung

$$x^2 \frac{d^2 J^\nu}{dx^2} + x \frac{dJ^\nu}{dx} + (x^2 - \nu^2) J^\nu = 0$$

folgt nach Multiplikation mit $\frac{dJ^\nu}{dx}$ und Integration:

$$\tfrac{1}{2}\int x^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{dJ^\nu}{dx}\right)^2 dx + \int x\left(\frac{dJ^\nu}{dx}\right)^2 dx + \tfrac{1}{2}\int x^2 \frac{d(J^\nu)^2}{dx} dx - \frac{\nu^2}{2}\int \frac{d(J^\nu)^2}{dx} dx = 0.$$

Bei teilweiser Integration hebt sich das zweite Glied weg, und man erhält, wenn die Integrale von $x = x_0$ bis $x = x_1$ genommen werden,

$$(16) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (J^\nu(x))^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{dJ^\nu(x)}{dx}\right)^2 + (x^2 - \nu^2)(J^\nu(x))^2\right]_{x_0}^{x_1}$$

Die gleiche Beziehung ist von Rayleigh[1]) auf anderem Wege abgeleitet. Aus (16) folgen die gesuchten Formeln für R_1^n und R_2^n nach (3) und für R^n nach (13). Man erhält:

$$(17) \qquad \int_{x_0}^{x_1} (R^n(x))^2 dx = \left[\frac{x}{2}\left(\frac{dR^n(x)}{dx} - \frac{R^n(x)}{2x}\right)^2 + \frac{4x^2 - (2n+1)^2}{8x}(R^n(x))^2\right]_{x_0}^{x_1}.$$

Für die Vollkugel gestaltet sich der Beweis, dafs die Wurzeln m der Gleichung (10) nicht rein imaginär sein können, einfacher. Die Grenzen sind 0 und r_0. Für R^n hat man das für $r = 0$ verschwindende Integral R_1^n zu nehmen. Dann folgt nach Weglassung eines konstanten Faktors aus (2)

$$\frac{dr^{-\tau} R_1^n}{dr} = (n - \tau + 1) r^{n-\tau} - \frac{n-\tau+3}{2\cdot 2n+3} m^2 r^{n-\tau+2} + \frac{n-\tau+5}{2\cdot 4\cdot 2n+3\cdot 2n+5} m^4 r^{n-\tau+4} \ldots$$

Dieser Ausdruck besteht für ein rein imaginäres m aus positiven Gliedern, falls $\tau > n + 1$ ist und kann daher für $r = r_0$ nicht verschwinden.

Rein longitudinale Schwingungen.

§ 3. Die Komponenten einer Verrückung sind gegeben durch

$$(18) \qquad u = \frac{R^1}{r} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \quad v = 0, \quad w = 0$$

mit der Bedingungsgleichung

---

1) Rayleigh, Theorie des Schalls pag. 358.

$$(18_1) \qquad r\frac{dR^1}{dr} - \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}R^1 = 0\,^{1}),$$

wo R^1 der Gleichung (1) für $n = 1$ genügt, wenn m durch $\frac{m}{\omega_1}$ ersetzt wird, wobei ω_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für longitudinale Wellen bezeichnet. Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$(18_2) \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{2\mu}$$

Es handelt sich um die Grenzwerte, welche ε annehmen kann. Die Beobachtungen haben ergeben, dafs der Wert des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längsdilatation $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ eines einseitig gedehnten Prismas um den aus der Theorie gefolgerten Wert $\frac{1}{4}$ schwankt. Der gröfste zulässige Wert ist nach den meisten Beobachtungen $\frac{1}{3}$[2]). Demnach kann $\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ als positiv angesehen werden, und die Gleichung (18_1) liefert nach § 2 nur reelle Wurzeln m.

Die Knotenflächen für rein longitudinale Schwingungen sind konzentrische Kugelflächen, deren Radien die Gleichung $R^1 = 0$ erfüllen. Für die Vollkugel, für welche nach (3) und (9b) bei Weglassung eines konstanten Faktors

$$R^1 = \frac{\sin x - x\cos x}{x}$$

zu setzen ist, wo $x = \frac{m \cdot r}{\omega_1}$, bestimmt die Gleichung

$$(19_1) \qquad \operatorname{tg} x = x,$$

die Knotenflächen; ihre Wurzeln findet man in der Theorie des Schalls von Rayleigh pag. 369. Die Gleichung (18_1) nimmt für die Vollkugel die Form an

$$(19_2) \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\varepsilon' x}{\varepsilon' - x^2},$$

wo

$$(19_3) \qquad \varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon + 1}$$

gesetzt ist.

---

1) Journal für reine u. angewandte Math. Bd. LXXXVIII § 3 pag. 137. Ich bediene mich der gleichen Bezeichnungen, wie in früheren Arbeiten, wenn eine Abweichung nicht angegeben wird.

2) cf. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität von F. Neumann. Herausgg. von O. E. Meyer 1885 pag. 137, 162 u. 163.

Für die Kugelschale hat man für R^1 nach (9_b) zu setzen

$$(20) \qquad R^1 = \frac{\sin x - x\cos x}{x} + B\frac{x\sin x + \cos x}{x},$$

wo B bestimmt ist durch

$$(20_1) \quad B = \frac{(x_0^2 - \varepsilon')\sin x_0 + \varepsilon' x_0 \cos x_0}{-\varepsilon' x_0 \sin x_0 + (x_0^2 - \varepsilon')\cos x_0} = \frac{(x_1^2 - \varepsilon')\sin x_1 + \varepsilon' x_1 \cos x_1}{-\varepsilon' x_1 \sin x_1 + (x_1^2 - \varepsilon')\cos x_1}.$$

Die Gleichung (18_1) nimmt hierdurch die Form an:

$$(20_2) \qquad \operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \varepsilon' \frac{(x_1 - x_0)(x_0 x_1 + \varepsilon')}{(x_1^2 - \varepsilon')(x_0^2 - \varepsilon') + x_0 x_1 \varepsilon'^2}.$$

Hier ist $x_1 = \frac{m r_1}{\omega_1}$, $x_0 = \frac{m r_0}{\omega_1}$ gesetzt.

Für sehr kleine Werte von x_1, x_0 geht die Gleichung (20_2) in eine Gleichung von der Form (19_1) über.

Für eine unendlich dünne Kugelschale geht aus (20_2) hervor:

$$(20_3) \qquad \frac{m^2 r_0^2}{\omega_1^2} = \frac{2(3\varepsilon + 1)}{(\varepsilon + 1)^2}.$$

Rein transversale Schwingungen.

§ 4. Die Komponenten einer Verrückung sind gegeben durch

$$(21) \quad u = 0, \quad v = \frac{\mathfrak{R}^n}{r}\frac{1}{\cos\varphi}\frac{dS^n}{d\psi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \quad w = -\frac{\mathfrak{R}^n}{r}\frac{dS^n}{d\varphi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt,$$

wo $\mathfrak{R}^n$ der Gleichung (1) genügt, wenn m durch $\frac{m}{\omega_2}$ ersetzt wird, und ω_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für transversale Wellen bezeichnet. S^n ist die von φ und ψ abhängige Kugelfunktion. Es ist $n \gtrless 1$, weil für $n = 0$ alle 3 Komponenten den Wert 0 annehmen. Die Bedingungsgleichung lautet

$$(21_1) \qquad \frac{d\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dx} = 0 \quad \text{für } x = x_0 \text{ und } x = x_1\ ^1),$$

wo x_0, x_1 hier die Bedeutung haben: $x_0 = \frac{m r_0}{\omega_2}$, $x_1 = \frac{m r_1}{\omega_2}$. Sie hat nach § 2 reelle Wurzeln.

Für $\mathfrak{R}^n(x)$ ist zu setzen.

$$(22) \qquad \mathfrak{R}^n(x) = \mathfrak{R}_1^n(x) - B_n \mathfrak{R}_2^n(x),$$

wo $\mathfrak{R}_1^n$ und $\mathfrak{R}_2^n$ nach (3) und (6a, b) bei Weglassung konstanter Faktoren, die, wie im vorigen § in die zu bestimmenden Konstanten eingehend gedacht werden können, die Werte haben:

1) Journal für reine und angew. Math. LXXXVIII pag. 141.

$$(22_1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_1^n(x) = Y_1^n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) + Y_2^n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right), \\ \mathfrak{R}_2^n(x) = Y_1^n(x)\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) - Y_2^n(x)\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Für die Konstante B_n ergiebt sich zunächst aus (21_1):

$$B_n = \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}_1}{x^2}}{dx}\right)_0 : \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}_2}{x^2}}{dx}\right)_0 = \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}_1}{x^2}}{dx}\right)_1 : \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}_2}{x^2}}{dx}\right)_1.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(23)\qquad \begin{cases} P = \dfrac{d\frac{Y_1^n}{x^2}}{dx} - \dfrac{Y_2^n}{x^2}, \\ Q = \dfrac{d\frac{Y_2^n}{x^2}}{dx} + \dfrac{Y_1^n}{x^2}, \end{cases}$$

so wird

$$(23_1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\frac{\mathfrak{R}_1^n}{x^2}}{dx} = P\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) + Q\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right), \\ \dfrac{d\frac{\mathfrak{R}_2^n}{x^2}}{dx} = P\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) - Q\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right), \end{cases}$$

und

$$(23_2)\qquad B_n = \frac{P_0\sin\left(x_0-\frac{n\pi}{2}\right) + Q_0\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)}{P_0\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right) - Q_0\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)} = \frac{P_1\sin\left(x_1-\frac{n\pi}{2}\right) + Q_1\cos\left(x_1-\frac{n\pi}{2}\right)}{P_1\cos\left(x_1-\frac{n\pi}{2}\right) - Q_1\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)},$$

wo mit P_0, Q_0 und P_1, Q_1 diejenigen Werte von P und Q bezeichnet werden, welche aus P, Q für $x = x_0$, x_1 hervorgehen. Aus den beiden Werten für B_n nimmt nun die Bestimmungsgleichung der Schwingungszahlen die Form an:

$$(23_3)\qquad \operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \frac{Q_0 P_1 - P_0 Q_1}{P_0 P_1 + Q_0 Q_1}.$$

Es ist die Aufgabe, diese Gleichung und den Wert für $R^n(x)$ zum Zwecke der Anwendung einfacher zu gestalten mit Rücksicht auf die Hauptglieder der Entwicklungen.

Noch sei bemerkt, dafs die Gleichung (23_3) den transcendenten Charakter für eine sehr dünne Kugelschale verliert. Sei $x_1 - x_0 = \delta$

so klein, dafs δ gegen x_0 und höhere Potenzen von δ gegen δ selbst vernachlässigt werden können, so kann man setzen

$$P_1 = P_0 + \left(\frac{dP}{dx}\right)_0 \delta, \quad Q_1 = Q_0 + \left(\frac{dQ}{dx}\right)_0 \delta,$$

und da der Grenzwert von $\frac{\operatorname{tg}\delta}{\delta}$ sich der Einheit nähert, so geht (23_3) über in die Gleichung:

$$Q_0 \left(\frac{dP}{dx}\right)_0 - P_0 \left(\frac{dQ}{dx}\right)_0 = P_0^2 + Q_0^2. \tag{24}$$

Diese Gleichung, die sich hier aus (23_2) direkt ergab, ist von Loschmidt auf anderem Wege (a. a. O. pag. 442) gewonnen. Loschmidt berechnet die Wurzeln derselben der Reihe nach für $n = 0, 1, 2, 3, 4$ [1]) und erhält die Werte $x_0^2 = -2, 0, 4, 10$ und schliefst daraus, dafs für ein beliebiges n sein mufs

$$x_0^2 = n(n+1) - 2. \tag{24a}$$

Dafs die Gleichung (24) nur die Wurzeln (24_a) haben kann, läfst sich zeigen, indem man auf die ursprüngliche Form (21_1) der Bedingungsgleichung zurückgeht.

Hat δ die vorige Bedeutung, so kann man setzen:

$$\left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dx}\right)_1 = \left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dx}\right)_0 + \left(\frac{d^2\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dx^2}\right)_0 \delta.$$

Daher hat man die gemeinsamen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\left(\frac{d\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dx}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dx^2}\right)_0 = 0 \tag{25}$$

zu suchen. Nun genügt $\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2} = Z$, wie aus (1) hervorgeht, der Gleichung

$$x^2 \frac{d^2Z}{dx^2} + 4x\frac{dZ}{dx} + (x^2 - n(n+1) + 2)Z = 0, \tag{25a}$$

welche für $x = x_0$ wegen (25) übergeht in

$$(x_0^2 - n(n+1) + 2) Z_0 = 0.$$

Z_0 kann nicht verschwinden, weil sonst aus (25_a) und (25) folgen würde, dafs auch die höheren Differentialquotienten von Z verschwinden müfsten. Da aber eine Funktion für einen gegebenen

---

1) Nach obiger Bemerkung ist 1 der kleinste zulässige Wert für n. Für kleinere Werte hat die Gleichung (24) imaginäre Wurzeln, so für $n = 0$ $x_0^2 = -1$.

Wert nicht mit allen ihren Differentialquotienten verschwinden kann, ohne für alle Werte der Variablen den Wert Null zu haben, so folgt, dafs die Gleichung (24_a) bestehen mufs.

In betreff der Knotenflächen, welche bei rein transversalen Schwingungen auftreten, verweise ich auf meine Arbeit im Journal für reine und angew. Math. LXXXVIII pag. 145.

Bevor wir dazu übergehen, die in der Einleitung erwähnten vereinfachenden Annahmen einzuführen, möge noch die (22) entsprechende Formel für die Vollkugel hingestellt werden. Da in (22) $B_n = 0$ zu setzen ist, so hat man für die Vollkugel

$$(26)\quad \mathfrak{R}^n(x) = \mathfrak{R}_1^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[Y_1^n(x) \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + Y_2^n(x) \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

mit der Bedingungsgleichung

$$(26_1)\qquad \operatorname{tg}\left(x_0 - \frac{n\pi}{2}\right) = \frac{Y_2^n(x_0)}{Y_1^n(x_0)}.$$

§ 5. Bei Einführung der angedeuteten Vereinfachungen hat man zwei Fälle zu unterscheiden [1]), je nachdem $\frac{mr}{\omega}$ einen sehr grofsen oder einen sehr kleinen Zahlenwert hat, d. h. je nachdem der Umfang des kugelförmigen Raumes mit der Entfernung der schwingenden Teilchen von dem Koordinaten-Anfangspunkte als Radius im Vergleich zu der Wellenlänge sehr grofs oder sehr klein ist. Im letzteren Falle z. B. werden die Formeln auf Lichtschwingungen innerhalb der Ätherhülle eines Moleküls oder Atoms oder innerhalb dieser selbst anwendbar sein. Schwingungen, welche innerhalb der Massenteilchen vor sich gehen, erscheinen jedenfalls für solche Massenteilchen möglich, welche als zusammengesetzte aufzufassen sind.

Die Hauptglieder in $Y_1^n(x)$ und $Y_2^n(x)$ sind für sehr grofse Werte von $\frac{mr}{\omega}$ aus (5), für sehr kleine aus (8_a) und (8_b) zu entnehmen.

I. $\frac{mr}{\omega_2}$ sei eine sehr grofse Zahl.

Man hat

$$Y_1^n(x) = a_0 - \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_4}{x^4} - \cdots$$

$$Y_2^n(x) = \frac{a_1}{x} - \frac{a_3}{x^3} + \frac{a_5}{x^5} - \cdots,$$

wo mit a_i die Konstanten in (5) bezeichnet werden. Ferner ist

1) Das Verhältnis der Dichtigkeiten der Ätherhülle und der Massenteilchen bleibt hier unberücksichtigt, da auf den Einfluſs, den die Massenteilchen auf die Schwingungen innerhalb der Ätherhüllen ausüben, nicht eingegangen werden kann. Doch gedenke ich die Arbeit in dieser Hinsicht demnächst fortzusetzen.

$$d\frac{Y_1^n(x)}{x^2} = -\frac{2a_0}{x^3} + \frac{4a_2}{x^5} - \frac{6a_4}{x^7} + \cdots$$

$$d\frac{Y_2^n(x)}{x^2} = -\frac{3a_1}{x^4} + \frac{5a_3}{x^6} - \frac{7a_5}{x^8} + \cdots$$

und nach (23), wenn wir uns auf die Glieder höchster Ordnung beschränken,

$$P = \frac{n(n+1)-4}{4x^3}, \quad Q = \frac{1}{x^2}.$$

Hierdurch geht die Gleichung (23_3) über in

$$\text{(27)} \qquad \operatorname{tg}(x_1 - x_0) = -2\frac{(n(n+1)-4)(x_1-x_0)}{(n(n+1)-4)^2 + 4x_0x_1}.$$

Ebenso erhält man aus (23_2)

$$B_n = -\frac{\cos\left(x_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}{\sin\left(x_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

und daher aus (22)

$$(27_1) \qquad \mathfrak{R}^n(x) = \frac{\cos(x-x_0)}{\sin\left(x_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}.$$

II. $\frac{mr}{\omega_2}$ sei eine sehr kleine Zahl.

Man kann bei Weglassung konstanter Faktoren für ein ungerades n setzen:

$$Y_1^n = \frac{1}{x^{n-1}} - \frac{2n-4}{3!}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{x^{n-3}} + \cdots,$$

$$Y_2^n = \frac{1}{x^n} - \frac{2n-2}{2!}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{x^{n-2}} + \cdots.$$

Hieraus folgt

$$d\frac{Y_1}{x^2} = -\frac{n-3}{x^{n-2}} + \frac{2n-4}{3!}\frac{n-5}{2n-1}\frac{1}{x^{n-4}} - \cdots,$$

$$d\frac{Y_2}{x^2} = -\frac{n-2}{x^{n-1}} + \frac{2n-2}{2!}\frac{n-4}{2n-1}\frac{1}{x^{n-3}} - \cdots,$$

und, wenn man sich wieder auf die Glieder höchster Ordnung beschränkt und P und Q bildet, so erhält man entsprechend (27) und (27_1):

$$\text{(28)} \qquad \mathfrak{R}^n(x) = -\frac{\sin(x-x_0)}{x^n \sin\left(x_0 - \frac{n\pi}{2}\right)}$$

$$(28_1) \qquad \operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \frac{x_1 - x_0}{1 + x_0x_1}.$$

Für ein gerades n ergiebt sich bis auf einen konstanten Faktor das gleiche Resultat.

Die Gleichungen (27) und (28) zur Bestimmung der Schwingungszahlen lassen sich einfacher schreiben, da in (27) $x_0 x_1$ gegen $x_1 - x_0$ sehr grofs, in (28_1) $x_0 x_1$ gegen 1 sehr klein ist. Wir haben daher das Resultat:

Werden transversale Schwingungen in einem von konzentrischen Kugelflächen begrenzten Medium erregt, so verlaufen dieselben stets so, als wenn sie ihren Quellenpunkt in dem Mittelpunkte der Kugel hätten, und zwar werden ihre Komponenten, wenn die Umfänge der Grenzflächen gegen die Wellenlängen sehr grofs sind, dargestellt durch

$$(30_1)\qquad \begin{aligned} u &= 0, \quad v = \frac{\cos \frac{m}{\omega_2}(r - r_0)}{r} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dS^n}{d\varphi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \\ w &= -\frac{\cos \frac{m}{\omega_2}(r - r_0)}{r} \frac{dS^n}{d\varphi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt \end{aligned}$$

mit der Bestimmungsgleichung für die Schwingungszahlen

$$(30_2)\qquad \operatorname{tg} \frac{m}{\omega_2}(r_1 - r_0) = 0.$$

Sind dagegen die Umfänge der Grenzflächen gegen die Wellenlängen sehr klein, so sind die Schwingungskomponenten und -zahlen gegeben durch

$$(30_3)\qquad \begin{aligned} u &= 0, \quad v = \frac{\sin \frac{m}{\omega_2}(r - r_0)}{r^{n+1}} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{dS^n}{d\psi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \\ w &= -\frac{\sin \frac{m}{\omega_2}(r - r_0)}{r^{n+1}} \frac{dS^n}{d\varphi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \end{aligned}$$

$$(30_4)\qquad \operatorname{tg} \frac{m}{\omega_2}(r_1 - r_0) = \frac{m}{\omega_2}(r_1 - r_0).$$

In (30_1) und (30_3) konnten die konstanten Faktoren, welche in den Nennern von (27_1) und (28) auftreten, der noch durch die Anfangsbedingungen zu bestimmenden Konstanten wegen weggelassen werden. Für n sind die Zahlen 1, 2, 3 $\cdots$ zu setzen. Für die Vollkugel ergeben sich ähnliche Resultate.

Wendet man (30_1) auf Lichtschwingungen an, so ergiebt sich, dafs die Lichtintensität umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom leuchtenden Punkte ist, ein Resultat, das bis jetzt aus den Elasticitätsgleichungen nicht allgemein abgeleitet ist (cf. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Optik pag. 15).

Koexistierende longitudinale und transversale Schwingungen.

§ 6. Die Komponenten einer Verrückung sind gegeben durch

$$(31)\quad \begin{cases} u = \left\{ -\frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{d\frac{R^n}{r}}{dr} + \frac{\mathfrak{R}^n}{r} \right\} S^n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \\ v = \left\{ -\frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{R^n}{r^2} + \frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{r}\frac{dR^n}{dr} \right\} \frac{dS^n}{d\varphi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt, \\ w = \left\{ -\frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{R^n}{r^2} + \frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{R}^n}{dr} \right\} \frac{1}{c}\frac{dS^n}{d\varphi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt \text{ [1]}), \end{cases}$$

wo R^n und $\mathfrak{R}^n$ der Gleichung (1) genügen, wenn m durch $\frac{m}{\omega_1}$ resp. $\frac{m}{\omega_2}$ ersetzt wird, mit den Bedingungsgleichungen:

$$(31_1)\quad \left.\begin{cases} 0 = \varepsilon\frac{R^n}{r} - \frac{\omega_1^2}{m^2}\frac{d^2\frac{R^n}{r}}{dr^2} + \frac{d\frac{\mathfrak{R}^n}{x^2}}{dr}, \\ 0 = -\frac{\omega_1^2}{m^2}\left(\frac{d\frac{R^n}{r}}{dr} + r^2\frac{d}{dr}\frac{R^n}{r^3}\right) + \frac{\mathfrak{R}^n}{r^2} + \frac{r^2}{n(n+1)}\frac{d}{dr}\frac{1}{r^2}\frac{d\mathfrak{R}^n}{dr} \end{cases}\right\} \text{für } r = r_0 \text{ und } r = r_1.$$

Für R^n und $\mathfrak{R}^n$ hat man zu setzen:

$$(31_2)\quad \begin{cases} R^n = R_1^n - B_n R_2^n, \\ \mathfrak{R}^n = \mathfrak{A}_n \mathfrak{R}_1^n - \mathfrak{B}_n \mathfrak{R}_2^n. \end{cases}$$

Aus (31_1) geht für m durch Elimination der Konstanten B_n, $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$ eine transcendente Gleichung in sehr komplicierter Form (cf. Loschmidt a. a. O.) hervor. Doch läfst sich dieselbe, wie ich demnächst zeigen werde, durch eine eigentümliche Symmetrie ihrer Glieder übersichtlich und der transcendenten Gleichung (20_2) entsprechend gestalten. Hier beschränke ich mich auf eine dünne Kugelschale, für welche die Realität der Wurzeln m leicht zu erweisen ist.

Zunächst gehen die Gleichungen (31_1) mit Rücksicht auf die Bestimmungsgleichungen für R^n und $\mathfrak{R}^n$ über in:

$$(32)\quad \begin{cases} 0 = \left[(\varepsilon+1)\frac{m^2}{\omega_1^2}r^2 - n(n+1) - 2\right]R + 2r\frac{dR}{dr} + \frac{m^2}{\omega_1^2}\left(r\frac{d\mathfrak{R}}{dr} - 2\mathfrak{R}\right), \\ 0 = -2n(n+1)\left(r\frac{dR}{dr} - 2R\right) + \frac{m^2}{\omega_1^2}\left(2n(n+1) - \frac{m^2}{\omega_2^2}r^2\right)\mathfrak{R} - 2\frac{m^2}{\omega_1^2}r\frac{d\mathfrak{R}}{dr}. \end{cases}$$

Bezeichnet man nun die rechten Seiten dieser Gleichungen mit $F_1(r)$, $F_2(r)$, so sollen die Gleichungen $F_1(r_0) = 0$, $F_1(r_1) = 0$, $F_2(r_0) = 0$, $F_2(r_1) = 0$ bestehen. Nun kann man setzen:

1) Journal für reine und angewandte Math. LXXXVIII pag. 145.

$$F_1(r_1) = F_1(r_0) + \left(\frac{dF_1(r)}{dr}\right)_0 \delta\,,$$

$$F_2(r_1) = F_2(r_0) + \left(\frac{dF_2(r)}{dr}\right)_0 \delta\,,$$

da höhere Potenzen von δ vernachlässigt werden können. Daher müssen die Gleichungen bestehen:

$$(33)\qquad \begin{cases} F_1(r_0) = 0\,, & \left(\frac{dF_1(r)}{dr}\right)_0 = 0 \\ F_2(r_0) = 0\,, & \left(\frac{dF_2(r)}{dr}\right)_0 = 0\,. \end{cases}$$

Man erhält durch Differentiation der rechten Seiten der Gleichungen (32) nach r mit Rücksicht auf die Gleichungen, denen R^n und $\mathfrak{R}^n$ genügen:

$$\frac{dF_1(r)}{dr} = \left(2r\frac{m^2}{\omega_1^2}r + \frac{2n(n+1)}{r}\right)R$$

$$+\left[(r+1)\frac{m^2}{\omega_1^2} - n(n+1)\right]\frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{\omega_1^2}\left[\frac{m^2}{\omega_2^2}r - \frac{n(n+1)}{r}\right]\mathfrak{R} - \frac{m^2}{\omega_1^2}\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\,,$$

$$\frac{dF_2(r)}{dr} = 2n(n+1)\left[\frac{m^2}{\omega_1^2}r - \frac{n(n+1)}{r}\right]R$$

$$+2n(n+1)\frac{dR}{dr} - 2\frac{m^2}{\omega_1^2}\frac{n(n+1)}{r}\mathfrak{R} + \frac{m^2}{\omega_1^2}\left(2n(n+1) - 2 - \frac{m^2}{\omega_2^2}r^2\right)\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\,;$$

und setzt man nun zur Abkürzung

$$(34)\qquad \frac{m^2}{\omega_1^2}r_0^2 = l_1\,,\quad \frac{m^2}{\omega_2^2}r_0^2 = l_2\,,\quad n(n+1) = \nu\,,\quad \frac{m^2}{\omega_1^2} = p\,,$$

und berücksichtigt, dafs die Beziehung besteht

$$(34_1)\qquad \varepsilon = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_2^2}\,,$$

so nehmen die Bedingungsgleichungen (33) folgende Form an:

$$(35)\qquad \begin{cases} \left(\frac{l_2}{2} - \nu - 2\right)R_0 + 2r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 - 2p\mathfrak{R}_0 + pr_0\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0\,, \\ 4\nu R_0 - 2\nu r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 + (2\nu - l_2)p\mathfrak{R}_0 - 2pr_0\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0\,, \\ (l_2 - 2l_1 + 2\nu)R_0 + \left(\frac{l_2}{2} - \nu\right)r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 + (\nu - l_2)p\mathfrak{R}_0 - pr_0\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0\,, \\ (2\nu l_1 - 2\nu^2)R_0 + 2\nu r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 - 2p\nu\mathfrak{R}_0 + (2\nu - l_2 - 2)p\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0\,. \end{cases}$$

Damit diese 4 Gleichungen bestehen, müssen entweder die Gröfsen R_0, $\left(\frac{dR}{dr}\right)_0$, $\mathfrak{R}_0$ und $\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0$ oder die Determinante des Systems der

Gleichungen verschwinden. Das Erstere ist unmöglich, da sonst der Differentialgleichungen wegen, denen R und $\mathfrak{R}$ genügen, auch alle höheren Differentialquotienten R und $\mathfrak{R}$ für $r = r_0$ verschwinden müfsten. Die Determinante enthält als Unbekannte nur m. Somit werden die Schwingungszahlen durch eine algebraische Gleichung bestimmt. Es ist zu beweisen, dafs dieselbe reelle Wurzeln hat.

Aus der ersten und vierten Gleichung (35) bildet man die Gleichung

$$(35_1)\quad \nu\left(\frac{l_2}{2} - 2l_1 + \nu - 2\right) R_0 + (l_2 - \nu + 2)\, p r_0 \left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0,$$

und aus der ersten, zweiten und dritten nach Multiplikation mit den Faktoren 1, σ, τ die weitere Gleichung

$$(35_2)\left[\frac{l_2}{2} - \nu - 2 + 4\nu\sigma + (l_2 + 2l_1 + 2\nu)\tau\right] R_0 + (1 - 2\sigma - \tau) p r_0 \left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0,$$

wenn σ und τ so bestimmt werden, dafs die Gleichungen bestehen

$$0 = 2 - 2\nu\sigma + \left(\frac{l_2}{2} - \nu\right)\tau,$$

$$0 = -2 + (2\nu - l_2)\sigma + (\nu - l_2)\tau.$$

Es ergiebt sich $\sigma = \frac{2}{l_2}$, $\tau = -\frac{4}{l_2}$ und die Gleichung (35_2) geht über in

$$(35_3)\qquad \left(\frac{l_2}{2} - \nu - 6 + 8\varpi\right) R_0 + p r_0 \left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0 = 0,$$

wo ϖ das Verhältnis der Quadrate der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der transversalen und longitudinalen Wellen bezeichnet, also

$$(36)\qquad \varpi = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}.$$

Nun können R_0 und $\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dr}\right)_0$ nicht gleichzeitig $= 0$ sein, da sonst aus der zweiten und dritten Gleichung (35) $\mathfrak{R}_0 = 0$ und dann aus einer der übrigen auch $\left(\frac{dR}{dr}\right)_0 = 0$ folgen würde, was vorhin als unmöglich bewiesen wurde. Daher mufs auch die Determinante der Gleichungen (35_1) und (35_3) verschwinden, und somit, wenn l_2 und ν nach (34) ersetzt werden, folgende Gleichung für m bestehen:

$$(37)\qquad \frac{m^4 r_0^4}{\omega_2^4} - \frac{m^2 r_0^2}{\omega_2^2}\left[4n(n+1) + \varpi(16 + 4n(n+1))\right] + (12 - 16\varpi)(n(n+1) - 2) = 0.$$

Dafs diese Gleichung für m reelle Werte liefert, ist leicht bei Ausrechnung der Diskriminante zu ersehen.

Es ist nur noch zu zeigen, dafs die Wurzeln der Gleichung (37) die einzig möglichen Werte für m ergeben, welche die Determinante der Gleichungen (35) verschwinden lassen.

Setzt man den sich aus (35_3) für $pr_0\left(\frac{d\Re}{dr}\right)_0$ ergebenden Wert in die Gleichungen (35) ein, so wird die vierte Gleichung mit der dritten identisch. Es ergeben sich die Gleichungen:

$$(39)\quad \begin{cases} (4-8\varpi)R_0+2r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0-2p\Re_0=0, \\ (l_2+2\nu+16-12)R_0-2\nu r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0+(2\nu-l_2)p\Re_0=0, \\ \left(\frac{3l_2}{2}-2l_1+\nu-6+8\varpi\right)R_0+\left(\frac{l_2}{2}-\nu\right)\left(\frac{dR}{dr}\right)_0+(\nu-l_2)p\Re_0=0, \end{cases}$$

deren Determinante verschwindet, wie sich durch Ausrechnung der Unterdeterminanten z. B. der Glieder der ersten Horizontalreihe leicht zeigen läfst. Diesen Unterdeterminanten sind R_0, $r_0\left(\frac{dR}{dr}\right)_0$, $p\Re_0$ proportional zu setzen; sie sind

$$(40)\quad \begin{cases} D_1=\frac{l_2^2}{2}, \\ D_2=-\frac{l_2^2}{2}+(3l_2-4l_1)(\nu-2)+2l_1l_2 \\ D_3=\frac{l_2^2}{2}+(3l_2-4l_1)(\nu-2). \end{cases}$$

Aus dem Zusammenbestehen der Gleichungen (39) und (35_3) folgt, dafs die Wurzeln m der Gleichung (37) die einzig möglichen sind.

Bezeichnet C eine Konstante und ersetzt man R und $\Re$ nach (31_2), so erhalten die noch zu erfüllenden Gleichungen (39) und (35_3) die Form

$$(R_1)_0-B(R_2)_0=CD_1,$$

$$r_0\left(\frac{dR_1}{dr}\right)_0-Br_0\left(\frac{dR_2}{dr}\right)_0=CD_2,$$

$$p\mathfrak{A}(\Re_1)_0-p\mathfrak{B}(\Re_2)_0=CD_3,$$

$$pr_0\mathfrak{A}\left(\frac{d\Re_1}{dr}\right)_0+pr_0\mathfrak{B}\left(\frac{d\Re_2}{dr}\right)_0=\left(\frac{l_2}{2}-\nu-6+8\varpi\right)CD_1$$

und dienen zur Bestimmung der 4 Konstanten B, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, deren Werte sich unter Anwendung der ersten Beziehung (9_1) einfach gestalten. D_1, D_2, D_3, ϖ, l_2, ν sind aus (40), (36) und (34) zu ent-

nehmen. Die Schwingungszahlen ergeben sich für den kleinsten und darum wichtigsten Wert 1 für n aus der einfachen Beziehung

$$\frac{m^2 r_0^2}{\omega_2^2} = 8(1 + \varpi).$$

Die Berücksichtigung sehr grofser resp. sehr kleiner Werte für die Verhältnisse der Umfänge der Grenzkugeln zu der Wellenlänge für Schwingungen des dritten Zustandes, welche zu einigen interessanten Resultaten führt, behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

Zur Bestimmung des nur von den Konstanten des algebraischen Gebildes abhängigen Teiles der hyperelliptischen ϑ-Funktionen.

Von J. Schröder in Hamburg.

Bei einer früheren Gelegenheit[1]) hatte ich darauf hingewiesen, dafs die Konstanten $C_{\varphi\psi}^{(\mu>1)}$, welche den Zusammenhang zwischen den hyperelliptischen σ- und ϑ-Funktionen vermitteln, anstatt durch Betrachtung von ϑ-Quotienten auch durch Integration einer gewissen Differentialgleichung gewonnen werden können. Für den Fall $p = 1$, $\mu = 1$ war dies bereits ausgeführt,[2]) während der Fall $p > 1$, $\mu > 0$ noch unerörtert blieb. Auf diese letztere Aufgabe möchte ich nun jetzt insofern zurückkommen, als ich nach Entwicklung einiger Formeln, welche das zweite Glied der zu $\mu = 1$ gehörigen σ-Reihe betreffen, die bewufste Differentialgleichung, der alle $C_{\varphi\psi}$ genügen, allgemein angeben und dann dieselbe zunächst für $p = 2$, $\mu = 1$ integrieren will.

I. Das zweite Glied der Potenzentwicklung der einfach verschwindenden σ-Funktionen für kleine Werte der Argumente.

Ist $\sigma(w)$ eine zu $\mu = 1$ und übrigens zu beliebigem p gehörige σ-Funktion, so läfst dieselbe eine Potenzentwicklung zu, welche mit einem Terme erster Dimension in den w beginnt, auf welchen dann successive Terme dritter, fünfter ... Ordnung folgen,[3]) so dafs man

$$(1) \qquad \sigma(w) = \Gamma_1(w) + \Gamma_3(w) + \Gamma_5(w) + \cdots\cdots$$

---

1) S. d. Dissertation d. Verf. („Über den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Funktionen", Göttingen 1890), pag. 26 und 78.

2) Ebendort p. 78 und 79.

3) Vgl. z. B. ebendort p. 11.

setzen kann. Trägt man nun für die Argumente w beiderseits beliebig kleine Werte ein, die sich beispielsweise dadurch ergeben, dafs die oberen und unteren Grenzpunkte der Integrale w konsekutiv werden, so wird $\Gamma_1(w)$ in erster Annäherung gleich einem Ausdrucke erster Ordnung in Bezug auf das Inkrement dy sein und aufserdem aber noch ein Glied zweiter Ordnung, eins dritter Ordnung u. s. w. ergeben. Ganz entsprechend ergiebt bei der angedeuteten Substitution $\Gamma_3(w)$ zunächst einen Beitrag dritter Ordnung und dazu noch Aggregate vierter, fünfter . . . Dimension. Durch Zusammenfassung der Aggregate gleicher Ordnung nimmt dann die Potenzentwicklung des σ für unendlich kleine Argumentwerte die folgende Form an:

$$\sigma(dy) = L_1(dy) + L_2(dy) + L_3(dy) + \cdots\cdots\cdots \tag{2}$$

Aus dieser Entwicklung dürfte man nun umgekehrt nicht schliefsen, dafs die ursprüngliche, für endliche Werte der Argumente geschriebene σ-Reihe ein Glied zweiter Ordnung enthält, und ebensowenig ist das mit $L_3(dy)$ bezeichnete Glied der Reihe (2) das für unendlich kleine Argumentwerte geschriebene Glied $\Gamma_3(w)$ der Reihe (1); vielmehr ist in $L_3(dy)$ neben dem aus Γ_3 stammenden Aggregate dritter Ordnung noch der aus Γ_1 herkommende Teil dritter Ordnung enthalten. Kommt es einem also nur auf den aus Γ_3 herrührenden Bestandteil dritter Ordnung in dy an, so hat man von dem Terme $L_3(dy)$ erst noch den aus Γ_1 stammenden Beitrag dritter Ordnung zu subtrahieren.

Es sei nun:

$$\Gamma_1(w) = \sum_1^p a_i w_i = -\sum_1^p a_i \int_y^x \frac{z^{p-i}\,dz}{\sqrt{f(z)}},$$

oder:

$$\Gamma_1(w) = -\int_y^x \left(\sum_1^p \frac{a_i z^{p-i}}{\sqrt{f(z)}} \right) dz. \tag{3}$$

Hierfür sei der Kürze halber:

$$\Gamma_1(w) = -\int_y^x \Phi(z)\,dz$$

geschrieben.

Die Funktion $\Phi(z)$ hat nun in der Umgebung der Stelle $z = y$ eine Entwicklung folgender Art:

$$\Phi(z) = \Phi(y) + (z-y)\,\Phi'(y) + (z-y)^2 \frac{\Phi''(y)}{2!} + \cdots\cdots \tag{4}$$

Folglich ist:

$$\Gamma_1(w) = -\left\{\Phi(y) + \Phi'(y)\cdot\tfrac{1}{2!}(z-y)_y^x + \Phi''(y)\tfrac{1}{3!}\left[(z-y)^2\right]_y^x + \cdots\right\}(z-y)_y^x,$$

oder:

$$\Gamma_1(w) = -\left\{\Phi(y) + \tfrac{1}{2!}\Phi'(y)\cdot(x-y) + \tfrac{1}{3!}\Phi''(y)(x-y)^2 + \cdots\right\}(x-y).$$

Für $x = y + dy$ endlich wird hieraus:

$$(5)\quad \Gamma_1(w) = -dy\cdot\left\{\Phi(y) + \tfrac{1}{2!}\Phi'(y)dy + \tfrac{1}{3!}\Phi''(y)dy^2 + \cdots\right\}.$$

Diese Gleichung zeigt deutlich, daſs man behufs Gewinnung des Bestandteiles dritter Ordnung, der aus $\Gamma_1(w)$ herstammt, die zweite Ableitung von $\Phi(y)$ zu bilden und dann mit $\left(-\frac{1}{6}\cdot dy^3\right)$ zu multiplizieren hat.

Wir gehen nunmehr dazu über, die Reihenentwicklung des σ für unendlich kleine Argumentwerte aus der von Herrn Klein entwickelten Definition herzuleiten. Es ist dabei unter der Voraussetzung, daſs für die Zahl ν der kleinste hier zulässige Wert $\nu = \mu = 1$ gewählt wird,

$$\sigma(x, y) = -\Omega(x, y)\cdot\sqrt{\varphi(x)}\cdot\sqrt{\varphi(y)}$$

oder, wenn man für $\Omega(x, y)$ seinen Wert einträgt:[1])

$$\sigma(x, y) = -(x-y)\frac{\sqrt[4]{\varphi(x)}\sqrt[4]{\varphi(y)}}{\sqrt[4]{f(x)}\sqrt[4]{f(y)}}\cdot e^{\frac{1}{2}\int_y^{\bar{x}}\int_y^{x}\frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}+F(z z')}{2(z-z')^2}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\frac{dz'}{\sqrt{f(z')}}}.$$

Setzt man: $x = y + dy$, so erhält man:

$$\sigma(y+dy, y) = -dy\frac{\sqrt[4]{\varphi(y+dy)}\sqrt[4]{\varphi(y)}}{\sqrt[4]{\psi(y+dy)}\sqrt[4]{\psi(y)}}\cdot e^{\frac{1}{2}[J]_{dy}}.$$

Die rechte Seite ist nach steigenden Potenzen von dy zu entwickeln; das geschieht mit Hülfe der Gleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \sqrt[4]{\varphi(y+dy)} = \sqrt[4]{\varphi}\left\{1 + \frac{\varphi'}{4\varphi}dy + \frac{1}{8\varphi}\left(\varphi'' - \frac{3}{4}\frac{\varphi'^2}{\varphi}\right)dy^2 + \cdots\cdots\right\} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{\psi(y+dy)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\psi}}\left\{1 - \frac{\psi'}{4\psi}dy + \frac{1}{8\psi}\left(\frac{5}{4}\frac{\psi'^2}{\psi} - \psi''\right)dy^2 + \cdots\cdots\right\} \\ e^{\frac{1}{2}J} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\frac{H(y)}{f^2(y)}dy^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$ [2])

1) Vgl. z. B. Diss. d. Verf. p. 9.

2) S. Mitteilungen d. mathematischen Gesellschaft in Hamburg, Bd. III. Heft 1. p. 10 Glg. (10).

Mit Benutzung dieser Entwicklungen wird:

$$(7)\quad \sigma(y+dy,y) = -dy\cdot\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\psi}}\left\{1+\tfrac{1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{\psi'}{\psi}\right)dy+\left(\tfrac{5}{32}\frac{\psi'^2}{\psi^2}-\tfrac{3}{32}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}-\tfrac{1}{8}\frac{\psi''}{\psi}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\tfrac{1}{8}\frac{\varphi''}{\varphi}-\tfrac{1}{16}\frac{\varphi'\psi'}{\varphi\psi}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\frac{H}{\varphi^2\psi^2}\right)dy^2+\cdots\right\}.$$

Hieraus entnehmen wir, dafs das Anfangsglied Γ_1 der Potenzentwicklung des σ für unendlich kleine Argumentwerte den Wert:

$$(8)\qquad L_1(dy) = -\sqrt{\frac{\varphi(y)}{\psi(y)}}\cdot dy = -\frac{\varphi(y)}{\sqrt{f(y)}}\,dy$$

hat.

Durch Differentation ergiebt sich sodann:

$$(9)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d}{dy}\left(\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}\right)dy^2 = -\tfrac{1}{4}\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\psi}}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}-\frac{\psi'}{\psi}\right)dy^2$$

und:

$$(10)\qquad \tfrac{1}{3!}\frac{d^2}{dy^2}\left(\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}\right)dy^3 = -\tfrac{1}{24}\frac{\sqrt{\varphi}}{\sqrt{\psi}}\left\{2\frac{\varphi''}{\varphi}-\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}-2\frac{\psi''}{\psi}+3\frac{\psi'^2}{\psi^2}-2\frac{\varphi'\psi'}{\varphi\psi}\right\}dy^3.$$

Der unter (9) angeführte Ausdruck stimmt genau überein mit dem Gliede zweiter Ordnung der Entwicklung (7); der unter (10) angeführte Ausdruck aber ist gerade der von dem Gliede dritter Ordnung der Entwicklung (7) abzuziehende Betrag. Diese Subtraktion ergiebt nun als dasjenige Aggregat dritter Ordnung in dy, welches aus Γ_3 herstammt, folgendes:

$$(11)\qquad L_3(dy)$$
$$= -\sqrt{\frac{\varphi}{\psi}}\left\{\tfrac{1}{32}\frac{\psi'^2}{\psi^2}-\tfrac{5}{96}\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}-\tfrac{1}{24}\frac{\psi''}{\psi}+\tfrac{1}{24}\frac{\varphi''}{\varphi}+\tfrac{1}{48}\frac{\varphi'\psi'}{\varphi\psi}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\frac{H}{\varphi^2\psi^2}\right\}dy^3.$$

Es erübrigt noch, die Hessesche Form H von f durch die Teilformen φ und ψ, sowie deren erste und zweite Ableitungen auszudrücken. Das geschieht durch die Relation:

$$H = -\frac{1}{(2p+2)^2}f'^2+\frac{1}{2(p+1)(2p+1)}f''f,$$

aus welcher

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\frac{H}{\varphi^2\psi^2} = -\tfrac{1}{32}\frac{f'^2}{\varphi^2\psi^2}+\frac{p+1}{16(2p+1)}\frac{f''}{\varphi\psi}$$

folgt. Die Ableitungen f' und f'' werden schliefslich noch ersetzt durch die Werte:

$$\varphi\psi'+\psi\varphi' \text{ resp. } \varphi\psi''+2\varphi'\psi'+\varphi''\psi.$$

Dann wird:

$$(12)\quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 \frac{H}{\varphi^2\psi^2} = -\tfrac{1}{32}\left(\frac{\psi'^2}{\psi^2}+\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right)+\frac{p+1}{16(2p+1)}\left(\frac{\psi''}{\psi}+\frac{\varphi''}{\varphi}\right)$$
$$+\frac{1}{16(2p+1)}\frac{\varphi'\psi'}{\varphi\psi}.$$

Die Substitution dieses Wertes in (11) liefert:

$$(13)\qquad L_3(dy)$$
$$= -\tfrac{1}{12}\cdot\frac{dy^3}{f\sqrt{f}}\left\{-\frac{p-1}{4(2p+1)}\psi''\varphi^2+\frac{p+2}{2(2p+1)}\psi'\varphi'\varphi+\varphi''\psi\varphi-\varphi'^2\psi\right\}.$$

Die Eintragung der unendlich kleinen Argumentwerte in die einzelnen Terme der Potenzentwicklung des σ beruhte nun bekanntlich darauf, dafs in erster Annäherung für

$$w_\alpha \text{ der Wert } -\frac{y^{p-\alpha}}{\sqrt{f(y)}}dy$$

substituiert wird. Da aber jeder Term der Potenzentwicklung homogen in den w ist, so tritt dabei beispielsweise bei Γ_3 der Faktor $\left(-\frac{dy^3}{f\sqrt{f}}\right)$ in jedem einzelnen Summanden auf. Wird von diesem gemeinsamen Faktor abgesehen, so läuft die gedachte Substitution darauf hinaus, dafs man für

$$w_1 \text{ überall } y^{p-1},\quad \text{für } w_2 \ldots y^{p-2},\quad \ldots \text{für } w_p \ldots y^0$$

einsetzt.

Daraus folgt dann weiter, dafs:

$$(14)\quad \Gamma_3(y^{p-1},\ y^{p-2},\ \ldots,\ y^0) = \tfrac{1}{12}\left\{-\frac{p-1}{4(2p+1)}\psi''(y)\varphi^2(y)\right.$$
$$\left.+\frac{p+2}{2(2p+1)}\psi'(y)\varphi'(y)\varphi(y)+\varphi''(y)\psi(y)\varphi(y)-\varphi'^2(y)\psi(y)\right\}$$

ist.

Wird insbesondere für y eine Nullstelle von φ gewählt, so wird:

$$(15)\quad \Gamma_3(k_\varphi^{p-1},\ k_\varphi^{p-2},\ \ldots,\ k_\varphi) = -\tfrac{1}{12}\varphi'^2(k_\varphi)\cdot\psi(k_\varphi),$$

während im anderen Falle, wenn y in eine Nullstelle von ψ rückt:

$$(16)\qquad \Gamma_3(k_\psi^{p-1},\ k_\psi^{p-2},\ \ldots k_\psi^0)$$
$$=\frac{\varphi(k_\psi)}{48(2p+1)}\{-(p-1)\psi''(k_\psi)+2(p+2)\psi'(k_\psi)\varphi'(k_\psi)\}$$

wird.

Nehmen wir noch speziell den Fall $p = 2$, in welchem die Partialform φ eine Linearform ist, welche wir immer in der Form: $\varphi = y - k_\varphi$ voraussetzen können, so wird dort:

$$(17)\quad \begin{cases} \Gamma_3(y,\,1) = \frac{1}{12}\{-\frac{1}{20}\psi''(y)\varphi^2(y) + \frac{2}{5}\psi'(y)\varphi(y) - \psi(y)\} \\ \Gamma_3(k_\varphi,\,1) = -\frac{1}{12}\psi(k_\varphi) \\ \Gamma_3(k_\psi,\,1) = \frac{1}{12}(k_\psi - k_\varphi)\{-\frac{1}{20}\psi''(k_\psi)(k_\psi - k_\varphi) + \frac{2}{5}\psi'(k_\psi)\} \end{cases}$$

Nun aber kann man leicht zeigen, dafs die zweite nach z genommene Polare der Form fünften Grades ψ_y für $z = k_\varphi$ geradezu den Wert hat:

$$(18)\qquad \psi^2_{k_\varphi}\psi^3_y = \psi(y) - \tfrac{2}{5}(y - k_\varphi)\psi'(y) + \tfrac{1}{20}(y - k_\varphi)^2\psi''(y)\,.$$

Daraus folgt, dafs die Gleichungen (17) in der folgenden einfachen Form geschrieben werden können:

$$(19)\qquad \Gamma_3(y,\,1) = -\tfrac{1}{12}\psi^2_{k_\varphi}\psi^3_y;$$

$$\Gamma_3(k_\varphi,\,1) = -\tfrac{1}{12}\psi_{k_\varphi};\qquad \Gamma_3(k_\psi,\,1) = -\tfrac{1}{12}\psi^2_{k_\varphi}\psi^3_{k_\psi}\,.$$

Hiermit brechen wir diese Entwicklung ab, um im nächsten Abschnitt die Aufstellung der Differentialgleichung des $C_{\varphi\psi}$ zu liefern, bei deren Integration wir dann auf die letztangegebenen Resultate zurückkommen müssen.

II. Die Differentialgleichung der $C_{\varphi\psi}$.

Bei gegebener Zerschneidung der Riemannschen Fläche lautet die Beziehung zwischen einer beliebigen σ-Funktion und der zu ihr gehörigen ϑ-Funktion:[1])

$$\vartheta(v) = C_{\varphi\psi}\cdot e^{G_2(w)}\cdot\sigma_{\varphi\psi}(w)$$

oder:

$$(20)\quad \vartheta(v) = C_{\varphi\psi}\{\Gamma_\mu(w) + (G_2(w)\Gamma_\mu(w) + \Gamma_{\mu+2}(w)) + \cdots\}\,,$$

wenn wir unter $\Gamma_\mu(w)$ und $\Gamma_{\mu+2}(w)$ die ersten beiden Aggregate der Potenzentwicklung des σ verstehen.

Andererseits aber können wir auch die Entwicklung der ϑ-Funktion nach dem Taylorschen Satze vornehmen; dann ergiebt sich:

$$(21)\quad \begin{cases} \vartheta(v) = \frac{1}{\mu!}\left\{\left(\frac{\partial^\mu\vartheta}{\partial v_1^\mu}\right)_0 v_1^\mu + \mu\left(\frac{\partial^\mu\vartheta}{\partial v_1^{\mu-2}\partial v_2}\right)_0 v_1^{\mu-1}v_2 + \cdots + \left(\frac{\partial^\mu\vartheta}{\partial v_p^\mu}\right)_0 v_p^\mu\right\} \\ \qquad + \frac{1}{(\mu+2)!}\left\{\left(\frac{\partial^{\mu+2}\vartheta}{\partial v_1^{\mu+2}}\right)_0 v_1^{\mu+2}\right. \\ \left. + (\mu+2)\left(\frac{\partial^{\mu+2}\vartheta}{\partial v_1^{\mu+1}\partial v_2}\right)_0 v_1^{\mu+1}v_2 + \cdots + \left(\frac{\partial^{\mu+2}\vartheta}{\partial v_p^{\mu+2}}\right)_0 v_p^{\mu+2}\right\} + \cdots \end{cases}$$

1) Vgl. z. B. Diss. d. Verf. pag. 15.

Das zweite Glied der rechten Seite, d. h. das gesamte Aggregat $(\mu+2)^{\text{ter}}$ Dimension, läfst sich nun mit Hilfe der bekannten Riemann'schen Differentialgleichungen der ϑ-Funktionen:

$$\frac{\partial^2\vartheta(v)}{\partial v_\varrho^2} = 4\pi i\frac{\partial\vartheta(v)}{\partial\tau_{\varrho\varrho}};\quad \frac{\partial^2\vartheta(v)}{\partial v_\varrho\partial v_{\varrho'}} = 2\pi i\frac{\partial\vartheta(v)}{\partial\tau_{\varrho\varrho'}}$$

in eine einfachere Gestalt bringen, wenn man die Nullwerte der $(\mu+2)^{\text{ten}}$ Ableitungen des $\vartheta(v)$ auf die nach den Moduln τ_{ik} genommenen Ableitungen der Nullwerte der μ^{ten} Ableitungen des ϑ zurückführt.

Um Weitläufigkeiten in der Darstellung zu vermeiden, wollen wir das Verfahren an dem besonderen Falle $p=2$, $\mu=1$ illustrieren. Dort ist:

$$\vartheta(v) = \left\{\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0 v_2\right\} \tag{22}$$
$$+\frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1^3}\right)_0 v_1^3 + 3\left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1^2\partial v_2}\right)_0 v_1^2 v_2 + 3\left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1\partial v_2^2}\right)_0 v_1 v_2^2 + \left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_2^3}\right)_0 v_2^3\right\} + \cdots$$

Hierbei ist offenbar:

$$\text{a)}\quad \left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1^3}\right)_0 = \left[\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v_1^2}\right)\right]_0 = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau_{11}}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0$$

$$\text{b)}\quad 3\left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1^2\partial v_2}\right)_0 = 2\left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1^2\partial v_2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1^2\partial v_2}\right)_0$$
$$= 4\pi i\left\{\frac{\partial}{\partial\tau_{12}}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial\tau_{11}}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0\right\} \tag{23}$$

$$\text{c)}\quad 3\left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_1\partial v_2^2}\right)_0 = 4\pi i\left\{\frac{\partial}{\partial\tau_{22}}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0 + \frac{\partial}{\partial\tau_{12}}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0\right\}$$

$$\text{d)}\quad \left(\frac{\partial^3\vartheta}{\partial v_2^3}\right)_0 = 4\pi i\frac{\partial}{\partial\tau_{22}}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0.$$

Setzt man diese Werte für die Nullwerte der dritten Differentialquotienten in das zweite Glied der rechten Seite von (22) ein, so erhält dasselbe folgende Gestalt:

$$T_3(v) = \frac{4\pi i}{3!}\left\{v_1^2\frac{\partial}{\partial\tau_{11}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0 v_2\right] + v_1 v_2\frac{\partial}{\partial\tau_{12}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0 v_2\right]\right.$$
$$\left. + v_2^2\frac{\partial}{\partial\tau_{22}}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_1}\right)_0 v_1 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v_2}\right)_0 v_2\right]\right\}$$

oder, wenn T_1 das erste Glied der Entwicklung (22) bezeichnet:

$$T_3(v) = \frac{4\pi i}{3!}\left\{v_1^2\frac{\partial T_1(v)}{\partial\tau_{11}} + v_1 v_2\frac{\partial T_1(v)}{\partial\tau_{12}} + v_2^2\frac{\partial T_1(v)}{\partial\tau_{22}}\right\}. \tag{24}$$

Hiernach lautet die mit Hülfe der Riemann'schen Differentialgleichungen umgeformte Taylor'sche Entwicklung der ϑ-Funktionen im Falle $p = 2$, $\mu = 1$ wie folgt:

$$(25) \qquad \vartheta(v) = T_1(v) + \frac{4\pi i}{3} \sum_{1}^{p} \sum_{i \leq k}^{p} \frac{\partial T_1(v)}{\partial \tau_{ik}} v_i v_k + \cdots$$

Eine ganz entsprechende Umformung läfst sich für beliebiges p und beliebiges μ geben. Die sich dann ergebende Darstellung des ϑ enthält die Gleichung (25) als Spezialfall und lautet:

$$(26) \qquad \vartheta(v) = L_\mu(v) + 4\pi i \frac{\mu!}{(\mu+2)!} \sum_{i \leq k} \sum_{k} \frac{\partial L_\mu(v)}{\partial \tau_{ik}} \cdot v_i v_k + \cdots,$$

wo $L_\mu(v)$ das Anfangsglied der Taylor'schen Entwicklung des ϑ bedeutet. Der Vergleich der beiden Entwicklungen (20) und (26) liefert dann zunächst die Relation:

$$(27) \qquad L_\mu(v) = C_{\varphi\psi} \cdot \Gamma_\mu(w)$$

und des weiteren die Gleichung:

$$(28) \quad 4\pi i \frac{\mu!}{(\mu+2)!} \sum_{i \leq k} \sum_{k} \frac{\partial L_\mu(v)}{\partial \tau_{ik}} v_i v_k = C_{\varphi\psi} \{ G_2(w) \Gamma_\mu(w) + \Gamma_{\mu+2}(w) \}.$$

Hieraus wird mit Rücksicht auf (27):

$$(29) \qquad \frac{4\pi i}{(\mu+1)(\mu+2)} \sum_{i \leq k} \sum_{k} v_i v_k \frac{\partial \log C_{\varphi\psi}}{\partial \tau_{ik}}$$

$$= \left\{ G_2(w) + \frac{\Gamma_{\mu+2}(w)}{\Gamma_\mu(w)} \right\} - \frac{4\pi i}{(\mu+1)(\mu+2)} \sum_{i \leq k} \sum_{k} \left[\frac{v_i v_k}{\Gamma_\mu(w)} \cdot \frac{\partial \Gamma_\mu(w)}{\partial \tau_{ik}} \right].$$

In diese Gleichung tragen wir nun für die v resp. w diejenigen besonderen Werte ein, welche sich ergeben, wenn die Integralgrenzpunkte x und y konsekutiv werden und wenn aufserdem y in einen Verzweigungspunkt rückt.[1]) Diese Werte lauten:

$$[w_i]_{k_\lambda} = -k_\lambda^{p-i} \left(\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$[v_i]_{k_\lambda} = -\frac{1}{A} \sum_{1}^{p} A_{ti} \left(\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

und aufserdem sei noch an die Beziehung:

$$[v_i]_{k_\lambda} \cdot [v_k]_k = \frac{1}{4\pi i} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial k_\lambda} \cdot dk_\lambda$$

erinnert.

1) S. Diss. d. Verf. pag. 36 u. 37.

Da die Ausdrücke G_2, Γ_μ, $\Gamma_{\mu+2}$ sämtlich homogen in den w sind, so enthalten die sämtlichen Summanden jedes dieser Ausdrücke bezw. die gleiche Potenz von $\left(-\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}\right)$. Man kann daher die Eintragung der soeben genannten besonderen Argumente dadurch bewerkstelligen, dafs man

$$w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_p \text{ bezw. durch } k_\lambda^{p-1},\ k_\lambda^{p-2},\ \cdots,\ k_\lambda^0$$

ersetzt und die so entstehenden $G_2(k_\lambda^{p-1}, \cdots k_\lambda^0)$, $\Gamma_\mu(k_\lambda^{p-1}, \cdots k_\lambda^0)$, $\Gamma_{\mu-2}(k_\lambda^{p-1}, \cdots, k_\lambda^0)$ bezw. mit der 2ten, μ^{ten}, $(\mu+2)^{\text{ten}}$ Potenz von $\left(-\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}$ multipliziert. Alsdann transformiert sich die Gleichung (29) in folgende:

$$30)\quad \frac{\partial \log C_{\varphi\psi}}{\partial k_\lambda} dk_\lambda = (\mu+1)(\mu+2)\left\{G_2(k_\lambda^{p-1},\ldots,k_\lambda^0) + \frac{\Gamma_{\mu+2}(k_\lambda^{p-1},\ldots,k_\lambda^0)}{\Gamma_\mu(k_\lambda^{p-1},\ldots,k_\lambda^0)}\right\}\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}$$

$$-\sum_i^{\lambda}\sum_{i\leq k}^{k}\left[\frac{1}{\Gamma_\mu(w)}\cdot\frac{\partial\Gamma_\mu(w)}{\partial\tau_{ik}}\right]_{k_\lambda}\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial k_\lambda}\cdot dk_\lambda .$$

Summiert man endlich über alle möglichen k_λ, so entsteht links das exakte Differential: $d \log C_{\varphi\psi}$, während der rechts verbleibende Ausdruck noch mehrfachen Umgestaltungen zu unterwerfen ist, ehe man an ihm die Natur des exakten Differentials erkennt. Die so erhaltene Gleichung heifst vorläufig:

$$(31)\quad d\log C_{\varphi\psi} = (\mu+1)(\mu+2)\sum_1^{2p+2}\left\{G_2(k_\lambda^{p-1},\ldots,k_\lambda^0) + \frac{\Gamma_{\mu+2}(k_\lambda^{p-1},\ldots,k_\lambda^0)}{\Gamma_\mu(k_\lambda^{p-1},\ldots,k_\lambda^0)}\right\}\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}$$

$$-\sum_1^{2p+2}\sum_{1\leq i\leq k}^{p}\sum_1^{p}\left[\frac{1}{\Gamma_\mu(w)}\cdot\frac{\partial\Gamma_\mu(w)}{\partial\tau_{ik}}\right]_{k_\lambda}\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial k_\lambda}\,dk_\lambda$$

Auf der rechten Seite treten nur Gröfsen auf, die in engster Beziehung zu den σ-Funktionen stehen und welche zum Teil schon allgemein, d. h. für beliebiges p und μ bekannt sind, zum Teil aber erst noch zu berechnen sind. Das letztere gilt von $\Gamma_{\mu+2}(w)$, dessen Wert noch nicht für beliebiges μ festgestellt ist. Infolgedessen wollen wir uns bei der folgenden Betrachtung auf den Fall $p=2$, $\mu=1$ beschränken und für diese Annahme die Integration der Gleichung (31) vollständig durchführen.

III. Integration der Differentialgleichung für $d \log C$ im Falle: $p = 2$, $\mu = 1$.

Für $p = 2$, $\mu = 1$ heifst die Gleichung (31):

$$(32) \qquad d\log C = 6 \sum_1^6 \left\{ G_2(k_\lambda, 1) + \frac{\Gamma_2(k_\lambda, 1)}{\Gamma_1(k_\lambda, 1)} \right\} \frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}$$
$$- \sum_1^6 \sum_{1 \le i \le k}^{2} \sum_1^2 \left[\frac{1}{\Gamma_1(w)} \cdot \frac{\partial \Gamma_1(w)}{\partial \tau_{ik}} \right]_{k_\lambda} \cdot \frac{d\tau_{ik}}{\partial k_\lambda} dk_\lambda .$$

Bevor wir die rechte Seite dieser Gleichung weiter vereinfachen können, mufs erst die dreifache Summe ausgewertet werden. Die Differentiation nach τ_{ik}, welche vermöge der Riemannschen Gleichungen eingeführt wurde, war so zu verstehen, dafs dabei die v_i als Konstante betrachtet werden sollten. Wir müssen demnach zunächst in $\Gamma_1(w)$ die w durch die v ersetzen. $\Gamma_1(w)$ hat als Linearform in den w zunächst die Form:

$$\Gamma_1(w) = a_1 w_1 + a_2 w_2 .$$

Nun ist:
$$w_r = \omega_{r1} v_1 + \omega_{r2} v_2 \qquad (r = 1, 2),$$

folglich:
$$\Gamma_1(w) = \sum_1^2 \sum_1^2 a_r \cdot \omega_{rs} v_s .$$

Durch Differentiation dieses Ausdruckes nach τ_{ik} erhält man:

$$\frac{\partial \Gamma_1(w)}{\partial \tau_{ik}} = \sum_1^2 \sum_1^2 a_r \cdot \frac{\partial \omega_{rs}}{\partial \tau_{ik}} v_s + \sum_1^2 \sum_1^2 \frac{\partial a_r}{\partial \tau_{ik}} \omega_{rs} v_s .$$

Hierin hat man wieder den besonderen, auf pag. 80 angegebenen Wert für v_s einzutragen; dann wird, wenn man aufserdem noch durch $\Gamma_1(w)$ dividiert:

$$(33) \qquad \left[\frac{1}{\Gamma_1(w)} \frac{\partial \Gamma_1(w)}{\partial \tau_{ik}} \right]_{k_\lambda}$$
$$= \frac{1}{A \cdot \Gamma_1(k_\lambda, 1)} \left\{ \sum_1^2 \sum_1^2 \sum_1^2 a_r \frac{\partial \omega_{rs}}{\partial \tau_{ik}} A_{s's} k_\lambda^{2-s'} + \sum_1^2 \sum_1^2 \sum_1^2 \frac{\partial a_r}{\partial \tau_{ik}} \cdot \omega_{rs} \cdot A_{s's} k_\lambda^{2-s'} \right\}$$

Die zweite rechts stehende Summe verschwindet nun jedesmal, sobald r nicht gleich s' ist; für $r = s'$ aber hat sie den Wert:

$$(34) \qquad A \cdot \sum_1^2 \frac{\partial a_r}{\partial \tau_{ik}} k_\lambda^{2-r} .$$

Multipliziert man beiderseits noch mit $\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial k_\lambda} \cdot dk_\lambda$, so erhält man bei Beachtung von (34):

$$(35)\qquad \left[\frac{1}{\Gamma_1(w)}\frac{\partial\Gamma_1(w)}{\partial\tau_{ik}}\right]_{k_\lambda}\cdot\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial k_\lambda}\cdot dk_\lambda$$

$$= \frac{dk_\lambda}{\Gamma_1(k_\lambda,1)}\left\{\frac{1}{A}\cdot\sum_1^2{}_r\sum_1^2{}_s\sum_1^2{}_{s'}\, a_r\frac{\partial\omega_{rs}}{\partial k_\lambda}\cdot A_{s's}\cdot k_\lambda^{2-s'}+\sum_1^2{}_r\frac{\partial a_r}{\partial k_\lambda}k_\lambda^{2-r}\right\}.$$

Um die innerhalb der geschweiften Klammer auftretende dreifache Summe zu bestimmen, müssen wir uns der Darstellungen der nach den k_λ differentiierten Perioden ω durch die Perioden der Integrale 2ter Gattung und die ω selbst erinnern.

Wir wollen nun gleich davon Gebrauch machen, dafs die Partialform φ in der Gestalt:

$$\varphi = z - k_\varphi$$

vorausgesetzt werden darf; dann ist:

$$\Gamma_1(w) = w_1 - k_\varphi w_2, \quad \text{also:}$$

$$(36)\qquad a_1 = 1, \quad a_2 = -k_\varphi.$$

Ferner ist: $A_{11}=\omega_{22}$; $A_{12}=-\omega_{21}$; $A_{21}=-\omega_{12}$; $A_{22}=\omega_{11}$.

Hiernach hat dann die genannte dreifache Summe den folgenden Wert:

$$(37)\quad S_3=\left(\frac{\partial\omega_{11}}{\partial k_\lambda}-k_\varphi\frac{\partial\omega_{21}}{\partial k_\lambda}\right)(\omega_{22}k_\lambda-\omega_{12})+\left(\frac{\partial\omega_{12}}{\partial k_\lambda}-k_\varphi\frac{\partial\omega_{22}}{\partial k_\lambda}\right)(-\omega_{21}k_\lambda+\omega_{11}).$$

Die Werte der $\frac{\partial\omega}{\partial k_\lambda}$ entnehmen wir aus den an anderer Stelle entwickelten Formeln:[1])

$$(38)\qquad \left.\begin{aligned}\tfrac{1}{2}f'(k_\lambda)\frac{\partial\omega_{2\alpha}}{\partial k_\lambda} &= -(k_\lambda\eta_{1\alpha}+\eta_{2\alpha})-c_\alpha\\ \tfrac{1}{2}f'(k_\lambda)\frac{\partial\omega_{1\alpha}}{\partial k_\lambda} &= -k_\lambda(k_\lambda\eta_{1\alpha}+\eta_{2\alpha})-k_\lambda c_\alpha+\tfrac{1}{4}f'(k_\lambda)\omega_{2\alpha}\end{aligned}\right\}(\alpha=1,\,2),$$

wobei

$$c_\alpha=\sum_2^3{}_\mu\sum_0^{\mu-2}{}_{\mu'}\frac{(-1)^\mu\,3_\mu\,(\mu-2)_{\mu'}}{\mu!\,2\cdot 6_\mu}f^{(\mu)}(k_\lambda)k_\lambda^{\mu'}\omega_{2-(\mu-2-\mu'),\alpha}$$

ist; oder:

$$(39)\qquad c_\alpha=\tfrac{1}{20}f''(k_\lambda)\cdot\omega_{2\alpha}+\frac{\omega_{1\alpha}-k_\lambda\omega_{2\alpha}}{240}f'''(k_\lambda).$$

Vermöge der Gleichungen (38) und (39) nimmt dann (37) die Form an:

$$S_3=\frac{2(k_\varphi-k_\lambda)}{f'(k_\lambda)}\Big\{[(k_\lambda\eta_{11}+\eta_{12})(\omega_{22}k_\lambda-\omega_{12})+(k_\lambda\eta_{12}+\eta_{22})(\omega_{11}-\omega_{21}k_\lambda)]$$
$$+\tfrac{1}{20}f''(k_\lambda)\cdot A\Big\}+\tfrac{1}{2}A.$$

1) S. Diss. d. Verf. p. 33 Glg. (50).

Der erste Bestandteil der geschweiften Klammer aber kann di ersetzt werden durch die kürzere Bezeichnung:

$$(40) \qquad -\sum_{1}^{2}\sum_{1}^{2} H_r \cdot A_{r'r} \cdot k_\lambda^{2-r'} = -2\,G_2(k_\lambda, 1) \cdot A. \text{ [1]}$$

Mithin wird dann:

$$(41) \qquad S_3 = (k_\lambda - k_\varphi)\frac{A}{f'(k_\lambda)}\left\{4\,G_2(k_\lambda, 1) - \tfrac{1}{10} f''(k_\lambda)\right\} + \tfrac{1}{2} A.$$

Das Ergebnis (41) führt nun die Gleichung (35) in folge Form über:

$$\left[\frac{1}{\Gamma_1(w)} \cdot \frac{\partial \Gamma_1(w)}{\partial \tau_{ik}}\right]_{k_\lambda} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial k_\lambda} \cdot dk_\lambda = \frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}\left\{4G_2(k_\lambda, 1) - \tfrac{1}{10} f''(k_\lambda) + \tfrac{1}{2}\frac{f'(k_\lambda}{k_\lambda - }\right.$$

Infolge dessen geht (32) über in folgende Gleichung:

$$(42)\ d\log C = \sum_{1}^{6}{}_\lambda\left\{2G_2(k_\lambda, 1) + 6\frac{\Gamma_3(k_\lambda, 1)}{\Gamma_1(k_\lambda, 1)} + \tfrac{1}{10} f''(k_\lambda) - \frac{f'(k_\lambda)}{2\,\Gamma_1(k_\lambda, 1)}\right\} f$$
$$- \sum_{1}^{6}{}_\lambda \sum_{1}^{2}{}_r \frac{\partial a_r}{\partial k_\lambda} \cdot k_\lambda^{2-r} \cdot \frac{dk_}{\Gamma_1(k_\lambda}$$

Für die Umgestaltung dieser Gleichung kommt nun zuvörd die nachstehende Formel für $G_2(k_\lambda, 1)$ in Betracht, welche den tr cendenten und algebraischen Teil in $G_2(k_\lambda, 1)$ trennt:[2]

$$(43) \qquad 2\,G_2(k_\lambda, 1) = \tfrac{1}{2} f'(k_\lambda)\frac{\partial \log A}{\partial k_\lambda} + \tfrac{1}{20} f''(k_\lambda).$$

Ferner ist jetzt an die im ersten Teile entwickelten Ausdrü

$$\Gamma_1(k_\lambda, 1) = \varphi(k_\lambda); \quad \Gamma_3(k_\lambda, 1) = -\tfrac{1}{12}\psi^2_{k_\varphi}\psi^3_{k_\lambda}.$$

sowie an die Relationen

$$\begin{cases} f'(k_\lambda) = \varphi(k_\lambda)\psi'(k_\lambda) + \psi(k_\lambda), \\ f''(k_\lambda) = \varphi(k_\lambda)\psi''(k_\lambda) + 2\psi'(k_\lambda) \end{cases}$$

zu erinnern.

Mit Benutzung dieser Beziehungen wandelt sich (42) um in

$$d\log C = d\log\sqrt{A} + \sum_{1}^{6}{}_\lambda\left\{\tfrac{3}{20} f''(k_\lambda) - \frac{\psi^2_{k_\varphi}\psi^3_{k_\lambda} + f'(k_\lambda)}{2\,\varphi(k_\lambda)}\right\} \frac{}{f'}$$
$$- \sum_{1}^{6}{}_\lambda \sum_{1}^{2}{}_r \frac{\partial a_r}{\partial k_\lambda} \frac{k_\lambda^{2-r}}{\varphi(k_\lambda)}$$

1) S. Diss. d. Verf. S. 39.
2) S. Diss. d. Verf. S. 40. Glg. (61).

Da nun laut Gleichung (18)

$$\psi^2_{k_\varphi}\psi^3_{k_\lambda} = \psi(k_\lambda) - \tfrac{2}{5}\varphi(k_\lambda)\psi'(k_\lambda) + \tfrac{1}{20}\varphi^2(k_\lambda)\psi''(k_\lambda)$$

ist, so wird nach einer leichten Umrechnung:

$$(44)\quad d\log C = d\log\sqrt{\ } + \sum_1^6{}^{\lambda}\left\{\tfrac{1}{8}\varphi(k_\lambda)\psi''(k_\lambda) - \frac{\psi(k_\lambda)}{\varphi(k_\lambda)}\right\}\frac{dk_\lambda}{\varphi(k_\lambda)\psi'(k_\lambda) + \psi(k_\lambda)} - \sum_1^6{}^{\lambda}\sum_1^2{}_r\frac{\partial a_r}{\partial k_\lambda}\cdot\frac{k_\lambda^{2-r}}{\varphi(k_\lambda)}\,dk_\lambda.$$

Das letzte Glied der rechten Seite vereinfacht sich nun dadurch sehr, dafs infolge der Thatsache: $a_1 = 1$, $a_2 = -k_\varphi$ der Differentialquotient $\frac{\partial a_r}{\partial k_\lambda}$ nur für $\lambda = r = \varphi$ von Null verschieden ist und dann gleich (-1) wird. Demnach ist:

$$(45)\qquad \sum_1^6{}^{\lambda}\sum_1^2{}_r\frac{\partial a_r}{\partial k_\lambda}\cdot\frac{k_\lambda^{2-r}}{\varphi(k_\lambda)}\,dk_\lambda = -\frac{dk_\varphi}{\varphi(k_\varphi)}.$$

Trennen wir noch in der ersten Summe die Summierung, welche sich auf sämtliche Nullstellen von ψ bezieht, von der auf die Nullstelle von φ bezüglichen Addition, so erhalten wir offenbar:

$$d\log C = d\log\sqrt{A} + \tfrac{1}{8}\sum_{(\psi)}\frac{\psi''(k_\psi)}{\psi'(k_\psi)}\,dk_\psi - \left(\frac{1}{\varphi(k_\varphi)} - \frac{1}{\varphi(k_\varphi)}\right)dk_\varphi,$$

oder:

$$(46)\qquad d\log C = d\log\sqrt{A} + \tfrac{1}{8}\sum_{(\psi)}\frac{\psi''(k_\psi)}{\psi'(k_\varphi)}\,dk_\psi.$$

Dieses aber ist auf Grund der bekannten Beziehung:

$$\frac{\psi''(k_\psi)}{\psi'(k_\psi)} = \frac{\partial\log\Delta_\psi}{\partial k_\psi},$$

wo Δ_ψ die Diskriminante von ψ bedeutet, nichts anderes als

$$(47)\qquad d\log C = d\log\sqrt{A} + \tfrac{1}{8}\,d\log\Delta_\psi;$$

und somit ergiebt sich durch Integration das bekannte Resultat:

$$(48)\qquad C = c\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt[8]{\Delta_\psi},$$

wobei c eine rein numerische Integrationskonstante bedeutet, die uns hier nicht näher interessiert.

Für (48) kann, da $\Delta_\varphi = 1$ ist (denn φ ist eine Linearform), ebensogut

$$(49)\qquad C = c\sqrt{A}\cdot\sqrt[8]{\Delta_\psi\Delta_\varphi}$$

geschrieben werden.

Damit sind wir bei dem Punkte angelangt, den wir vorläufig erreichen wollten. Es würde noch erübrigen, was hier für $p = 2$, $\mu = 1$ bis zu Ende durchgeführt ist, auf beliebiges p und beliebiges μ auszudehnen; dann würden alle $C_{\varphi\psi}$ nach einer einheitlichen Methode bestimmt sein. Um dieses Ziel zu erreichen, müfste man zunächst den Wert von $\Gamma_{\mu+2}\left(k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \ldots k_\lambda^0\right)$ aus der algebraischen Definition der σ-Funktionen herleiten und aufserdem das letzte Glied der Gleichung (31) in ähnlicher Weise umgestalten und vereinfachen, wie es in dem jetzt behandelten Spezialfalle geschehen ist. Auf diesen Teil der Fragestellung einzugehen, möchte ich mir noch vorbehalten, und zwar in der Hoffnung, diesen Entwicklungen möglichst bald den erwünschten Abschlufs geben zu können.

Beitrag zur Liniengeometrie in n Dimensionen.

Von H. Schubert in Hamburg.

Als Herr Segre und Herr Loria mich im letzten Sommer besuchten, stellte Herr Segre an mich die Anfrage, erstens, ob ich imstande wäre, für einen zugrunde gelegten n-dimensionalen linearen Raum die Zahl der Strahlen, welche q gegebene beliebige Lage-Bedingungen erfüllen, ganz allgemein durch die $2q$ Zahlen auszudrücken, welche diese Lage-Bedingungen konstituieren, und zweitens, ob ich dieselbe Aufgabe statt für den Strahl auch für einen p-dimensionalen linearen Raum lösen könnte. Auf diese beiden Fragen konnte ich antworten, dafs für den Strahl der gewünschte Ausdruck sich aus der allgemeinen Formel ergeben müsse, welche ich 1884 im 26ten Bande der Math. Annalen (Seite 40)[1]) abgeleitet habe, dafs aber für die Ebene oder lineare Räume höherer Dimension die Aufsuchung des gesuchten Ausdrucks mir erst dann gelingen könnte, wenn ich auch für diese Räume die Formel besäfse, welche jener allgemeinen Strahl-Formel analog ist. Da es mir auch bis jetzt noch nicht gelungen ist, für lineare Räume von höherer als der ersten Dimension die grundlegende Formel in voller Allgemeinheit abzuleiten, so beschränke ich mich vorläufig darauf, im folgenden den durch die erste Frage des Herrn Segre gewünschten Ausdruck abzuleiten und weitere naheliegende Beispiele und Betrachtungen damit zu verbinden.

1) In der Abhandlung „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums", Math. Ann., Band 26, Seite 26 bis 51. Diese Abhandlung werde ich im folgenden kurz mit „Fund. Anz." bezeichnen.

§ 1. Bezeichnungen und Ziel.

Wie in allen meinen seit 1884 veröffentlichten Untersuchungen über abzählende Geometrie in n Dimensionen bezeichne ich durch eine eine Zahl einschliefsende eckige Klammer einen linearen Raum, dessen Dimension gleich dieser Zahl ist, also durch [0] einen Punkt, durch [1] einen Strahl, durch [2] eine Ebene, durch $[f]$ einen f-dimensionalen linearen Raum, durch $[n]$ den n-dimensionalen linearen Raum, der als alle vorkommenden Räume enthaltend gedacht ist. Mit Hilfe dieser Bezeichnungsweise läfst sich nun die Definition der einem $[p]$ auferlegten Bedingung:

$$(d_0, d_1, d_2 \cdots d_p)$$

kurz so aussprechen: „Das Bedingungssymbol $(d_0, d_1, \cdots d_p)$ setzt voraus, dafs ein $[d_0]$, ein $[d_1]$, ein $[d_2]$, u. s. w. bis $[d_p]$ so gegeben ist, dafs immer jeder $[d_i]$ in dem $[d_{i+1}]$ liegt, und verlangt dann, dafs der $[p]$ mit jedem $[d_i]$ einen $[i]$ gemeinsam haben soll.“ Hiernach hat ein Bedingungssymbol $(d_0, d_1, \cdots d_p)$ nur dann Sinn, wenn

$$0 \leqq d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_p \leqq n$$

ist. Die sämtlichen mit dieser Ungleichungs-Bedingung vereinbaren Bedingungssymbole bilden zugleich die sämtlichen Charakteristiken (Gradzahlen) der von einem $[p]$ erzeugten Systeme[1]), oder, was auf dasselbe hinauskommt: die Zahl derjenigen $[p]$, welche beliebig gegebene Bedingungen $Z_1, Z_2, \cdots Z_q$ erfüllen, ist schliefslich als Summe von Vielfachen der Zahlen ausdrückbar, welche angeben, wieviel $[p]$ keine andern Bedingungen als blofs derartige charakteristische Bedingungen $(d_0, d_1, \cdots d_p)$ erfüllen. Es ist daher ein naheliegendes Problem, die Funktion zu suchen, die für einen $[p]$ diese Zahlen durch die $q(p+1)$ Buchstaben ausdrückt, welche die q gegebenen charakteristischen Bedingungen konstituieren.

Zunächst soll dieses Problem hier für $p = 1$ gelöst werden. Demgemäfs denken wir uns einem Strahle die q von einander unabhängigen Bedingungen

$$(a_1\alpha_1), (a_2\alpha_2), (a_3\alpha_3), \cdots, (a_q\alpha_q)$$

auferlegt und betrachten als unser Ziel die Aufsuchung der Funktion, welche die Anzahl x der diese q Bedingungen erfüllenden Strahlen durch die $2q$ Buchstaben $a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2 \cdots a_q, \alpha_q$ ausdrückt. Natürlich mufs die Dimensionssumme der q Be-

1) Dies zeigte ich 1885 in meiner Abhandlung „Lösung des Charakteristikenproblems für lineare Räume beliebiger Dimension“ (Mitteil. der Hamb. Math. Gesellsch. vom Jahre 1886).

dingungen gleich der Konstantenzahl $2(n-1)$ des Strahls sein, d. h., es mufs die folgende Gleichung stattfinden:

(1) $(a_1+\alpha_1)+(a_2+\alpha_2)+\cdots+(a_q+\alpha_q)=(2n-1)(q-1)+1.$

Dieses Ziel werden wir dadurch erreichen, dafs wir zunächst das scheinbar allgemeinere Problem lösen, die Zahl derjenigen Strahlen zu berechnen, welche aufser den q Bedingungen $(a_1\alpha_1)$, $(a_2\alpha_2)$, $\cdots$ $(a_q\alpha_q)$ auch noch h mal die einfache Bedingung $(n-2, n)$ erfüllen, wo nun

(2) $h=(a_1+\alpha_1)+(a_2+\alpha_2)+\cdots(a_q+\alpha_q)-(2n-1)(q-1)-1$

sein mufs.

§ 2. Eine bis drei beliebige Bedingungen.

Die Zahl $(a_1\alpha_1)(n-2, n)^h$, wo $h=a_1+\alpha_1-1$ sein mufs, ist schon in den „Fund. Anz." (Math. Ann. Band 26, Seite 46, Formel 5) von mir bestimmt. Es ergiebt sich dort:

$$\frac{\alpha_1-a_1}{\alpha_1+a_1}\cdot(\alpha_1+a_1)_{a_1},$$ [1])

wofür auch geschrieben werden kann:

(3) $(a_1\alpha_1)(n-2, n)^h=h_{a_1}-h_{\alpha_1}$, wo $h=a_1+\alpha_1-1$ ist.

Um hieraus $(a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(n-2, n)^h$ abzuleiten, müssen wir von der grundlegenden Formel (11) meiner „Fund. Anz." Gebrauch machen. Danach ist, falls $a_1+\alpha_2 \lessgtr a_2+\alpha_1$ ist:

(4) $$(a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)$$
$$=(a_1+\alpha_2-n, a_2+\alpha_1-n+1)+(a_1+\alpha_2-n-1, a_2+\alpha_1-n+2)+\cdots$$

welche Summe, wenn $a_1+a_2 \lessgtr n-1$ ist, bis $(0, a_1+a_2+\alpha_1+\alpha_2-2n+1)$ weiterzuführen ist, und, wenn $a_1+a_2 \lessgtr n-1$ ist, nur bis $(a_1+a_2-n+1, \alpha_1+\alpha_2-n)$ fortgesetzt werden darf. Multiplizieren wir nun die Gleichung (4) symbolisch mit $(n-2, n)^h$, und wenden dann auf die einzelnen Summanden der rechtsstehenden Summe die Formel (3) an, so erhalten wir:

$$(5)\ (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(n-2, n)^h=[h_{a_1+a_2-n}+h_{a_1+a_2-n-1}+\cdots+h_{a_1+a_2-n+1}]$$
$$-[h_{a_2+\alpha_1-n+1}+h_{a_2+\alpha_1-n+2}+\cdots+h_{a_1+\alpha_2-n}],$$

welche Gleichung sowohl für $a_1+a_2 \gtrless n-1$ wie auch für $a_1+a_2 \lessgtr n-1$ richtig erscheint, wenn man beachtet, dafs Binomialkoeffizienten mit negativem Index gleich null zu setzen sind. Da wegen F. (2) $h=a_1+a_2+\alpha_1+\alpha_2-2n$ ist, und da zwei Binomialkoeff-

[1]) Der Binomial-Koeffizient $\frac{f!}{g!\,(f-g)!}$ wird immer kurz durch f_g bezeichnet.

fizienten gleichen Wert haben, wenn die Summe ihrer Indices gleich ihrer Basis ist, so heben sich die Binomialkoeffizienten in F. (5) soweit fort, dafs nur der erste in der ersten Klammer und der letzte in der zweiten Klammer stehen bleibt. Wir erhalten also schliefslich:

$$(6) \qquad (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(n-2,n)^h = h_{a_1+a_2-n} - h_{a_1+a_2-n}.$$

Die Ableitung dieser Formel beruhte auf der Annahme, dafs $a_1+\alpha_2 < a_2+\alpha_1$ ist. Wenn nun umgekehrt $a_1+\alpha_2 > a_2+\alpha_1$ ist, so vertauschen sich nur die Indices 1 und 2. Die so resultierende Formel erweist sich aber als identisch mit Formel (6), weil $h_{a_1+a_2-n} = h_{a_2+a_1-n}$ ist. Deshalb ist F. (6) allgemein gültig.

Um nun weiter die Zahl $(a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)(n-2,n)^h$ zu bestimmen, multiplizieren wir die Gleichung (4) symbolisch mit $(a_3\alpha_3)(n-2,n)^h$, und wenden dann auf die einzelnen Summanden der rechts stehenden Summe die Formel (6) an. So erhalten wir:

$$(7) \qquad (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)(n-2,n)^h$$
$$= [h_{a_1+a_2+a_3-2n} + h_{a_1+a_2+a_3-2n-1} + \cdots + h_{a_1+a_2+a_3-2n+1}]$$
$$- [h_{a_1+a_2+a_3-2n} + h_{a_1+a_2+a_3-2n-1} + \cdots + h_{a_1+a_2+a_3-2n+1}].$$

Um dieses Resultat übersichtlicher schreiben zu können, führen wir die Funktion $\varphi(h,f)$ ein, welche die folgende Bedeutung haben soll:

$$(8) \qquad \varphi(h,f) = h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_f.$$

Beispielsweise ist $\varphi(h,h) = 2^h$, $\varphi(h,0) = 1$, $\varphi(h,-1) = 0$. Mit Hilfe dieser Funktion φ können wir die Formel (7) nunmehr kurz so schreiben:

$$(9) \qquad (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)(n-2,n)^h$$
$$= \varphi(h, a_1+\alpha_2+\alpha_3-2n) - \varphi(h, a_1+a_2+\alpha_3-2n)$$
$$- \varphi(h, a_1+\alpha_2+a_3-2n) + \varphi(h, a_1+a_2+a_3-2n).$$

Da durch Vertauschung der Indices aus Formel (9) Formeln hervorgehen, die sich wegen der Formel (2) als identisch erweisen, so ist die Vernachlässigung der Annahme $a_1+\alpha_2 < a_2+\alpha_1$, worauf Formel (4) beruhte, ohne Wirkung, und die Formel (9) ist deshalb allgemeingültig.

Ehe wir von Formel (9) aus zu der Bestimmung von $(a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)(a_4\alpha_4)(n-2,n)^h$ aufsteigen, müssen wir erst arithmetische Betrachtungen, die sich an die durch Formel (8) eingeführte Funktion φ anknüpfen, zwischenschieben.

§ 3. Arithmetische Hilfsmittel.

Ausgehend von der in Formel (8) ausgesprochenen Definition:

$$\varphi(h, f) = h_0 + h_1 + h_2 + \cdots + h_f,$$

definieren wir weiter:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi^2(h, f) = \varphi(h, 0) + \varphi(h, 1) + \varphi(h, 2) + \cdots + \varphi(h, f), \\ \varphi^3(h, f) = \varphi^2(h, 0) + \varphi^2(h, 1) + \varphi^2(h, 2) + \cdots + \varphi^2(h, f) \\ \text{und überhaupt:} \\ \varphi^{i+1}(h, f) = \varphi^i(h, 0) + \varphi^i(h, 1) + \varphi^i(h, 2) + \cdots + \varphi^i(h, f). \end{cases}$$

Es handelt sich nun darum, allgemein $\varphi^k(h, f)$ direkt durch h, f, k auszudrücken. Zunächst ergiebt sich:

$$(11)\quad \varphi^2(h, f) = (f+1)\cdot h_0 + f\cdot h_1 + (f-1)\cdot h_2 + \cdots + 1\cdot h_f.$$

Um hieraus $\varphi^3(h, f)$ zu finden, beachten wir, dafs als Koeffizient von h_0 die Summe aller Zahlen von 1 bis $f+1$, also $(f+2)_2$, als Koeffizient von h_1 die Summe aller Zahlen von 1 bis f, also $(f+1)_2$ erscheinen muss, u. s. f. So kommt:

$$(12)\quad \varphi^3(h, f) = (f+2)_2\cdot h_0 + (f+1)_2\cdot h_1 + f_2\cdot h_2 + \cdots + 2_2\cdot h_f.$$

Ebenso ergiebt sich hieraus nach bekannten Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten

$$(13)\quad \varphi^4(h, f) = (f+3)_3\cdot h_0 + (f+2)_3\cdot h_1 + \cdots + 3_3\cdot h_f.$$

So fortfahrend, gelangt man zu der allgemeinen Form:

$$(14)\quad \varphi^k(h,f) = h_0\cdot(f+k-1)_{k-1} + h_1\cdot(f+k-2)_{k-1} + h_2\cdot(f+k-3)_{k-1} + \cdots + h_f\cdot(k-1)_{k-1}.$$

Für $h = 0$ spezialisiert, ergiebt dies:

$$(15)\quad \varphi^k(0, f) = (f+k-1)_{k-1}.$$

Noch einige Zahlen-Beispiele zur Verdeutlichung:

$\varphi\ (7, 3) = 7_0 + 7_1 + 7_2 + 7_3 = 64;$

$\varphi\ (8, 6) = 8_0 + 8_1 + 8_2 + 8_3 + 8_4 + 8_5 + 8_6 = 247;$

$\varphi^2\ (1, 4) = 1_0\cdot 5_1 + 1_1\cdot 4_1 = 9;$

$\varphi^2\ (4, 4) = 4_0\cdot 5_1 + 4_1\cdot 4_1 + 4_2\cdot 3_1 + 4_3\cdot 2_1 + 4_4\cdot 1_1 = 48;$

$\varphi^3\ (3, 5) = 3_0\cdot 7_2 + 3_1\cdot 6_2 + 3_2\cdot 5_2 + 3_3\cdot 4_2 = 102;$

$\varphi^3\ (6, 2) = 6_0\cdot 4_2 + 6_1\cdot 3_2 + 6_2\cdot 2_2 = 39;$

$\varphi^5\ (3, 2) = 3_0\cdot 6_4 + 3_1\cdot 5_4 + 3_2\cdot 4_4 = 33;$

$\varphi^8\ (2, 5) = 2_0\cdot 12_7 + 2_1\cdot 11_7 + 2_2\cdot 10_7 = 1572;$

$\varphi^{11}(0, 2) = 0_0\cdot 12_{10} = 66.$

§ 4. Drei oder mehr beliebige Bedingungen.

Die in Formel (10) ausgesprochene Definition von $\varphi^2(h, f)$ ermöglicht die Hinschreibung der Formel für $(a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)(a_4\alpha_4)(n-2,n)^\lambda$. Dieselbe ergiebt sich, wenn wir Formel (4) symbolisch mit $(a_3\alpha_3)(a_4\alpha_4)(n-2, n)^\lambda$ multiplizieren und dann auf die einzelnen Summanden der rechts erscheinenden Summe die Formel (9) anwenden. So erhält man:

$$\begin{aligned}(16)\ (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)(a_4\alpha_4)(n-2,n)^\lambda &= \varphi^2(h, a_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-3n)\\ &-\varphi^2(h, a_1+a_2+\alpha_3+\alpha_4-3n)-\varphi^2(h, a_1+\alpha_2+a_3+\alpha_4-3n)\\ &-\varphi^2(h, a_1+\alpha_2+\alpha_3+a_4-3n)+\varphi^2(h, a_1+a_2+a_3+\alpha_4-3n)\\ &+\varphi^2(h, a_1+a_2+\alpha_3+a_4-3n)+\varphi^2(h, a_1+\alpha_2+a_3+a_4-3n)\\ &-\varphi^2(h, a_1+a_2+a_3+a_4-3n).\end{aligned}$$

Der Prozefs des Weiterschreitens von i gegebenen beliebigen Bedingungen zu $i+1$ Bedingungen beruht immer auf derselben Formel (4), und es ist daher jetzt leicht, die allgemeine Form zu erkennen, nämlich:

$$(17)\ (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)(a_3\alpha_3)\cdots(a_q\alpha_q)(n-2, n)^\lambda = S_0 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^{q-1}\cdot S_{q-1},$$

wo

$$\begin{aligned}S_0 &= \varphi^{q-2}(h, a_1+a_2+a_3+\cdots\alpha_q-\overline{q-1}\,n),\\ S_1 &= \varphi^{q-2}(h, a_1+a_2+a_3+\cdots\alpha_q-\overline{q-1}\,n)\\ &\quad+\varphi^{q-2}(h, a_1+\alpha_2+a_3+\alpha_4+\cdots\alpha_q-\overline{q-1}\,n)\\ &\quad+\cdots+\varphi^{q-2}(h, a_1+\alpha_2+\cdots\alpha_{q-1}+a_q-\overline{q-1}\,n),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ S_{q-1} &= \varphi^{q-2}(h, a_1+a_2+\cdots a_q-\overline{q-1}\,n)\end{aligned}$$

zu setzen ist. Ersetzt man nun noch jeden Summanden eines S_i durch die in Formel (14) ausgedrückte Summe von Produkten von Binomialkoeffizienten, so erhält man eine Lösung des gestellten Problems. Diese Lösung ist aber insofern unbefriedigend, als in derselben der Index 1 bevorzugt erscheint. Eine in allen Indices symmetrische Form kann man jedoch aus (17) leicht erhalten, wenn man $a_1 = n-1$, $\alpha_1 = n$ setzt. Dadurch kann die in (17) ausgedrückte Zahl nicht geändert werden, weil die Bedingung $(n-1, n)$ immer selbstverständlich erfüllt wird, oder, was dasselbe ist, nullter Dimension ist. Deshalb setzen wir jetzt in (17) $a_1 = n-1$, $\alpha_1 = n$, wählen dann statt der Indices 2 bis q die Indices 1 bis $q-1$, schreiben wieder q für $q-1$ und ersetzen schliefslich jedes $\varphi^k(h, f)$ durch die in (14) angegebene Summe. Auf diese Weise erhalten wir für $q \geqq 3$:

$$(18)\quad (a_1\alpha_1)(a_2\alpha_2)\cdots(a_q\alpha_q)(n-2,\,n)^h = s - (s_1 + s_2 + \cdots s_q) + (s_{12} + s_{13} + \cdots s_{q-1,q}) - (s_{123} + \cdots) + \cdots (-1)^q \cdot s_{123\ldots q},$$

wo die s folgende Bedeutung haben:

$$s = h_0 \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 3)_{q-2} + h_1 \cdot (\alpha_1 + \cdots + \alpha_q - nq + n + q - 4)_{q-2} + \cdots$$

und:

$$s_1 = h_0 \cdot (a_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 3)_{q-2} + h_1 \cdot (a_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 4)_{q-2} + \cdots,$$

$$s_2 \ldots = h_0 (\alpha_1 + a_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 3)_{q-2} + h_1 \cdot (\alpha_1 + a_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 4)_{q-2} + \cdots$$

und:

$$s_{12} = h_0 \cdot (a_1 + a_2 + \alpha_3 \cdots \alpha_q - nq + n + q - 3)_{q-2} + h_1 \cdot (a_1 + a_2 + \alpha_3 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 4)_{q-2} + \cdots$$

$$s_{13} \ldots = h_0 \cdot (a_1 + \alpha_2 + a_3 + \alpha_4 + \cdots \alpha_q - nq + n + q - 3)_{q-2} + h_1 \cdot ( ) + \cdots$$

und:

$$s_{123\ldots q} = h_0 \cdot (a_1 + a_2 + \cdots a_q - nq + n + q - 3)_{q-2} + h_1 (a_1 + \cdots a_q - nq + n + q - 4)_{q-2} + \cdots$$

Diese Summen sind solange fortzuführen, bis ein Summand entweder dadurch null wird, dafs der Index von h gröfser wird als h, oder dadurch, dafs die Basis des den zweiten Faktor bildenden Binomialkoeffizienten kleiner wird, als der konstante Index $q - 2$.

Es wird zweckmäfsig sein, dem in F. (18) ausgesprochenen Hauptresultate noch zwei Beispiele hinzuzufügen.

1) Für $n = 9$ sei zu berechnen $x = (5, 8)\,(3, 8)\,(4, 9)\,(7, 9)^2$. Wir erhalten:

$$s = 2_0 \cdot (8 + 8 + 9 - 18)_1 + 2_1 \cdot (8 + 8 + 9 - 19)_1 + 2_2 \cdot (8 + 8 + 9 - 20)_1 = 24,$$

$$s_1 = 2_0 \cdot (5 + 8 + 9 - 18)_1 + 2_1 \cdot (5 + 8 + 9 - 19)_1 + 2_2 \cdot (5 + 8 + 9 - 20)_1 = 12,$$

$$s_2 = 2_0 \cdot (8 + 3 + 9 - 18)_1 + 2_1 \cdot (8 + 3 + 9 - 19)_1 + 2_2 \cdot (8 + 3 + 9 - 20)_1 = 4,$$

$$s_3 = 2_0 \cdot (8 + 8 + 4 - 18)_1 + 2_1 \cdot (8 + 8 + 4 - 19)_1 + 2_2 \cdot (8 + 8 + 4 - 20)_1 = 4;$$

$s_{12} = 0$, $s_{13} = 0$, $s_{23} = 0$ und $s_{123} = 0$, weil dann die in den Klammern erscheinenden Differenzen kleiner als der Index 1 werden. Daher ist: $x = 24 - (12 + 4 + 4) = 4$.[1]

---

[1] Vgl.: „Fund. Ans.", Math. Ann. Bd. 26, S. 42.

2) Für $n = 10$ sei zu berechnen $x = (7, 10)^7\,(8, 10)^4$. Wir erhalten:

$s = 4_0 \cdot 14_5 + 4_1 \cdot 13_5 + 4_2 \cdot 12_5 + 4_3 \cdot 11_5 + 4_4 \cdot 10_5 = 14002$,

$s_1 = s_2 = \cdots = s_7 = 4_0 \cdot 11_5 + 4_1 \cdot 10_5 + 4_2 \cdot 9_5 + 4_3 \cdot 8_5 + 4_4 \cdot 7_5 = 2471$,

$s_{12} = s_{13} = \cdots = 4_0 \cdot 8_5 + 4_1 \cdot 7_5 + 4_2 \cdot 6_5 + 4_3 \cdot 5_5 = 180$,

$s_{123} = s_{124} = \cdots = 4_0 \cdot 5_5 = 1$; alle übrigen s werden null.

Daher ist $x = 14002 - 7_1 \cdot 2471 + 7_2 \cdot 180 - 7_3 \cdot 1 = \mathbf{450}$.

§ 5. Scheinbare Spezialisierung für $h = 0$.

Da man sich unter den q Bedingungen $(a_i \alpha_i)$ auch $h$mal die Bedingung $(n - 2, n)$ denken kann, so ist die Formel, die aus F. (18) hervorgeht, wenn nian $h = 0$ setzt, nur scheinbar spezieller. Wir setzen daher von jetzt an $h = 0$, und wollen aufserdem noch eine weiter vereinfachte Schreibweise durch die Formel (1) erzielen. Aus derselben folgt:

$$\tfrac{1}{2}(a_1 + \alpha_1) + \tfrac{1}{2}(a_2 + \alpha_2) + \cdots + \tfrac{1}{2}(a_q + \alpha_q) = nq - n - \tfrac{1}{2}q + 1.$$

Bezeichnen wir nun jede Differenz $\alpha_i - a_i$ durch d_i, so erhalten wir zweitens:

$$\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - a_1) + \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - a_2) + \cdots + \tfrac{1}{2}(\alpha_q - a_q) = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2 + \cdots + d_q).$$

Durch Addition beider Gleichungen entsteht:

$$\begin{aligned}(19)\qquad & \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q - nq + n + q - 3 \\ & = \tfrac{1}{2}(d_1 + d_2 + \cdots + d_q) + \tfrac{1}{2}q - 2.\end{aligned}$$

Mit Benutzung von (19) erhält man nun aus (18) die Hauptformel:

$$\begin{aligned}(20)\qquad & (a_1 \alpha_1)\,(a_2 \alpha_2) \cdots (a_q \alpha_q) = s - (s_1 + s_2 + \cdots s_q) \\ & + (s_{12} + s_{13} + \cdots) - (s_{123} + \cdots) \\ & + (s_{1234} + \cdots) - \cdots + (-1)^q\, s_{123 \cdots q},\end{aligned}$$

wo die s folgende Bedeutung haben:

$s = e_{q-2}$

$s_i = (e - d_i)_{q-2}$

$s_{ik} = (e - d_i - d_k)_{q-2}$

$s_{ikl} = (e - d_i - d_k - d_l)_{q-2}$ etc.,

und wo $e = \frac{1}{2}d_1 + \frac{1}{2}d_2 + \cdots \frac{1}{2}d_q + \frac{1}{2}q - 2$ ist.

Hiernach gestaltet sich die Berechnung übersichtlicher, wie folgende Beispiele zeigen:

1) Für $n = 9$ sei zu berechnen $x = (5, 8)\,(3, 8)\,(4, 9)\,(7, 9)\,(7, 9)$.

Es ist also $q = 5$, $d_1 = 3$, $d_2 = 5$, $d_3 = 5$, $d_4 = 2$, $d_5 = 2$,

daher $e = \frac{1}{2}(3 + 5 + 5 + 2 + 2) + \frac{5}{2} - 2 = 9$,

und weiter:

$$s = 9_3;$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 6_3 + 4_3 + 4_3 + 7_3 + 7_3;$$

$$s_{12} = s_{13} = 0, \quad s_{14} = 4_3, \quad s_{15} = 4_3, \quad s_{23} = s_{24} = s_{25} = 0,$$

$$s_{34} = s_{35} = 0, \quad s_{45} = 5_3;$$

Alle weiteren s werden zu null. Daher ist:

$x = 9_3 - (6_3 + 4_3 + 4_3 + 7_3 + 7_3) + (4_3 + 4_3 + 5_3) = 84 - 98 + 18 =$

in Übereinstimmung mit dem Resultat des ersten Beispiels in § 4.

2) Für $n = 19$ sei zu berechnen $x = (13, 18)^6$.

Es ist also $q = 6$, $d_1 = d_2 = \cdots = d_6 = 5$, daher $e = 1$

und weiter:

$$s = 16_4; \quad s_1 = \cdots = s_6 = 11_4; \quad s_{12} = \cdots = s_{56} = 6_4;$$

alle weiteren s sind null. Daher ist:

$$x = 16_4 - 6_1 \cdot 11_4 + 6_2 \cdot 6_4 = 65.$$

In Worten heifst dieses Resultat, dafs es in eine 19-dimensionalen linearen Raume 65 Strahlen giebt, der jeder die Bedingung, in einem gegebenen 18-dimensional linearen Raume zu liegen und dabei einen in letztere gelegenen 13-dimensionalen linearen Raum zu schneide sechsmal zu erfüllen vermag.

§ 6. Zwei Anwendungen bei allgemein gelassenem n.

1. Die Formel (20) kann auch als eine Verallgemeinerung d bekannten Anzahl betrachtet werden, auf die aufser mir auch d Herren Franz Meyer[1]) und Stephanos[2]) von invarianten-theoretisch Seite her gestofsen sind. Während jene Anzahl angiebt, wiev Strahlen $2n - 2$ gegebene $(n - 2)$-dimensionale lineare Räu schneiden, oder, was dasselbe ist, $(2n - 2)$ mal die Bedingung $(n - 2$ erfüllen, giebt die Formel (20) die Anzahl der Strahlen in dem a gemeinsten Falle, wo q ganz beliebige charakteristische Bedingung $(a_1 \alpha_1), (a_2 \alpha_2), \cdots (a_q \alpha_q)$ gegeben sind. Es liegt daher nahe, in Form (20) jedes $a_i = n - 2$, jedes $\alpha_i = n$ zu setzen, um die erwähnte A zahl x zu erhalten. Wir erhalten:

$$q = 2n - 2, \quad d_1 = d_2 = \cdots d_q = 2,$$

also $$e = (2n - 2) \cdot 1 + (n - 1) - 2 = 3n - 5.$$

1) Math. Ann., Bd. 21, S. 132.
2) Thèse vom Juli 1884.

Daher wird:

$$s = (3n-5)_{2n-4};\quad s_1 + s_2 + \cdots s_{2n-2} = (2n-2)_1 \cdot (3n-7)_{2n-4};$$
$$s_{12} + s_{13} + \cdots = (2n-2)_2 \cdot (3n-9)_{2n-4};\ \text{etc.}$$

Daher ist

$$(21)\qquad x = (3n-5)_{2n-4} - (2n-2)_1 \cdot (3n-7)_{2n-4} + (2n-2)_2 \cdot (3n-9)_{2n-4} - \cdots$$

Durch Identifizierung dieses in Reihenform erhaltenen Resultats mit dem schon bekannten Ausdruck $(2n-3)_{n-1} - (2n-3)_n$ für die gesuchte Zahl erhält man eine Identität, die auch durch die bekannten Beziehungen zwischen Binomialkoeffizienten beweisbar ist. Man kann jedoch in dieser Richtung noch weitergehen und unzählig viele Reihen wie die in (21) aufstellen, welche sämtlich gleich der eben genannten mit $\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$ identischen Zahl sein müssen. Man braucht nämlich nur daran zu denken, daſs

$$x = (n-2, n)^{2n-2}$$

identisch mit

$$(n-2, n)^{2n-2-h}\,(n-2, n)^h$$

ist, und demgemäſs in Formel (18):

jedes $a_i = n-2$, jedes $\alpha_i = n$, $q = 2n-2-h$ zu setzen.

So erhält man:

$$(22)\ x = [(3n-5-h)_{2n-4-h} - (2n-2-h)_1 \cdot (3n-7-h)_{2n-4-h} + (2n-2-h)_2 \cdot (3n-9-h)_{2n-4-h} - \cdots]$$
$$+ h_1 \cdot [(3n-6-h)_{2n-4-h} - (2n-2-h)_1 \cdot (3n-8-h)_{2n-4-h} + \cdots]$$
$$+ h_2 \cdot [(3n-7-h)_{2n-4-h} - (2n-2-h)_1 \cdot (3n-9-h)_{2n-4-h} + \cdots]$$
$$+ \cdots.$$

Die in (22) dargestellte Summe muſs also, unabhängig von h, gleich $\frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}$ werden. Auch rein arithmetisch läſst sich dies erhärten. Denn die bei (22) in den eckigen Klammern stehenden Summen befolgen das Gesetz der Reihe:

$$(c+d)_{c-2} - c_1 \cdot (c+d-2)_{c-2} + c_2 \cdot (c+d-4)_{c-2} - \cdots,$$

für welche man nach Zerlegung der Binomialkoeffizienten in lauter solche, die die Basis c oder d haben, das einfache Resultat:

$$c_{d+2} - c_{d+1}$$

erhält. Wir benutzen dieses Resultat für die Umformung der in (22) auftretenden eckigen Klammern, indem wir immer $c = 2n-2-h$ und für die i-te eckige Klammer $d = n-2-i$ setzen. So erhalten wir:

$$(24)\qquad \begin{aligned} x = {} & [(2n-2-h)_{n-1} - (2n-2-h)_{n-2}] \\ & + h_1 \cdot [(2n-2-h)_{n-2} - (2n-2-h)_{n-3}] \\ & + h_2 \cdot [(2n-2-h)_{n-3} - (2n-2-h)_{n-4}] \\ & + \cdots . \end{aligned}$$

Hieraus aber gewinnen wir nach der Formel

$$h_0 \cdot c_m + h_1 \cdot c_{m-1} + h_2 \cdot c_{m-2} + \cdots = (h+c)_m$$

das folgende von h unabhängige, von uns erwartete Resultat:

$$(25)\qquad x = (2n-2)_{n-1} - (2n-2)_{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!}.$$

II. Wir berechnen schliefslich noch nach Formel (20) die Z der Strahlen, welche $n-1$ beliebig gegebene $(n-3)$-dimensior lineare Räume in je einem Punkte zu schneiden vermögen, d. h. Zahl:

$$x = (n-3, n)^{n-1}.$$

Es ist

$$d_1 = d_2 = \cdots d_q = 3,\ q = n-1,\ e = \tfrac{3}{2}(n-1) + \tfrac{1}{2}(n-1) - 2 = 2n$$

Daher ist

$$s = (2n-4)_{n-3}, s_i = (2n-7)_{n-3}, s_{ik} = (2n-10)_{n-3}, s_{ikl} = (2n-13)_{n-3}$$

Demnach ist:

$$(26)\qquad \begin{aligned} x = {} & (2n-4)_{n-3} - (n-1)_1 \cdot (2n-7)_{n-3} \\ & + (n-1)_2 \cdot (2n-10)_{n-3} - (n-1)_3 \cdot (2n-13)_{n-3} + \cdots \end{aligned}$$

Diese für x erhaltene Reihe stimmt genau mit der Reihe über welche ich für dieselbe gesuchte Zahl schon in den Fund. Anz. (M. Ann., Bd. 26, S. 51) erhalten hatte.

§ 7. Erweiterung vom Strahl auf den $[p]$, aber nur für zwe beliebige Bedingungen.

Obwohl ich noch nicht imstande bin, die Erweiterung des den vorhergehenden Paragraphen entwickelten allgemeinen Resul (Formel (18) oder (20)) vom Strahl auf den p-dimensionalen linea Raum anzugeben, so konnte ich doch aus Spezialisierungen erken dafs in ähnlicher Weise, wie Formel (18) oder (20) von Binom koeffizienten abhängt, diese Erweiterung von den Koeffizienten hängt, die bei der Potenzierung einer $(p+1)$-gliedrigen Sum auftreten. Am leichtesten läfst sich die Verallgemeinerung Formel (18) für $q = 2$ erkennen, und zwar aus der Formel, die im 38. Bande der Math. Ann. auf Seite 600[1]) aufgestellt habe. V

1) In der Abhandlung: „Beziehungen zwischen den linearen Räumen erlegbaren charakteristischen Bedingungen".

dort, bezeichnen wir mit μ die dem $[p]$ auferlegte charakteristische Bedingung erster Dimension, die nach § 1 mit

$$(n-p-1,\ n-p+1,\ n-p+2,\ \cdots, n)$$

zu bezeichnen ist. Dann handelt es sich um die Bestimmung von

$$x = (a_0 a_1 a_2 \cdots a_p)(b_0 b_1 b_2 \cdots b_p)\,\mu^h.$$

Diese Bestimmung läfst sich aus Formel (5) der erwähnten Abhandlung bewerkstelligen, wenn man in derselben $b = c$ setzt, sie dann mit $(b_0 b_1 b_2 \cdots b_p)$ symbolisch multipliziert und schliefslich:

$$c_0 = n - b_p,\ c_1 = n - b_{p-1},\ c_2 = n - b_{p-2},\ \cdots c_p = n - b_0$$

setzt. Dann werden alle Summanden, die dort unter Σ zusammengefasst sind, gleich null, aufser

$$x_c (b_0 b_1 b_2 \cdots b_p)(n - b_p,\ n - b_{p-1},\ \cdots n - b_0),$$

welcher Summand gleich dem Koeffizienten x_c wird, weil es nur einen $[p]$ giebt, der die beistehenden beiden Bedingungen zugleich erfüllt. Deshalb ist die gesuchte Zahl gleich dem in Formel (8) der genannten Abhandlung stehenden Produkte von $h!$ mit einer Determinante, nur mufs man in derselben $n - n_p$ statt b_0, $n - b_{p-1}$ statt b_1, etc. bis $n - b_0$ statt b_p setzen. So erhält man also:

$$(27)\quad (a_0 a_1 \cdots a_p)(b_0 b_1 \cdots b_p)\,\mu^h = h! \begin{vmatrix} \frac{1}{(a_0+b_p-n)!} & \cdots & \frac{1}{(a_0+b_0-n)!} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(a_p+b_p-n)!} & \cdots & \frac{1}{(a_p+b_0-n)!} \end{vmatrix}.$$

Denkt man sich $h!$ mit den $(p+1)!$ Gliedern der Determinante multipliziert, so erhält man, da $h = (a_0 + \cdots a_p) + (b_0 + \cdots b_p) - (p+1)n$ sein mufs, in der That eine algebraische Summe der Polynomialkoeffizienten, die sich ergeben, wenn man eine $(p+1)$-gliedrige Summe in die h-te Potenz erhebt.

Hamburg, 29. Dezember 1891.

Bericht über die Versammlungen im 202. Vereinsjahr 1891/92.

Erstattet vom Jahrverwalter Dr. Edm. Hoppe.

Hauptversammlung am 9. Februar 1891.

Der abgehende Jahrverwalter Herr Wasserbauinspektor Bubendey erstattet den Bericht über das verflossene Gesellschaftsjahr und knüpft daran den Vorschlag, dafs hinfort in den Sitzungen über die im Austausch eingehenden Zeitschriften von einzelnen Mitgliedern kurze Referate gehalten werden möchten. Die Gesellschaft hat auf Grund dieser Anregung die einzelnen Journale verschiedenen Mitgliedern zu fortlaufenden Berichten überwiesen. Die Doubletten unserer Bibliothek werden, soweit sie fortlaufende Schriften darstellen, der Bibliothek der Gelehrtenschule überwiesen werden. Zum Adjunkten wird Herr Oberlehrer Dr. Jaerisch gewählt. Nachdem der Mitjahrverwalter Herr Dr. Hoppe dem Herrn Wasserbauinspektor Bubendey den Dank der Gesellschaft für die Leitung im 201. Vereinsjahre abgestattet, wird die Hauptversammlung geschlossen. An dieselbe schlofs sich ein Festessen, wie es der Tradition der Gesellschaft entspricht. An demselben nahmen mehrere Freunde der Mathematischen Gesellschaft teil, und fand das durch treffliche Reden und heitere Lieder gewürzte Mahl einen allseitig befriedigenden Verlauf.

Versammlung am 14. März.

Der Jahrverwalter legt den Kassenbericht des Vorjahres vor, dessen Abrechnung mit einem Kassensaldo von 77 ℳ 79 ₰ schliefst, und bittet Herrn Bauinspektor Bubendey Decharge zu erteilen. Die Gesellschaft beschliefst demgemäfs. Der Jahrverwalter teilt ferner mit, dafs nunmehr auf der Stadtbibliothek nur noch die Bände 7, 10, 12, 16 und 18 von Crelles Journal fehlen und bittet die Mitglieder etwaige Ankaufgelegenheit dieser Bände dem Vorsitzenden mitzuteilen. Herr Ingenieur Nagel wird als Mitglied der Gesellschaft aufgenommen.

Herr Oberlehrer Dr. Busche hält einen Vortrag über die Anwendung der komplexen Zahlen auf die Theorie der Strahlsysteme. Die Arbeit ist veröffentlicht als Programm der Hansa-Schule zu Bergedorf 1891. — Herr Professor Schubert teilt einige interessante Identitäten mit, welche sich bei seinen Anzahl-Untersuchungen über Räume zweiten Grades ergaben.

Versammlung am 11. April.

Herr Dr. Classen trägt vor über Maxwells Ableitung der Gleichungen der Elektrodynamik aus der allgemeinen Dynamik, indem derselbe von den Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ausgehend durch geeignete Transformation zu denjenigen Gleichungen gelangt, auf welchen die Hertzschen Untersuchungen beruhen. — Herr Professor Schubert setzt die Mitteilungen aus der vorigen Sitzung fort. Herr Dr. Hoppe referiert über eine Anzahl Arbeiten, welche in den Mitteilungen der Akademie der Wissenschaften in Berlin erschienen sind.

Versammlung am 9. Mai.

Es wird beschlossen, einen Beitrag zum Denkmal für G. S. Ohm zu bewilligen. Darauf hält Herr Wasser-Baudirektor Nehls einen Vortrag über Näherungswerte und Näherungskonstruktionen der Zahl π und über das Strecken von Kreisbögen im allgemeinen, in dessen erstem Teil derselbe die älteren und neuen Näherungskonstruktionen für π in Bezug auf Genauigkeit und leichte Ausführbarkeit vergleicht. Im zweiten Teil führt derselbe eine gröfsere Zahl zum Teil von ihm selbst herrührender Konstruktionen zur Streckung beliebig langer Kreisbögen vor und zeigt das Mafs der Annäherung. Hieran knüpft Herr Dr. Schröder eine Bemerkung, wie man aus einer Reihenentwicklung für π eine gröfsere Anzahl neuer Reihen ableiten könne.

Versammlung am 13. Juni.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs Herr Mahlke bei seiner Übersiedelung nach Berlin in die Reihe der auswärtigen Mitglieder eintrete. Ferner spricht der Vorsitzende den Dank der Gesellschaft Herrn Geh. Rat Prof. Neumayer für Übersendung des Katalogs der Bibliothek auf der Seewarte aus. Es wird beschlossen, die Ergänzung des als dritten Teil der Festschrift 1890 herausgegebenen Katalogs über mathematische Werke auf Hamburger öffentlichen Bibliotheken erst im Jahre 1894 erscheinen zu lassen. Herr Dr. Schröder hält einen Vortrag über die nichteuklidische Mafsbestimmung auf den Grundgebilden zweiter Stufe, und setzte damit die Betrachtungen eines früheren Vortrages, über welchen Bd. III, p. 34 dieser Mitteilungen referiert ist, fort. Die allgemeine für die Ebene geltende Mafsbestimmung wird auf einen Kegelschnitt gegründet, und zerfällt, je nachdem derselbe imaginär oder reell ist, in elliptische und hyperbolische Geometrie. Die charakteristischen Eigenschaften beider

werden dargestellt. Herr Dr. Bohnert, Dr. Schröder und Dr. Jaerisch referieren über Arbeiten aus dem American Journal, den Atti d. r. Accadem. d. Lincei und dem Journal für die reine und angewandte Mathematik.

Versammlung am 12. September.

Der Vorsitzende fordert zum Besuch des mit der Naturforscherversammlung in Halle verbundenen Mathematikerkongrefs auf, desgleichen zur Beteiligung an dem Commers zur Eröffnungsfeier des Naturwissenschaftlichen Museums. Herr Professor Schubert hält einen Vortrag mit dem Thema: Orientierendes über abzählende Geometrie in n Dimensionen, dessen Inhalt in den Mathematischen Annalen erscheinen soll.

Versammlung am 17. Oktober.

Der Vorsitzende berichtet, dafs im verflossenen Jahre 18 Exemplare des Katalogs der Gesellschaft verkauft seien. Herr Professor Schubert berichtet über den Mathematikerkongrefs in Halle und bemerkt, dafs ihm dort von Herrn Direktor Gerhard mitgeteilt sei, dafs Leibnitz mit dem Gründer unserer Gesellschaft in wissenschaftlichem Briefwechsel gestanden habe über Aufgaben der Kombinatorik. Herr Dr. Köpcke trägt vor über Beiträge zur Theorie der aus n Haupteinheiten zusammengesetzten komplexen Gröfsen in Anschlufs an den von Weierstrass an Schwarz geschriebenen Brief im Jahre 1883 über den gleichen Gegenstand. Herr Dr. Hoppe und Dr. Schröder berichten über neueste Publikationen deutscher und italienischer Gelehrten.

Versammlung am 14. November.

Die Herren Ingenieur A. Hübner und Hermann Oppenheimer werden als Mitglieder der Gesellschaft aufgenommen. Herr Oberlehrer Ahlborn hält einen Vortrag über die Versuche, die Mechanik vom Standpunkte der nichteuklidischen Geometrie zu behandeln, wie sie besonders von Chasles versucht sind. Der Vortrag zeigt die Methode und den Umfang der Versuche, aber auch ihre Unfruchtbarkeit für die wirkliche Mechanik. Herr Dr. Hoppe berichtet über einige deutsche, Herr Dr. Schröder über einige italienische neuere Arbeiten.

Versammlung am 12. Dezember.

Der Vorsitzende teilt mit, dafs vom ersten Teil der Festschrift 1890 zwanzig, vom zweiten einunddreifsig Exemplare im vorigen Jahre verkauft seien. Herr Dr. Classen redet über die Bedeutung der Quaternionen in der Physik. Indem der Vortragende die Ideen darstellt, welche zur Einführung der Quaternionen geführt haben, und die Fundamente der Quaternionenrechnung vorführt, giebt derselbe durch Anwendung auf konkrete Aufgaben der Physik das Material zur richtigen Wertschätzung dieser Rechnungsmethode, und zeigt, wie dieselbe in ihren Resultaten durch Einfachheit und Übersichtlichkeit die Darstellung im Koordinatensystem bei weitem übertrifft. Herr Dr. Bohnert referiert über eine Anzahl amerikanischer Arbeiten.

Versammlung am 9. Januar.

Der Jahrverwalter begrüfst die Gesellschaft im neuen Jahre und widmet dem Hinscheiden des Ehrenmitgliedes Herrn Professor Kronecker in Berlin Worte teilnehmender Trauer. Ferner macht derselbe Mitteilung von der wegen des Buchdruckergehilfenstrikes möglichen Verzögerung der Ausgabe der diesjährigen Mitteilungen der Gesellschaft. Herr H. Oppenheimer hält einen Vortrag über das ebene Nullsystem und seine Anwendung auf die Kurven 3ter Ordnung, dessen Inhalt der Vortragende anderweit publizieren wird. Herr Wasserbauinspektor Bubendey referiert über ein von ihm ausgeführtes barometrisches Höhennivellement bei Oldesloe.

Über die Versammlung am 13. Februar wird im nächsten Hefte berichtet werden.

Die Gesellschaft zählte bei Beginn des 202. Vereinsjahres 54 ordentliche hiesige Mitglieder. Im Laufe des Jahres trat ein Mitglied in die Reihe der auswärtigen über und drei Herren wurden neu aufgenommen. Am 29. Dezember verlor die Gesellschaft ihr Ehrenmitglied Herrn Professor Kronecker durch den Tod. So ist der gegenwärtige Bestand der Gesellschaft folgender: Zwölf Ehrenmitglieder, sechs und funfzig hiesige ordentliche Mitglieder und sechszehn auswärtige Mitglieder.

Unsere Gesellschaft steht in Schriftenaustausch mit folgenden gelehrten Körperschaften und Herausgebern wissenschaftlicher Zeitschriften:

Wiskundig Genootschap in Amsterdam.

Reale Accademia dei Lincei in Rom.

Reale Accademia della Scienze fisiche e matematiche in Neap
Société Mathématique de France in Paris.
John Hopkins University in Baltimore (American Journal Mathematics).
Dr. Teixeira in Coimbra (Jornal de Sciencias math. e astronom
Kaiserlich Leopoldinisch Carolinische Deutsche Akademie d Naturforscher.
Königliche Akademie der Wissenschaften in Berlin (Mitteilung der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse und Sitzun berichte).
Königl. Physikalisch-Ökonomische Gesellschaft in Königsbe
Naturforschende Gesellschaft in Zürich.
Circolo Matematico di Palermo.
Akademisch mathematische Vereine zu Berlin und Göttingen.

Unsere Bibliothek erhielt ferner wertvolle Zuwendungen dur eigene Arbeiten der Herren:

J. Bergbohm, P. Bergholz, F. Bremer, Francesco Brioscl M. Cantor, O. Fulst, P. Gräfenhan, J. P. Gram, E. Hollaend A. Hübner, A. Hurwitz, P. Jaerisch, L. Kiepert, M. E. I moine, Th. Lohnstein, L. Lorenz, M. Peche, R. Potinecl P. H. Schoute, H. Schubert, H. Servus, G. Spoerer, A. Sprur R. Sturm, O. Venske, A. Voss, G. D. E. Weyer, H. S. Whi E. Wölffing.

Diesen Herren, sowie dem Direktor der hiesigen Seewar Herrn Geh. Rat Dr. Neumayer, welcher der Gesellschaft die Pul kationen der Seewarte überreichte, sprechen wir den verbindlichst Dank hierdurch aus.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 3. Ausgegeben im Februar 1893.

Bemerkung über die Funktion $E(z)$ mit komplexem Argument.

Von E. Busche in Bergedorf.

Mit $E(z)$ bezeichne ich diejenige ganze Zahl von der Form $a + bi$, deren reeller Bestandteil a die gröfste in dem reellen Bestandteil von z enthaltene ganze Zahl und deren reeller Faktor b des imaginären Bestandteiles die gröfste in dem reellen Faktor des imaginären Bestandteils von z enthaltene ganze Zahl ist. Um Unterscheidungen, die für das Folgende nicht von Wichtigkeit sein würden, zu vermeiden, möge vorausgesetzt werden, dafs in $z = x + yi$ weder x noch y ganzzahlig ist. Liegt dann z in dem von 4 „Elementarlinien" begrenzten Bereich mit den Ecken $a + bi$, $a + 1 + bi$, $a + 1 + (b + 1)i$, $a + (b + 1)i$, so ist $E(z) = a + bi$, z. B. $E(-3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}i) = -4 + 2i$.

Die reelle Funktion $E(z)$ ist bekanntlich für die Zahlentheorie namentlich durch die bekannte Reciprocitäts-Formel[1])

$$(1) \qquad \sum_{x=E(a)+1}^{x=E(b)} E(f_{21}(x)) = -\sum_{y=E(f_{21}(a))+1}^{y=E(f_{21}(b))} E(f_{12}(y)) - E(f_{21}(a)) \cdot E(a) + E(f_{21}(b)) \cdot E(b)$$

von Bedeutung, in der die Funktion $y = f_{21}(x)$ und deren inverse Funktion $x = f_{12}(y)$ innerhalb des in Betracht kommenden Intervalles endlich, stetig und eindeutig sind. Ein Analogon dieser Formel für den Fall eines komplexen Argumentes der Funktion $f_{21}(x)$ ist, wie

1) Der wichtigste Spezialfall dieser Formel ist von Gaufs angegeben, die allgemeine Gleichung ist von Dirichlet aufgestellt worden. Auch Eisenstein, Sylvester, E. Schering und andere haben sich mit der Verallgemeinerung der Gaufsschen Formel beschäftigt.

mir scheint, nicht vorhanden, so lange man nicht neben der Funktion $E(z)$ eine andere Funktion $[\mathfrak{B}]$ einführt, die von Gaufs in dem Nachlafs zur Theorie der biquadratischen Reste (Werke, Bd. 2) zuerst benutzt worden ist. Diese Funktion bezeichnet die Anzahl von ganzen Zahlen, die in dem die Ebene einfach überdeckenden Bereich $\mathfrak{B}$ liegen, diese Anzahl positiv genommen, wenn der Bereich in der positiven, negativ, wenn er in der entgegengesetzten, negativen Richtung umlaufen wird. Die hier zu benutzenden Anzahlfunktionen $[\mathfrak{B}]$ sind alle nicht negativ. Wenn alle vorkommenden Bereiche nach demselben Gesetz gebildet sind, so genügt es, einen ausgezeichneten Punkt der Begrenzung anzugeben, um den Bereich zu charakterisieren, und in diesem Falle soll dieser in eckige Klammern eingeschlossene Punkt die Anzahl der ganzen Zahlen des Bereiches bezeichnen. Indem ich diese Funktion $[z]$ einer komplexen Zahl z der Funktion $E(z)$ gegenüberstelle, habe ich im 110. Bande des Crelleschen Journals die folgende Formel abgeleitet, die ich als Analogon der Formel (1) betrachte:

$$(2)\quad \sum\nolimits_{\varrho} E(f_{21}(\varrho)) = -\sum\nolimits_{\nu}[f_{12}(q_\nu)] - i\sum\nolimits_{\mu}[f_{12}(q_\mu)] + [\mathfrak{B}]\cdot\sum \pm w_f.$$

Eine Vereinfachung dieser Formel ist der Zweck der vorliegenden Zeilen. Da diese Vereinfachung sich aber nur auf das letzte Glied der rechten Seite bezieht, so ist es nicht nötig, hier die Bedeutung aller vorkommenden Buchstaben zu erörtern. Es mufs aber erwähnt werden, dafs ϱ alle ganzen Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}$ durchläuft, und dafs der Bereich $f_{21}(\mathfrak{B})$ der Funktion $w = f_{21}(z)$ ein „einfacher" Bereich ist, d. h. ein solcher, der von jeder zu einer der Achsen parallelen Elementarlinie nur an einer Eintrittsstelle und einer Austrittsstelle geschnitten wird. Die in dem Bereich $f_{21}(\mathfrak{B})$ liegenden Punkte w_f heifsen „Faktorpunkte", weil sie als Faktoren aller $[\mathfrak{B}]$ Zahlen des Bereiches $\mathfrak{B}$ in der Formel vorkommen. Sie liegen in der Nähe des Randes von $f_{21}(\mathfrak{B})$ so, dafs entweder die Strecken w_f, $w_f + 1$ und w_f, $w_f + i$ oder die Strecken $w_f + 1$, $w_f + 1 + i$ und $w_f + i$, $w_f + 1 + i$ von dem Rande durchschnitten werden. In dem ersten Falle ist der Faktorpunkt mit dem positiven, in dem zweiten Falle mit dem negativen Vorzeichen in Rechnung zu ziehen, und es sind dementsprechend positive und negative Faktorpunkte zu unterscheiden. Auf dem Rande von $f_{21}(\mathfrak{B})$ sollen der Einfachheit wegen keine ganzen Zahlen liegen, was übrigens an dem abzuleitenden Resultate nichts ändern würde. Es möge auch vorausgesetzt werden, dafs der Bereich $f_{21}(\mathfrak{B})$ an keiner Stelle so schmal ist, dafs zwischen zwei ganzen

Zahlen, die sich nur um eine Einheit voneinander unterscheiden, zwei Stücke der Grenzlinie des Bereiches hindurchgehen, die nicht selbst unmittelbar benachbart sind.

Nach der angegebenen Bestimmung der Faktorpunkte w_ν könnte es scheinen, als ob das Aggregat $\Sigma \pm w_\nu$ in komplizierter Weise von der Begrenzung des Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$ abhinge, und bei der Veröffentlichung der Formel (2) war ich auch der Ansicht, dafs es ganz naturgemäfs wäre, wenn bei dieser Formel an die Stelle der beiden Glieder der Formel (1), die zu der Summe auf der rechten Seite hinzukommen, eine von einer ganzen Reihe von Randpunkten von $f_{21}(\mathfrak{B})$ abhängige Summe träte. Das ist nun aber, wie ich bei einigen Anwendungen der Formel zuerst durch Induktion gefunden habe, keineswegs der Fall. Die Summe $\Sigma \pm w_\nu$ läfst sich vielmehr bei jeder zulässigen Begrenzung des einfachen Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$ direkt angeben. Der Satz, der dies ausspricht, und der, auch abgesehen von der durch ihn herbeigeführten Vereinfachung der Formel (2), ein — so zu sagen — topologisches Interesse bietet, lautet folgendermafsen: Die Summe der mit den richtigen Vorzeichen genommenen Faktorpunkte ist gleich dem gröfsten reellen Bestandteil, den eine der in dem betrachteten Bereich liegenden ganzen Zahlen besitzt, vermehrt um den gröfsten imaginären Bestandteil, den eine dieser Zahlen hat.

Bei dem Beweise dieses Satzes ist zunächst zu bedenken, dass die Faktorpunkte nur an dem Teil der Begrenzung des Bereiches $f_{21}(\mathfrak{B})$ vorkommen, der von dem Randpunkte mit dem gröfsten reellen Bestandteil sich nach dem Randpunkte mit dem gröfsten imaginären Bestandteil hinerstreckt (von rechts unten nach links oben). Zwischen diesen Endpunkten werde diese Randstrecke in Abschnitte zerlegt, die abwechselnd eine Neigung zwischen 0^0 und 45^0 und eine solche zwischen 45^0 und 90^0 gegen die negative Richtung der reellen Achse haben. Hat ein Stück des Randes eine konstante Neigung von 45^0, so kann es beliebig entweder zu dem einen oder dem anderen der beiden es einschliefsenden Abschnitte gerechnet werden. Die Gruppierung der Faktorpunkte ist folgende: Der ganze Punkt mit dem gröfsten reellen Bestandteil, in dessen Nachbarschaft der Rand sich also einerseits nach links unten, andererseits nach links oben abbiegt, ist immer ein positiver Faktorpunkt. An einem Abschnitt, der um weniger als 45^0 geneigt ist, findet man immer einen negativen und einen positiven Faktorpunkt unmittelbar übereinander, so dass bei gleichem reellen Bestandteil der positive Faktorpunkt einen um i gröfseren imaginären Bestandteil hat, und man trifft ein solches Paar jedesmal

beim Überschreiten einer der reellen Achse parallelen Elementarlinie. An einem Abschnitt, der um mehr als 45^0 geneigt ist, trifft man jedesmal beim Überschreiten einer der imaginären Achse parallelen Elementarlinie einen positiven Faktorpunkt und links daneben einen negativen Punkt mit demselben imaginären Bestandteil, dessen reeller Bestandteil um 1 kleiner ist. Beim Übergang von einem Abschnitt zum nächsten findet man einen alleinstehenden Faktorpunkt, der positiv oder negativ ist, je nachdem der Bereich an der Übergangsstelle konvex oder konkav ist. Der letzte Faktorpunkt, der von allen ganzen Zahlen des Bereiches den gröfsten imaginären Bestandteil hat, ist wieder immer ein positiver Punkt.

Aus dieser Verteilung der Faktorpunkte sieht man nun sofort, dass der zu beweisende Satz über ihre Summe richtig ist, wenn nur ein Abschnitt überhaupt vorhanden ist. Ist dieser nämlich um weniger als 45^0 geneigt, so ist der erste Faktorpunkt $x_0 + y_0 i$ ein alleinstehender positiver Punkt, der letzte, $x_1 + y_1 i$, ist der positive Punkt eines Paares. Solcher Paare sind im ganzen $y_1 - y_0$ vorhanden; sie liefern also zusammen den Beitrag $(y_1 - y_0) i$ zu der Summe $\Sigma \pm w_f$, so dafs diese gleich $x_0 + y_0 i + (y_1 - y_0) i = x_0 + y_1 i$ gefunden wird, wie es der Satz verlangt. Schliefst sich an den ersten Abschnitt ein zweiter, der um mehr als 45^0 geneigt ist, so tritt ein negativer alleinstehender Faktorpunkt, $x' + y_1 i$, auf, dessen imaginärer Bestandteil derselbe ist, wie der des letzten Faktorpunktes an dem ersten Abschnitt, und dessen reeller Bestandteil x' gleich dem reellen Bestandteil des ersten positiven Faktorpunktes an dem zweiten Abschnitt ist. Ist der letzte Faktorpunkt des zweiten Abschnittes $x_2 + y_2 i$, so ist dieser ein alleinstehender positiver Punkt, und es treten an dem zweiten Abschnitt $x' - x_2$ Paare auf, deren jedes den Beitrag 1 zu der Summe liefert. Es ist also $\Sigma \pm w_f = x_0 + y_1 i - (x' + y_1 i) + (x' - x_2) + x_2 + y_2 i = x_0 + y_2 i$, wie es sein soll. Kommt nun noch ein dritter Abschnitt vor, der wieder um weniger als 45^0 geneigt ist, so bleibt der schon in Rechnung gezogene Punkt $x_2 + y_2 i$ alleinstehend, der letzte Punkt $x_3 + y_3 i$ ist der positive Punkt des letzten der an dem dritten Abschnitt liegenden Paare, deren Anzahl $y_3 - y_2$ und deren Beitrag $(y_3 - y_2) i$ ist, und die Summe aller Faktorpunkte ist jetzt $x_0 + y_2 i + (y_3 - y_2) i = x_0 + y_3 i$, so dafs der Satz sich wieder bestätigt. In derselben Weise kann man nun offenbar fortfahren und zeigen, dafs der Satz, wenn er für n Abschnitte richtig ist, auch für $n + 1$ Abschnitte besteht.

Ist der erste Abschnitt um mehr als 45^0 geneigt, so ist der erste Faktorpunkt $x_0 + y_0 i$ der positive Punkt eines Paares, der letzte

Punkt $x_1 + y_1 i$ ein positiver alleinstehender Punkt, und es sind $x_0 - x_1$ Paare vorhanden, deren jedes 1 zu $\Sigma \pm w_j$ beiträgt. Diese Summe ist also $x_0 - x_1 + x_1 + y_1 i = x_0 + y_1 i$. Und wenn in diesem Falle ein zweiter Abschnitt vorhanden ist, kann man jetzt gerade so fortfahren, wie im ersten Falle beim Auftreten des dritten Abschnittes. Überhaupt überzeugt man sich leicht, dafs dieser zweite Fall von dem ersten nicht verschieden ist, da nur die Abschnitte mit gerader und ungerader Ordnungszahl gegeneinander vertauscht sind.

Bei Gelegenheit einer Herleitung der Formel (1) aus einer allgemeineren Formel (Crelles Journal, Bd. 103) habe ich auf die Analogie aufmerksam gemacht, die zwischen dieser Gleichung und einer gewissen Beziehung zwischen bestimmten Integralen besteht. Auf eine ähnliche Beziehung zwischen Doppelintegralen will ich hier nur hingewiesen haben. Sie läfst erkennen, dafs der auf den ersten Blick überraschend einfache Wert von $\Sigma \pm w_j$ dem eigentlichen Inhalt der Formel (2) durchaus angemessen ist.

Die Bewegungsachsen gestützter starrer Körper.

Von A. Hübner, Ingenieur in Altona.

Die Aufgabe, die Bewegungsachsen eines beliebig gestützten starren Körpers zu bestimmen, ist durch die Arbeiten Mannheims, Somoffs und Balls als gelöst zu betrachten.[1]) Trotzdem wird man, wie ich hoffe, nachstehend eine Reihe neuer Definitionen und Sätze finden, die geeignet erscheinen, über die Frage weiteres Licht zu verbreiten. So dürfte der fundamentale Satz, dafs jede Bewegung und jeder Kräftezustand zwei Achsen hat, mit allen seinen liniengeometrischen Folgerungen hier zum erstenmal auftreten. Auch die Untersuchung der Sonderformen, welche das in seiner allgemeinsten Gestalt bekannte Achsensystem für dreifache Stützung oder dreifachen Bewegungszwang annehmen kann, ist meines Wissens bisher noch nicht durchgeführt worden. In den Kapiteln, welche

1) Mannheim, Mémoires des savants étrangers t. XX u. XXII und Cours de géométrie descriptive, Paris 1880. Somoff, Theoretische Mechanik, aus dem Russischen übersetzt von A. Ziwet, Leipzig, Teubner 1878/79. Ball, Theory of screws, Dublin 1876. Ball-Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme, Berlin 1889. Man vergleiche auch Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig, Teubner, 1879/80.

das Cylindroid, die zwei- und vierfache Stützung behandeln, dürfte der mit dem Gegenstand vertraute Leser ebenfalls noch mancherlei Neues entdecken, wie denn auch die ganze Herleitung, die Einführung der Auflagerkräfte und die rein synthetische Konstruktion der Achsensysteme, wie ich glaube, auf volle Selbständigkeit Anspruch machen kann. Ich will versuchen, in dem folgenden eine zusammenhängende Darstellung zu geben und dabei das Bekannte möglichst kurz zu fassen.

§ 1. Bewegungsachsen.

Die Achse einer unendlich kleinen, also einer Schraubenbewegung, kann als diejenige Gerade definiert werden, welche bei der Bewegung ihre Lage nicht ändert. Ist w die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Achse und v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung längs derselben, so giebt der Parameter $\frac{v}{w}$ das Steigungsverhältnis der in der Entfernung eins von der Achse befindlichen Punkte an; er ist positiv bei rechtsgängiger und negativ bei linksgängiger Schraubenbewegung, er ist null bei reiner Drehung und unendlich grofs bei rein fortschreitender Bewegung.

Die fortschreitende Bewegung längs einer endlichen Achse ist gleichbedeutend mit einer Drehung um die unendlich ferne Gerade der zur Achse senkrechten Ebenen. Da die unendlich ferne Gerade einer Ebene alle in der Ebene liegenden Richtungen in sich enthält, so kann auch umgekehrt jede Drehung oder fortschreitende Bewegung innerhalb einer Ebene aufgefafst werden als eine Verschiebung längs der unendlich fernen Geraden jener Ebene. Auch die Drehung um eine zur Ebene senkrechte Achse, welche ja in der Ebene als eine Drehung um den Schnittpunkt der Achse erscheint, ist gleichzeitig eine fortschreitende Bewegung längs der unendlich fernen Geraden der Ebene; mithin ist die Schraubenbewegung um diese senkrechte Achse gleichzeitig eine Schraubenbewegung um die unendlich entfernte Gerade der Ebene, nur vertauschen alsdann die Einzelbewegungen ihren Charakter: die Drehung um die endliche ist eine fortschreitende Bewegung in Bezug auf die unendlich ferne, und die fortschreitende Bewegung in Bezug auf die endliche ist eine Drehung um die unendlich ferne Achse. Demnach hat jede Bewegung zwei Achsen denn mit der endlichen ist eine unendlich ferne Achse bestimmt welche die zugehörige unendlich ferne Achse heifsen möge, und welche in den zur endlichen Achse senkrechten Ebenen liegt. Au der Lage der unendlich fernen Achse dagegen kann man ohne weitere

die Lage der zugehörigen Achse nicht bestimmen, weil jeder Strahl der betreffenden Richtung, unter Umständen sogar wieder ein unendlich ferner Strahl, diese Rolle übernehmen kann.

Die fortschreitende Bewegung in der Richtung einer endlichen Achse hat nicht nur zwei, sondern unendlich viel Achsen, da jede der Bewegungsrichtung parallele Gerade als Achse anzusehen ist. Um die unendlich ferne Gerade der hierzu senkrechten Ebenen findet eine reine Drehung statt. Die fortschreitende Bewegung, welche von a nach b erfolgen möge, kann beliebig aus zwei zu einander normalen Seitenbewegungen ac und cb zusammengesetzt gedacht werden. Legt man durch a eine Ebene senkrecht zu bc, so kann in Bezug auf die unendlich entfernte Gerade dieser Ebene die Bewegung ac als eine Längsverschiebung und die Bewegung cb als eine Drehung, die Gesamtbewegung ab also als eine Schraubenbewegung angesehen werden. Von jeder andern durch a gelegten Ebene läfst sich dasselbe nachweisen, und hieraus folgt, dafs beim Vorhandensein einer rein fortschreitenden Bewegung nicht nur alle in die betreffende Richtung fallenden Geraden, sondern auch alle unendlich fernen Geraden als Bewegungsachsen zu gelten haben, und zwar erscheint in Bezug auf letztere die Bewegung im allgemeinen als eine Schraubenbewegung.

Noch anschaulicher werden diese Verhältnisse, wenn man die oben gegebene Definition der Bewegungsachsen als derjenigen Geraden, welche bei der betreffenden Bewegung ihre Lage nicht ändern, anwendet. Wird einem Körper eine Drehung um eine endliche Achse erteilt, so verändern alle seine Ebenen ihre Lage mit Ausnahme derjenigen, welche die Achse rechtwinklig schneiden. In den letztgenannten Ebenen ändern alle Geraden ihre Lage, nur nicht die gemeinsame unendlich ferne Gerade. Daraus folgt, dafs einer endlichen Achse für Drehbewegung stets eine und nur eine unendlich ferne Achse und zwar für fortschreitende Bewegung zugeordnet ist. Erfährt dagegen ein Körper eine Parallelverschiebung, so gelangen alle seine Ebenen in Lagen, welche zu der ersten Lage parallel sind, so dafs die unendlich fernen Geraden aller Ebenen ihre Lage beibehalten. Die im Endlichen liegenden Geraden verschieben sich parallel mit sich selbst, und nur diejenigen, welche in die Bewegungsrichtung fallen, decken sich mit ihrer ersten Lage. Ist drittens die Bewegung eines Körpers schraubenförmig um eine endliche Achse, so entspricht dieser Achse, um welche ja auch eine Drehung stattfindet, wieder nur eine einzige zugehörige unendlich ferne Achse und zwar ebenfalls für schraubenförmige Bewegung. Als Kennzeichen dafür, ob in einer beliebigen Ebene die unendlich ferne Gerade eine Bewegungsachse

ist, gilt demnach entweder das Vorhandensein irgend einer rein fortschreitenden Bewegung oder, falls es eine solche nicht giebt, das Vorhandensein einer im Endlichen liegenden und zu der Ebene senkrecht gerichteten Bewegungsachse.

§ 2. Auflagerkräfte.

Wird ein starrer Körper in einem seiner Punkte durch eine Fläche gestützt, so dafs der betreffende Punkt in der Fläche, und zwar ohne Reibung, gleitet, so wirkt in jenem Punkt auf den Körper infolge äufserer Kräfte ein Widerstand, eine sogenannte Auflagerkraft ein, deren Lage durch den Auflagerpunkt und durch die Richtung normal zur Auflagerfläche gegeben ist. Auch bei den in der Technik vorkommenden Stützungen kann die Lage der Auflagerkräfte im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt werden. Durch solche Unterstützungen werden die Bewegungen eines Körpers einem Zwange unterworfen, und jede Auflagerkraft verringert im allgemeinen die Bewegungsmöglichkeit, indem sie diejenigen Bewegungen verhindert, bei denen sie eine negative Arbeit leisten müfste. Auf Bewegungen, bei welchen sie die Arbeit Null verrichtet, also auf das Gleiten längs einer gegebenen Lagerbahn, hat die Auflagerkraft keinen Einfluſs, und die positive Arbeit kommt für sie, gemäfs ihrer Natur als bloſser Widerstand, überhaupt nicht in Betracht.

Eine Auflagerkraft B habe von einer Achse A den kürzesten Abstand a und schliefse mit ihr den Winkel α ein. Damit bei einer mit dem Parameter $\frac{v}{w}$ erfolgenden Bewegung um die Achse A die Auflagerkraft B keine Arbeit leiste, mufs die bekannte Bedingung

$$a \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{w}$$

erfüllt sein. Dieselbe ist gleichbedeutend mit der Forderung, dafs die Bahn eines beliebigen Punktes der Kraftlinie normal zur letzteren gerichtet sei. Hat man n Auflagerkräfte $B_1 B_2 \dots B_n$ und sucht man eine Achse A, deren kürzeste Abstände von den Kräften mit $a_1 a_2 \dots a_n$ und deren Neigungswinkel zu den Kräften mit $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ bezeichnet werden mögen, so gelten, wenn um diese Achse eine Bewegung ohne Arbeitsverrichtung der Kräfte möglich sein soll, für die Lage der Achse die $n - 1$ Gleichungen

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = \dots \cdot a_n \cdot \operatorname{tg} \alpha_n.$$

Die Gesamtheit der Geraden, deren Wert $a \cdot \operatorname{tg} \alpha$ in Bezug auf eine bestimmte Achse derselbe ist, bildet einen linearen Strahlen-

komplex, der durch diese Eigenschaft allein definiert werden kann, und jene Achse ist die Hauptachse des Komplexes. Demnach ist die Aufgabe, die Bewegungsachsen eines beliebig gestützten starren Körpers zu bestimmen, gleichbedeutend mit dem Aufsuchen der Hauptachsen aller linearen Strahlenkomplexe, die durch die gegebenen Auflagerkraftlinien hindurchgehen. Den so gewonnenen Achsen sind die zugehörigen unendlich fernen hinzuzufügen. Fünf Gerade im Raum bestimmen, allgemein gesprochen, einen linearen Komplex; vier Gerade bestimmen ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse, welches die Basis eines ganzen Komplexbüschels ist; drei Gerade liegen in einer Regelschar, und diese ist der Durchschnitt, der Träger eines Komplexbündels; die Gesamtheit endlich aller linearen Komplexe, welche durch zwei gegebene Gerade hindurchgehen, bildet ein Komplexgebüsch. Demnach haben wir bei fünf Auflagerkräften einen Komplex, eine Bewegung, bei vier Auflagerkräften die Hauptachsen eines Komplexbüschels, bei drei Auflagerkräften die Hauptachsen eines Komplexbündels und bei zwei Auflagerkräften die Hauptachsen eines Komplexgebüsches.

§ 3. Einfache Stützung.

Für einen einfach gestützten Körper, also etwa für einen Ball an einem Faden, ist jede beliedige Gerade des Raumes die Achse einer Bewegung, bei welcher die Auflagerkraft keine Arbeit leistet. Mit der Lage der Achse sind die Gröfsen a und α und somit der Parameter der Bewegung gegeben. Die Achsen mit einem bestimmten Parameter genügen in Bezug auf die Auflagerkraft der Bedingung

$$a \cdot \operatorname{tg} \alpha = \text{konstans}$$

und bilden daher einen linearen Komplex mit der Auflagerkraftlinie als Hauptachse. Die Geraden, welche die Kraftlinie schneiden, sind die Achsen für reine Drehung, die Geraden in den Ebenen normal zur Kraftrichtung sind die Achsen für fortschreitende Bewegung. Die Kongruenz aller Komplexe gleichen Parameters sind die Geraden, welche die Kraftlinie senkrecht schneiden; diese sind daher Achsen für jede beliebige Rewegung ($a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0 \cdot \infty$).

§ 4. Das Cylindroid.

Ehe die Achsensysteme der mehrfach gestützten Körper behandelt werden, mag das Cylindroid, das für diese Systeme von hervorragender

Bedeutung ist, eine kurze Besprechung erfahren.[1]) Das Cylindroid ist eine Regelfläche dritten Grades, und die erzeugende Regelschar dritter Ordnung läfst sich wie folgt ableiten.

Es sei der Punkt o die Projektion einer zur Zeichnungsebene senkrechten Geraden L[2]); man lege durch o einen beliebigen Kreis und zwei beliebige, den Kreis in a und b treffende Strahlen. Man betrachte die letzteren als die Projektionen zweier auf L sich schneidenden, der Bildebene parallelen Geraden, deren Abstand von der Bildebene proportional dem Abstande des Kreismittelpunktes m von der Sehne ab ist. Denkt man sich die Kreisschnittpunkte aller zu ab parallelen Sehnen mit o verbunden und jedes so gewonnene Strahlenpaar in einem Abstande von der Bildebene, der dem Abstande des Kreismittelpunktes von der betreffenden Sehne proportional ist, so bilden diese die Gerade L senkrecht schneidenden Strahlen die erzeugende Regelschar des Cylindroides. Der zu ab parallele Durchmesser cd hat von m den Abstand Null, und die aufeinander senkrechten Strahlen oc und od liegen somit in der Bildebene selbst. Sie sind die Hauptachsen, ihr Schnittpunkt o ist der Mittelpunkt, und ihre Ebene, also in diesem Fall die Ebene der Zeichnung, ist die Mittelebene des Cylindroides.

Eine parallele Sehne ef, welche auf der anderen Seite von m und in gleichem Abstande wie ab liegt, bestimmt zwei Strahlen oe und of (der Buchstabe o bezeichnet hier nicht mehr den Mittelpunkt sondern allgemein einen Punkt auf L), welche von der Mittelebene ebenso weit abliegen wie oa und ob, aber auf entgegengesetzter Seite. Zwei Strahlen wie oa und oe oder wie ob und of, die auf entgegengesetzten Seiten der Mittelebene in gleichem Abstande von letzterer und den Hauptachsen symmetrisch liegen, will ich zwei zugeordnete oder sich entsprechende Strahlen des Cylindroides nennen. Alle Paare zugeordneter Strahlen bilden ebenso wie in der Projektion auch auf dem Cylindroide eine Involution.[3]) Die nicht zugeordneten Strahlen, welche auf entgegengesetzten Seiten der Mittelebene in gleichem Abstande von ihr liegen, schliefsen stets einen rechten Winkel miteinander ein. Die Hauptachsen sind offenbar sich selbst zugeordnet.

1) Ball, Theory of screws. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ball-Gravelius, Theoretische Mechanik starrer Systeme. Zu allererst behandelte diese Fläche Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Nr. 86.

2) Der Leser wird ersucht, sich die Zeichnung selbst zu machen.

3) Sturm, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie. I. Teil. Leipzig, Teubner 1892. S. 170.

Die parallelen Sehnen in den Endpunkten des zu ab normalen Kreisdurchmessers gh berühren den Kreis in diesen Punkten, und die beiden Strahlen des Cylindroides fallen je in einen einzigen og oder oh zusammen, die mit den Hauptachsen Winkel von 45° einschliefsen. Diese Cylindroidstrahlen haben den gröfsten Abstand von der Mittelebene, sie schneiden die Gerade L, die Doppelgerade oder Leitgerade des Cylindroides, in zwei Kuspidalpunkten, und die durch sie parallel zur Mittelebene geführten Ebenen sind zwei Kuspidalebenen. Auch gehen durch sie normal zur Mittelebene zwei Symmetrieebenen des Cylindroides.

Durch ein Paar zugeordneter Strahlen ist das Cylindroid vollständig bestimmt. Sind beispielsweise die zugeordneten Strahlen ob und of gegeben, so zeichnet man in der Mittelebene den beliebigen, durch o gehenden Kreis obf, zieht den Strahl oa normal zu of und hat damit die Richtung der parallel sich verschiebenden Sehne ab gewonnen. Da ferner durch den halben kürzesten Abstand der gegebenen Geraden und durch den Abstand des Kreismittelpunktes von der Sehne ab das Verhältnis der Strahlenabstände von der Mittelebene gegeben ist, so ist das Cylindroid völlig bestimmt. Nennt man den Winkel, den zwei zugeordnete Geraden miteinander bilden, φ und ihren kürzesten Abstand p, ferner den Abstand der beiden Kuspidalpunkte c, so gilt die aus der angegebenen Konstruktion leicht abzuleitende Gleichung

$$\frac{p}{\sin \varphi} = c.$$

Der Kreis kann als die Projektion eines zur Mittelebene senkrechten Kreiscylinders angesehen werden. Denkt man sich die parallelen Sehnen ab nicht in der Mittelebene selbst, sondern jedesmal in der Höhe des zugehörigen Strahlenpaares, so erfüllen sie, da ihr Abstand von der Mittelebene linear wächst, eine die Mittelebene in der Geraden cd schneidende Ebene Σ. Der Schnitt von Σ mit dem Kreiscylinder ist eine ebenfalls in dem Kreis projizierte Ellipse, welche die Schnittpunkte der parallelen Sehnen mit den zugehörigen Strahlenpaaren enthält, welche also auch den Durchschnitt der Ebene Σ mit dem Cylindroide darstellt. cd ist die kleine Achse der Ellipse. Die durch o parallel zu ab gelegte Sehne oi bestimmt zwei Cylindroidstrahlen, von denen der eine den Kreiscylinder in o berührt und der andere mit oi zusammenfällt. Die Ebene Σ schneidet also das Cylindroid aufser in einer Ellipse noch in einem Strahl oi, sie ist eine Berührebene des Cylindroides, und i ist der Berührungspunkt. Da der Kreis ganz beliebig angenommen war, so haben wir die Sätze:

Jeder gerade, die Leitgerade als Seite enthaltende Kreiscylinder schneidet das Cylindroid in einer Ellipse; ferner: Jede Berührebene hat mit dem Cylindroid aufser einer Erzeugenden eine Ellipse gemein, deren senkrechte Projektion auf die Mittelebene ein durch den Cylindroid-Mittelpunkt gehender Kreis ist.

Der dem Strahl oi zugeordnete ok auf der andern Seite der Mittelebene erscheint in der Projektion als Kreisdurchmesser. k sei der Punkt, in welchem jener Strahl den Kreiscylinder trifft, also ein Punkt der Ebene Σ. Jeder von k ausgehende, in Σ liegende Strahl trifft einen Strahl des Cylindroides auf dem Kreiscylinder, also unter rechtem Winkel, denn die Projektion des Winkels ist ein rechter, und der eine Schenkel, nämlich der Strahl des Cylindroides, ist der Projektionsebene parallel. Man kann k als einen beliebigen Punkt des Cylindroides auffassen, dann ist die Ebene Σ bestimmt durch k und durch den Strahl oi, welcher dem den Punkt k enthaltenden zugeordnet ist. Daraus folgt: Die von irgend einem Punkte des Cylindroides auf dessen Erzeugende gefällten Lote liegen in einer Ebene und bilden einen gewöhnlichen Strahlenbüschel. Die Ebene des Büschels ist eine Berührebene des Cylindroides.

Offenbar hat auch jeder Kegel, dessen Scheitel in dem von k auf die Mittelebene gefällten Lote liegt und der durch die Schnittellipse der Ebene Σ hindurchgeht, die Eigenschaft, dafs jede seiner Seiten einen Strahl des Cylindroides rechtwinklig schneidet.

Da die Erzeugenden des Cylindroides sowohl die Strahlen des Büschels k in Σ, als auch die Leit- oder Doppelgerade L unter rechtem Winkel treffen, so ist das Cylindroid der Ort der gemeinsamen Lote zwischen der Geraden L und den Strahlen des Büschels k in Σ. Auch bei beliebiger Lage einer Geraden L und eines Strahlenbüschels k ist der Ort der gemeinsamen Lote ein Cylindroid. Fällt man von k ein Lot auf L und errichtet man weiter in dem Punkt, in dem L die Ebene Σ des Büschels trifft, ein zweites Lot auf L so, dafs es in Σ liegt, und betrachtet man diese Lote als die zugeordneten Strahlen eines Cylindroides, so liegt k auf einem Strahl des letzteren und die Ebene Σ geht durch den zugeordneten Strahl, der Büschel k hat also die erforderliche Lage, in der seine Strahlen von denen des Cylindroids senkrecht getroffen werden, und L ist die Doppelgerade des letzteren.

Man kann allgemein sagen: Das Cylindroid ist der Ort der gemeinsamen Lote zwischen einem beliebigen Strahl einer

Regelschar zweiter Ordnung und allen übrigen Strahlen derselben Schar. Der Beweis wird sich weiter unten von selbst ergeben. Zerfällt die Regelschar in zwei einfache Büschel mit einem gemeinsamen Strahl, so hat man den eben besprochenen Fall.

Die cylindroidische Regelschar wird von einem auf ihr liegenden Punkt, wie jede Regelschar dritter Ordnung, durch einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung projiziert. Ist k jener Punkt, so gehört sowohl die Ebene Σ, welche den Strahl oi projiziert, als auch die durch k parallel zur Mittelebene gelegte Ebene T, welche den zu oi rechtwinkligen Strahl projiziert, zu dem Ebenenbüschel. Eine beliebige Ebene des Büschels, welche den Strahl of projiziert, schneidet Σ in dem Strahl kf und T in dem zu of parallelen, also zu kf normalen Strahl ka. Die Strahlenbüschel k in Σ und T sind demnach durch den Ebenenbüschel in der Weise projektiv aufeinander bezogen, dafs die homologen Strahlen rechte Winkel miteinander einschliefsen, und man kann den Ebenenbüschel aus zwei konzentrischen projektiven Strahlenbüscheln konstruieren, wenn man die normalen Strahlen einander zuweist. Der von dem Ebenenbüschel umhüllte Kegel ist von der besonderen Art, dafs seine Fokalachsen auf zwei der Ebenen, nämlich auf den Ebenen der beiden konzentrischen Strahlenbüschel, senkrecht stehen.[1]) Man erhält ihn auch dadurch, dafs man in dem Brennpunkt einer Parabel auf deren Ebene ein Lot errichtet und die Parabel aus einem Punkte des Lotes projiziert. Das Lot ist eine Fokalachse, und die Ebene durch den Scheitel parallel zur Parabelebene enthält den einen Strahlenbüschel. Also:

Die Ebenenbüschel zweiter Ordnung, durch welche eine cylindroidische Regelschar aus den auf ihr liegenden Punkten projiziert wird, umhüllen Kegel, deren Fokalachsen auf zwei der Ebenen senkrecht stehen. Ich will diese besondere Art Ebenenbüschel und Kegel zweiter Ordnung aus diesem Grunde cylindroidische Ebenenbüschel oder Kegel nennen.

Des weiteren ergiebt sich der Satz: Der Ort der gemeinsamen Lote zwischen einer beliebigen Geraden und den Strahlen eines Cylindroides ist ebenfalls ein Cylindroid. Legt man senkrecht zu der gegebenen Geraden, die L heifsen möge, eine Ebene Σ, welche einen Strahl des Cylindroides enthält, was immer möglich ist, so giebt es in Σ, wie wir wissen, einen einfachen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt k mit dem Durchgang des zugeordneten Strahls zusammenfällt, und dessen Geraden die Strahlen

1) Reye, Geometrie der Lage, 1. Bd., 3. Aufl. S. 220 unter *d*.

des Cylindroides senkrecht schneiden. In dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung Γ, welcher die Strahlen des Cylindroides aus dem Punkt k projiziert, enthält eine beliebige Ebene einen Strahl des Cylindroides und einen dazu senkrechten Strahl des Büschels k; eine Parallele zu dem letztgenannten Strahl und durch den Schnittpunkt der Ebene mit L trifft auch diese Gerade unter rechtem Winkel, da ja alle Strahlen des Büschels k normal zu L liegen, und ist somit ein gemeinsames Lot zwischen L und einer Erzeugenden des Cylindroides. Zieht man demnach in allen Ebenen des Büschels Γ durch ihre Schnittpunkte mit L Parallelen zu den in ihnen enthaltenen Geraden des Strahlenbüschels k, so sind diese die gesuchten gemeinsamen Lote. Eine Ebene T, welche durch k parallel zur Mittelebene des Cylindroides gelegt wird, hat mit dem Ebenenbüschel Γ, wie oben gezeigt, einen Strahlenbüschel gemein, dessen Geraden den Strahlen des Cylindroides parallel sind und daher von den gefundenen gemeinsamen Loten ebenfalls rechtwinklig geschnitten werden. Man kann also die gemeinsamen Lote auch auffassen als die Geraden der kürzesten Entfernung zwischen L und den Strahlen des Büschels k in T, mithin erzeugen sie ein Cylindroid.

§ 5. Zweifache Stützung bei allgemeiner Lage der Auflagerkräfte.

Beim Vorhandensein von zwei Auflagerkräften B_1 und B_2 müssen die Bewegungsachsen die Bedingung

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$$

erfüllen. Sie bilden einen quadratischen Strahlenkomplex und bestehen aus allen Geraden, welche die Erzeugenden eines Cylindroides senkrecht schneiden. Das Cylindroid enthält die beiden Auflagerkraftlinien als zugeordnete Geraden und ist dadurch völlig bestimmt. Da es zur Bestimmung der Form des Cylindroides gleichgültig ist, welches Paar zugeordneter Strahlen man wählt, so kann man sagen: das Cylindroid besteht aus allen Paaren windschiefer Kräfte, die zu demselben Achsenkomplex führen. Allerdings sind die Achsenparameter für die einzelnen windschiefen Paare verschieden, aber die geometrische Form des Achsenkomplexes ist immer dieselbe.

Die Achsen mit einem bestimmten Parameter bilden, weil sie in Bezug auf B_1 allein und in Bezug auf B_2 allein je einem linearen Komplex angehören, die Kongruenz dieser beiden Komplexe, also ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse, oder, wie Sturm[1])

1) Sturm, Liniengeometrie.

es kürzer nennt, ein Strahlennetz. Die beiden Treffgeraden jedes solchen Strahlennetzes für einen bestimmten Parameter sind zwei zugeordnete (reelle oder imaginäre) Strahlen des Cylindroides. Für das Strahlennetz der reinen Drehachsen sind die beiden Kraftlinien die Treffgeraden, für die Achsen der fortschreitenden Bewegung sind es zwei unendlich ferne imaginäre Strahlen durch den unendlich fernen Punkt der Cylindroid-Doppelgeraden, denn alle durch jenen Punkt gehenden oder unendlich fern liegenden Strahlen sind Achsen für die fortschreitende Bewegung, die in der Richtung der Cylindroid-Doppelgeraden möglich ist. Die Cylindroid-Doppelgerade (die Gerade der kürzesten Entfernung zwischen den Kraftlinien) und die unendlich ferne Gerade der Cylindroid-Mittelebene gehören allen Strahlennetzen gleichen Parameters an; sie sind die beiden Achsen, in Bezug auf welche jede beliebige Bewegung möglich ist, gleichzeitig sind sie die Doppelstrahlen des quadratischen Achsenkomplexes im Plückerschen Sinne.

Die Achsen einer bestimmten Richtung bilden einen Parallelstrahlenbüschel, dessen Ebene durch diejenige Erzeugende des Cylindroides hindurchgeht, die mit der betreffenden Richtung einen rechten Winkel einschliefst. Wir legen durch einen Punkt k des Cylindroides und durch den zugeordneten Strahl eine Ebene Σ, dann trifft jeder Strahl des Büschels k in Σ einen Cylindroidstrahl unter rechtem Winkel. Eine Ebene, welche einen beliebigen Cylindroidstrahl von k aus projiziert, enthält einen Strahl des Büschels k, der, weil er normal zu dem Cylindroidstrahl gerichtet ist, dem parallelen Achsenbüschel jener Ebene angehört. In dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung Γ, durch welchen die Cylindroidstrahlen von k aus projiziert werden, liegen demnach alle zur Ebene Σ parallelen Achsen, und jede zu Σ parallele Ebene schneidet aus dem Ebenenbüschel Γ einen Achsenbüschel zweiter Ordnung heraus. Gemäfs der in § 4 erörterten besonderen Eigenschaft des Ebenenbüschels Γ ergeben sich hieraus die Sätze:

Die Bewegungsachsen in parallelen Ebenen umhüllen, wenn auf eine der Ebenen senkrecht projiziert, ähnlich liegende und konfokale Parabeln. Sie sind die zu einer Fokalachse senkrechten Schnitte desselben Ebenenbüschels zweiter Ordnung, durch welchen die Cylindroidstrahlen aus einem ihrer Punkte projiziert werden. Der Mittelpunkt des Ebenenbüschels ist der Träger desjenigen einfachen Büschels von Bewegungsachsen, der alle Richtungen der parallelen Ebenen enthält.

Der von dem Ebenenbüschel umhüllte Kegel ist offenbar eine Plückersche Komplexfläche.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes geht ein Achsenkegel, der, wie in § 4 gezeigt wurde, das Cylindroid in einer Ellipse schneidet, und die Projektion der Ellipse auf die Mittelebene ist stets ein durch den Cylindroid-Mittelpunkt gehender Kreis.

Die unendlich ferne Ebene ist eine Ausnahmeebene, in der jeder Strahl zu den Achsen gehört, und ebenso ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der Cylindroid-Doppelgeraden ein Ausnahmepunkt. Sie bilden gemeinsam mit dem Cylindroid die Singularitätenfläche des Komplexes. Unter den singulären Ebenen und Punkten haben die beiden Kuspidalebenen und Kuspidalpunkte des Cylindroides eine besondere Bedeutung. In ihnen fallen die beiden einfachen Achsenbüschel, deren Träger jede singuläre Ebene und jeder singuläre Punkt ist, je in einen einzigen zusammen.

§ 6. **Zweifache Stützung bei sich schneidenden Auflagerkräften.**

Haben die beiden Auflagerkräfte im Endlichen einen Punkt gemeinsam, so wird das Cylindroid zu einem einfachen Strahlenbüschel, dessen Ebene mit der Kraftebene und dessen Mittelpunkt mit dem Kräfteschnittpunkt zusammenfällt, und der quadratische Komplex der Bewegungsachsen besteht aus allen Geraden, welche die Strahlen jenes Büschels senkrecht treffen. Dieser Komplex ist seiner Form nach immer derselbe und kann mit jedem andern Komplex für zwei im Endlichen sich schneidende Auflagerkräfte zur Deckung gebracht werden. Die Kraftebene ist zu einer zweiten Ausnahmeebene geworden, denn alle in ihr liegenden Geraden sind Achsen für reine Drehung, welche beide Kraftlinien treffen. Aus demselben Grunde ist der Kräfteschnittpunkt zu einem zweiten Ausnahmepunkt geworden. Zwei weitere Ausnahmeebenen sind imaginär und schneiden sich in dem gemeinsamen Lot der Kraftlinien, also ist der Komplex ein tetraedraler.

Der durch die Kraftlinien bestimmte Strahlenbüschel, der kurz der Kraftlinienbüschel heifsen und dessen Mittelpunkt mit o bezeichnet werden möge, treffe eine beliebige Ebene Σ in einer Geraden Σ', und die senkrechte Projektion von o auf Σ sei der Punkt o'. Dann ist jede in Σ liegende Gerade, die einen Strahl des Büschels o' auf der Geraden Σ' unter rechtem Winkel schneidet, eine Bewegungsachse, denn sie trifft auch den Strahl des Kraftlinienbüschels senkrecht, der in dem Strahl des Büschels o' projiziert ist. Demnach umhüllen die Achsen in Σ eine Parabel mit dem Brennpunkt o' und der Scheiteltangente Σ'. In einer zu Σ parallelen Ebene verschiebt

sich die Scheiteltangente Σ' parallel mit sich selbst, während sich der Brennpunkt nicht verändert. Also lautet der Satz über die Achsen paralleler Ebenen in der Anwendung auf den vorliegenden Fall:

Die Bewegungsachsen in parallelen Ebenen umhüllen ähnlich liegende und konfokale Parabeln, deren Brennpunkt in der senkrechten Projektion des Kräfteschnittpunktes und deren Scheiteltangenten in den Schnittlinien der Kraftebene gegeben sind. Sie sind die zu einer Fokalachse senkrechten Schnitte desselben cylindroidischen Ebenenbüschels, dessen Mittelpunkt im Kräfteschnittpunkt liegt.

Der Achsenkegel durch einen beliebigen Punkt q des Raumes schneidet die Kraftebene in einem Kreise, in welchem der Kräfteschnittpunkt o und der Fufspunkt q' des von q auf die Kraftebene gefällten Lotes die Endpunkte desselben Durchmessers sind, denn jede von q nach einem Kreispunkt gerichtete Gerade trifft einen Strahl des Kraftlinienbüschels o unter rechtem Winkel. Die Achsenkegel sind daher, nach Schröters Bezeichnung, orthogonale, das heifst ihre cyklischen Ebenen stehen zu zwei Kegelstrahlen (qq' und qo) senkrecht.

Auch hier stellt der Kraftlinienbüschel die Gesamtheit der sich schneidenden Kräftepaare dar, die zu demselben Achsenkomplex führen. Während aber bei windschiefer Lage der Kräfte einem Strahl des Cylindroides immer nur ein einziger zugeordnet ist, entspricht in dem Büschel irgend einem Strahl jeder beliebige zweite.

Sind die beiden Auflagerkräfte parallel, so wird aus dem Kraftlinienbüschel ein Parallelbüschel, und der quadratische Achsenkomplex zerfällt in zwei spezielle lineare oder, wie Sturm sie nennt, in zwei Strahlengebüsche. Nämlich alle Geraden in den zur Kraftrichtung senkrechten Ebenen schneiden die Strahlen des Kraftlinienbüschels senkrecht; sie sind die Achsen für fortschreitende Bewegung und bilden das eine Strahlengebüsche. Dazu kommen alle Geraden, welche den unendlich fernen Strahl des Kraftlinienbüschels treffen — der Zusatz „senkrecht“ verliert hier seine Bedeutung — als zweites Strahlengebüsche, denn diese Geraden sind der Kraftebene parallel, sie haben also von beiden Kräften denselben Abstand $a_1 = a_2$ und wegen der gleichen Richtung der Kräfte auch denselben Neigungswinkel $\alpha_1 = \alpha_2$, so dafs die Fundamentalgleichung $a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$ für alle diese Geraden erfüllt ist.

§ 7. Allgemeines über dreifache Stützung.

Beim Vorhandensein von drei Auflagerkräften $B_1 B_2 B_3$ müssen die Bewegungsachsen der Bedingung

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = a_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3$$

Genüge leisten. Wir bilden die quadratischen Achsenkomplexe für Gruppen von je zwei der Kräfte, beispielsweise für $B_1 B_2$ und für $B_1 B_3$, und erhalten das Achsensystem für alle drei Kräfte als Kongruenz dieser Komplexe.

In einer beliebigen Ebene umhüllen die Achsen für $B_1 B_2$ eine Parabel und die Achsen für $B_1 B_3$ eine zweite Parabel. Ein gemeinsamer Strahl dieser beiden Büschel ist der im Durchgang von B_1 normal zu dieser Kraftlinie gerichtete. Sein Parameter in Bezug auf B_1 kann jeden Wert annehmen ($a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 0 \cdot \infty$), die Parameter in Bezug auf B_2 und B_3 dagegen sind im allgemeinen voneinander verschieden, so dafs dieser Strahl keine Achse für alle drei Kräfte abgiebt. Jeder andere gemeinsame Strahl der beiden Achsenbüschel hat mit Bezug auf B_1 einen von $0 \cdot \infty$ verschiedenen, das heifst bestimmten Parameter, der den Parametern für B_2 und B_3 gleich sein mufs, da der Strahl beiden Büscheln angehört, er ist also eine Bewegungsachse für alle drei Kräfte. Solcher gemeinsamen Strahlen giebt es, wenn die beiden Büschel nicht ganz und gar zusammenfallen, bekanntlich nur drei, so dafs in einer beliebigen Ebene nicht mehr als drei Bewegungsachsen liegen.

Ähnlich kann man den Beweis führen, dafs durch einen beliebigen Punkt des Raumes nicht mehr als drei Bewegungsachsen hindurchgehen. Da für den allgemeinen Fall, dafs die drei Kräfte weder durch denselben Punkt gehen, noch derselben Ebene parallel sind, wie im einzelnen gezeigt werden soll, eine weitere Vereinfachung des Systems nicht eintritt, so ergiebt sich der Satz:

Die Bewegungsachsen eines dreifach gestützten Körpers bilden im allgemeinen ein Strahlensystem dritter Ordnung und dritter Klasse.

Eine fortschreitende Bewegung ist im allgemeinen nicht möglich. Dieselbe erfolgt bei zwei Kräften in der Richtung des gemeinsamen Lotes und mufs bei drei Kräften verschwinden, sobald die gemeinsamen Lote von je zwei Kraftlinien nicht dieselbe Richtung haben, sobald also die drei Kräfte nicht derselben Ebene parallel sind. Es giebt demnach auch keinen unendlich fernen Ausnahmepunkt.

Die Achsen mit einem bestimmten Parameter liegen für jede

Auflagerkraft in einem linearen Komplex, sie bilden daher den Durchschnitt von drei solchen Komplexen, das heifst eine Regelschar zweiter Ordnung. Die Regelschar der reinen Drehachsen wird durch die drei Kraftlinien als Leitstrahlen bestimmt.

Sind die drei Auflagerkräfte $B_1 B_2 B_3$ nicht derselben Ebene parallel, so haben die Cylindroide, die durch je zwei der Kraftlinien als zugeordnete Geraden gegeben sind, Mittelebenen, welche ebenfalls nicht parallel sein können. Irgend eine Achse mufs einen Strahl jedes dieser Cylindroide senkrecht schneiden. Einer beliebigen Ebene Σ sind ein Strahl des Cylindroides $B_1 B_2$ und ein solcher des Cylindroides $B_1 B_3$ parallel, und diese Strahlen sind untereinander nicht parallel, ihr gemeinsames Loth ist also die einzige zu Σ senkrechte Bewegungsachse. Wenn die Ebene Σ die Richtung des zu beiden Cylindroiden gehörenden Strahles B_1 enthält, kann man das Cylindroid $B_1 B_3$ durch das Cylindroid $B_2 B_3$ ersetzen, so dafs B_1 nicht mehr gemeinsamer Strahl ist, und man erkennt die Gültigkeit des Gesetzes auch für diesen Fall. Wir haben also den Satz:

Sind die drei Auflagerkräfte nicht derselben Ebene parallel, so giebt es von jeder Richtung des Raumes eine und nur eine im Endlichen liegende Bewegungsachse.

Jeder endlichen Achse ist eine unendlich ferne zugeordnet, so dafs die unendlich ferne Ebene wieder eine Ausnahmeebene ist, in der jeder Strahl zu dem Achsensystem gehört. Dies gilt auch, wenn die Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, weil ja dann eine fortschreitende Bewegung eintreten kann. Das Achsensystem dritter Ordnung und dritter Klasse besteht aus einem solchen dritter Ordnung und zweiter Klasse der endlichen Bewegungsachsen und aus einem System nullter Ordnung erster Klasse der zugehörigen unendlich fernen Achsen.

Verfolgen die drei Auflagerkräfte die Richtungen derselben Ebene, so sind dieser auch die Mittelebenen der Cylindroide $B_1 B_2$, $B_1 B_3$ und $B_2 B_3$ parallel. Das gemeinsame Lot zwischen irgend einem Strahl des Cylindroides $B_1 B_2$ und einem zu ihm windschiefen Strahl des Cylindroides $B_1 B_3$ (oder $B_2 B_3$) steht normal auf jenen Ebenen, und die Gesamtheit dieser Lote sind die Achsen für fortschreitende Bewegung. Zwischen einem Strahl des Cylindroides $B_1 B_2$ und dem parallelen des Cylindroides $B_1 B_3$ bilden die gemeinsamen Lote einen Parallelbüschel, so dafs aufser den Achsen für fortschreitende Bewegung noch eine einfach unendliche Zahl von Parallel-Achsenbüscheln vorhanden ist, deren jeder offenbar eine Achse für reine Drehung enthalten mufs, da diese ja andere Richtungen als die Achsen für

fortschreitende Bewegung, nämlich die Richtungen der Leitebene für die paraboloidische Drehachsenschar verfolgen. Daraus ergiebt sich der Satz:

Bei drei derselben Ebene parallelen Auflagerkräften sind in dem Achsensystem aufser den zu dieser Ebene senkrechten Achsen für fortschreitende Bewegung im Endlichen nur noch die Richtungen einer Ebene vertreten, der Leitebene für die Drehachsenschar, und in jeder dieser Richtungen ist ein Parallelbüschel von Achsen vorhanden.

Der Satz giebt sofort Aufschlufs über die Klasse des Achsensystems. Eine beliebige Ebene des Raumes hat mit der Leitebene der Drehachsen nur eine einzige Richtung gemeinsam und schneidet den betreffenden Parallelbüschel in einer Achse dieser Richtung. In einer beliebigen Ebene liegt daher aufser der unendlich fernen nur eine einzige Bewegungsachse, und wir können sagen:

Für drei derselben Ebene parallele Auflagerkräfte ist das Strahlensystem der Bewegungsachsen von der zweiten Klasse.

In dem Achsensystem für drei Auflagerkräfte, dies gilt allgemein, sind alle Cylindroide enthalten, die durch irgend zwei Strahlen der Drehachsenschar als zugeordnete Geraden bestimmt sind. Jeder Ebene durch den Mittelpunkt einer hyperboloidischen Drehachsenschar sind zwei (reelle, zusammenfallende, imaginäre) Strahlen der Drehachsenschar parallel, die zu beiden Seiten in gleichem Abstande von jener Ebene liegen. Das Achsensystem enthält also eine zweifach unendliche Schar von Cylindroiden, deren Mittelebenen sämtlich durch den Mittelpunkt des Drehachsen-Hyperboloides hindurchgehen. Auch wenn die der Mittelebene parallelen Drehachsen imaginär sind, ist das Cylindroid reell, da es ja für alle Richtungen des Raumes, also auch für die Richtungen der angenommenen Mittelebene, Bewegungsachsen giebt.

In der zweiten Erzeugungsschar des Drehachsen-Hyperboloides, in welcher die Kraftlinien liegen und die deshalb die Kraftlinienschar genannt werden möge, können irgend welche drei Strahlen als die gegebenen Kraftlinien gewählt werden, ohne dafs sich an dem Bewegungszwang etwas ändert. Das gemeinsame Lot von zwei Kraftlinien ist in Bezug auf diese beiden Kräfte eine Achse für beliebige Bewegung, also auch für diejenige bestimmte Bewegung, bei der die Arbeit der dritten Kraft zu Null wird, das heifst, es ist eine Achse für alle drei Kräfte. Hat man umgekehrt eine Bewegungsachse, und liegen zwei von drei Kraftlinien zu der Achse normal, so mufs die Achse die

beiden Kraftlinien offenbar schneiden, denn sonst wäre sie für dieselben nur eine Achse der fortschreitenden Bewegung, was sie für die dritte Kraft im allgemeinen nicht ist. Da nun jeder Ebene zwei Strahlen der hyperboloidischen Kraftlinienschar parallel sind, die als die gegebenen Kraftlinien angesehen werden können, so mufs die zu der Ebene senkrechte Achse die beiden Kraftlinien schneiden — auch wenn sie imaginär sind.

Die imaginären Strahlen einer gewöhnlichen Regelschar sind imaginäre Gerade der zweiten Art[1]), welche weder durch einen reellen Punkt gehen noch in einer reellen Ebene liegen, während imaginäre Gerade der ersten Art, beispielsweise die Tangenten an einen Kegelschnitt von einem Punkt innerhalb desselben, stets einen reellen Punkt besitzen und einer reellen Ebene angehören. Wie aus dem Vorhandensein der oben erwähnten Bewegungsachse hervorgeht, haben zwei konjugiert imaginäre Gerade der zweiten Art ein reelles gemeinsames Lot und sind natürlich einer reellen Ebene, welche zu dem Lot normal liegt, parallel. Wir können demnach die folgende Definition aufstellen:

Das System der Bewegungsachsen bei dreifacher Stützung besteht aus den gemeinsamen Loten, welche zwischen irgend zwei Strahlen der Kraftlinien-Regelschar, die imaginären mit eingeschlossen, möglich sind.

Ähnlich erhält man für die gemeinsamen Lote von irgend zwei Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung den Strahlenbündel im Kegelscheitel, und man erkennt, dafs sowohl beim Kegel wie bei der hyperboloidischen Regelschar jede Richtung des Raumes durch ein solches Lot vertreten sein mufs. Es ist nun auch die in § 4 ausgesprochene Behauptung bewiesen, dafs der Ort der gemeinsamen Lote zwischen einem beliebigen Strahl einer Regelschar zweiter Ordnung und den übrigen Strahlen derselben Schar ein Cylindroid ist, denn diese Lote sind der Ebene, die zu dem beliebig angenommenen Strahl normal liegt, parallel und bilden als die zu einer Ebene parallelen Bewegungsachsen eines dreifach gestützten Körpers ein Cylindroid. Der Satz von den gemeinsamen Loten bei dreifacher Stützung oder dreifachem Bewegungszwang gilt ganz allgemein und führt auch zu den unendlich fernen Achsen, wenn man bei diesen von der Richtungsbestimmung, die in dem Begriff „Lot“ liegt, absieht.

---

1) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage. J. Lüroth, das Imaginäre in der Geometrie, Math. Ann. v. Clebsch & Neumann, Bd. VIII.

§ 8. Drei Auflagerkräfte in derselben Ebene oder durch denselben Punkt.

Wir betrachten nunmehr die einzelnen Formen, welche das Achsensystem bei dreifacher Stützung oder dreifachem Bewegungszwang annehmen kann, und beginnen mit den beiden einfachsten Fällen, dafs die Auflagerkräfte in derselben Ebene liegen oder durch denselben Punkt gehen.

Sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt, und bildet man die Achsenkomplexe für je zwei der Kräfte, die ja jeder durch einen einfachen, die beiden Kräfte enthaltenden Strahlenbüschel bestimmt sind, so decken sich die Büschel und die Komplexe vollständig (auch bezüglich der Parameter), und wir erhalten die Bestätigung des bekannten Satzes, dafs eine Auflagerkraft, welche mit zwei anderen gleichzeitig in derselben Ebene liegt und durch denselben Punkt geht, eine neue Bedingung für die Festlegung des Körpers nicht liefert.

Drei Auflagerkräfte in einer Ebene.

Liegen die drei Kräfte in derselben Ebene, ohne durch denselben Punkt zu gehen, so sind aufser den Geraden der unendlich fernen Ebene auch alle in der Kraftebene liegenden Geraden Bewegungsachsen, und zwar Achsen für reine Drehung, da sie die drei Kraftlinien schneiden. Irgend eine nicht in dieser Ebene liegende Achse möge dieselbe im Punkte d treffen. Denkt man sich die Komplexe, beziehungsweise die sie bestimmenden Strahlenbüschel für je zwei der Kräfte, so liegt d auf einem Strahl jedes dieser Büschel, und die Achse kann, weil sie mit diesen drei Strahlen rechte Winkel einschliefsen mufs, nur normal zur Kraftebene gerichtet sein. Auch wenn man das Strahlenfeld der Kraftebene als die gegebene Kraftlinienschar und die Bewegungsachsen als die gemeinsamen Lote für irgend zwei Strahlen dieser Schar betrachtet, ergiebt sich dasselbe, dafs nämlich im Endlichen alle aufserhalb der Kraftebene liegenden Achsen senkrecht auf ihr stehen und den Bündel eines unendlich fernen Punktes erfüllen. Demnach stellt sich die Gesamtheit der Achsen, bestehend aus zwei Strahlenfeldern und einem Strahlenbündel, als ein Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Klasse dar.

Die zur Kraftebene senkrechten Achsen sind die Achsen für die fortschreitende Bewegung, welche in dieser Richtung möglich ist, und welche auch als eine Drehung um die unendlich ferne Gerade der Kraftebene aufgefafst werden kann. Da durch drei in einer Ebene liegende Auflagerkräfte diese Ebene in sich unverschieblich geworden

ist, so erhält man den Satz der Mechanik: Ein Körper, der innerhalb einer Ebene festgelegt ist, kann nur noch reine Drehungen um Achsen ausführen, die in dieser Ebene liegen.

Ein bemerkenswerter Sonderfall ist der, dafs die drei Auflagerkräfte in die unendlich ferne Ebene rücken. Bekanntlich bedeutet eine unendlich ferne, gleichzeitig unendlich kleine Kraft das, was man sonst auch ein Kräftepaar oder Kraftmoment nennt. Ein Körper, auf den drei unendlich ferne Auflagerkräfte einwirken, ist derart unterstützt, dafs er in drei nicht dieselbe Richtung enthaltenden Ebenen Drehungen zu machen verhindert wird. In solchem Fall sind alle unendlich fernen Geraden Achsen für reine Drehung und somit alle im Endlichen liegenden Geraden Achsen für fortschreitende Bewegung. Aus den zur Kraftebene senkrechten Achsen für fortschreitende Bewegung wird die Gesamtheit aller endlichen Strahlen, so dafs überhaupt jede beliebige Gerade zu dem Achsensystem gehört.

Ein Beispiel für einen derartig unterstützten Körper bietet ein Laufkrahn, wie er in Werkstätten und auf grösseren Bauten zum Heben und Fortbewegen von Lasten benutzt wird. Eine durch Dampf betriebene Winde ruhe samt Kessel und Motor fahrbar auf einem Gleis, welch letzteres eine Drehung in der horizontalen Ebene verhindert. Der betreffende unendlich ferne Widerstand liegt in der Horizontalebene; ein zweiter endlicher Widerstand liegt in derselben Ebene und verhindert eine horizontal fortschreitende Bewegung normal zur Gleisrichtung. Setzt man nun das Gerüst, welches das Gleis trägt, wieder auf ein Gleis, das zu dem ersteren normal läuft, so ist der letztgenannte Widerstand nicht mehr vorhanden. Denkt man sich irgend einen Maschinenteil, etwa einen Kreuzkopf an dem Motor, senkrecht in einem Schlitten so geführt, dafs er wohl auf und niedergehen, sich aber nicht drehen kann, so kann dieser Maschinenteil, je nachdem man die Bewegung des Krahns auf seinem Gleis, die Bewegung des Gerüstes auf dem zweiten Gleis und die senkrechte Bewegung des Kreuzkopfes verschieden zusammensetzt, offenbar jede im Raum beliebig gerichtete fortschreitende Bewegung annehmen, aber keine Drehung ausführen: er ist als durch drei unendlich ferne Auflagerkräfte gestützt anzusehen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, bei dieser Gelegenheit darauf hinzuweisen, dafs, ähnlich wie eine Drehung als eine Verschiebung längs einer unendlich fernen Achse anzusehen ist und zwar eine Verschiebung von unendlich grofser Intensität, so auch jede Einzelkraft als ein unendlich fernes, unendlich grofses Kraftmoment aufgefafst werden

kann, welches in jeder die Kraftrichtung enthaltenden Ebene wirkt, und dessen Achse daher mit der unendlich fernen Geraden der zu der Kraftrichtung senkrechten Ebenen zusammenfällt. Man erhält dieses Kräftepaar unmittelbar, wenn man die Einzelkraft in einer sie enthaltenden Ebene durch zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte ersetzt, indem man diesen Kräften einen bestimmten endlichen Abstand voneinander giebt und sie immer weiter bis ins Unendliche rückt. Demnach ist jede Dyname an einer endlichen Achse, um die von Schell und Gravelius gebrauchte Bezeichnung anzuwenden, gleichzeitig eine Dyname an der zugehörigen unendlich fernen Achse, nur vertauschen die Einzelelemente Kraft und Kräftepaar ihre Bedeutung, gerade wie das auch bei den Bewegungen der Fall ist.

Drei Auflagerkräfte durch einen Punkt.

Gehen die drei Kräfte durch denselben Punkt, ohne in derselben Ebene zu liegen, so kann der Punkt nach keiner Richtung des Raumes mehr ausweichen. Alle durch ihn hindurchgehenden Strahlen sind Achsen für reine Drehung, da sie alle drei Kräfte treffen. Die drei von den Kraftlinien bestimmten Ebenen sind gleichzeitig die Ebenen der Strahlenbüschel, welche den Komplexen für je zwei der Kräfte zu Grunde liegen. Irgend eine im Endlichen vorhandene Gerade, welche nicht durch den gemeinsamen Punkt der drei Kräfte hindurchgeht, trifft die Ebenen in mehr als einem Punkt, trifft also auch die Strahlen mehrerer Büschel und kann niemals, da diese Strahlen sich selbst im Endlichen schneiden, mit jedem gleichzeitig einen rechten Winkel einschliefsen; die beliebig angenommene Gerade kann also niemals eine Bewegungsachse für alle drei Kräfte sein. Dies deckt sich mit dem Gesetz über die Richtung der Bewegungsachsen, und auch die Definition der Achsen als der gemeinsamen Lote für irgend zwei Strahlen der Kraftlinienschar, das heifst des Strahlenbündels im Kräfteschnittpunkt, ergiebt dasselbe. Damit ist der bekannte Satz der Mechanik, der dem für die Ebene angegebenen reziprok ist, bewiesen, dafs die Bewegungen eines Körpers um einen festen Punkt stets reine Drehungen um Achsen sind, welche durch diesen Punkt hindurchgehen. Die Gesamtheit der Bewegungsachsen, bestehend aus einem Strahlenbündel und dem unendlich fernen Strahlenfeld, bildet ein Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse.

Rückt der Kräfteschnittpunkt ins Unendliche, so sind alle zur Kraftrichtung parallelen Geraden Drehachsen. Den unendlich fernen

Geraden dieses Bündels, also einem unendlich fernen Büschel, sind als endliche Achsen für rein fortschreitende Bewegung alle Geraden zugeordnet, welche in den zur Kraftrichtung normalen Ebenen liegen. Das Achsensystem besteht demnach aus einem Strahlengebüsche (nach Sturms Bezeichnung) und aus dem Strahlenbündel im unendlich fernen Kräfteschnittpunkt. — In diesem Fall der Unterstützung befindet sich jeder Körper, der mit drei oder mit mehr als drei Punkten auf einer horizontalen Ebene ruht.

§ 9. **Das Achsensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse.**

Sind die drei Auflagerkräfte derselben Ebene parallel, so müssen wir zwei besondere Fälle unterscheiden, in denen die Achsensysteme abweichende Formen annehmen: wenn die drei Kraftlinien dieselbe Gerade senkrecht schneiden und wenn dies nicht eintritt. Wir betrachten zunächst den ersten Fall.

Die Kräfte B_1 und B_2 mögen in einer Ebene Σ_1 liegen. Das Lot L_1, welches in ihrem Schnittpunkt o auf Σ_1 errichtet ist, wird von B_3 senkrecht getroffen und bestimme mit B_3 eine Ebene Σ_2. Da B_1 und B_2 aus dem Strahlenbüschel o in Σ_1 beliebig gewählt werden können, legen wir B_1 parallel zu B_3 und bestimmen nunmehr die Kongruenz der Achsenkomplexe B_1B_3 und B_1B_2. Von den Achsen für fortschreitende Bewegung in Bezug auf B_1B_3, welche ja die Ebenen senkrecht zu B_3 erfüllen, bleiben nur diejenigen übrig, die auf Σ_1 senkrecht stehen. Von den der Ebene B_1B_3 parallelen Achsen, deren Projektionen auf Σ_1 sämtlich parallel zu B_3 sind, bleiben nur diejenigen, welche einen Strahl des Büschels B_1B_2 senkrecht schneiden, das sind alle Geraden, welche den zu B_3 normalen Strahl des Büschels, der L_2 heifsen möge, unter rechtem Winkel treffen. Demnach besteht die Gesamtheit der Achsen aus dem unendlich fernen Strahlenfeld, aus einem Strahlenbündel mit unendlich fernem Mittelpunkt in der Richtung L_1 und aus den Geraden, welche L_2 senkrecht schneiden. Es ist ein System zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welches aus zwei Systemen erster Ordnung und erster Klasse zusammengesetzt ist. Die Kraftlinienschar wird durch den Büschel o in Σ_1 und durch den zu B_3 parallelen Büschel in Σ_2, die Drehachsenschar durch den Büschel o in Σ_2 und durch den zu B_3 parallelen Büschel in Σ_1 dargestellt.

Haben die drei Kräfte, welche L_1 senkrecht schneiden, eine allgemeinere Lage, so dafs keine zwei in einer Ebene liegen, so ist nichtsdestoweniger das Achsensystem der Form nach genau dasselbe, und nur die Parameter wechseln. Die Kraftlinien bestimmen ein

gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid, und alle Strahlen der Kraftlinienschar treffen L_1 unter rechtem Winkel. Ebenso schneiden alle Drehachsen eine Gerade L_2 senkrecht, welche der Kraftlinienschar angehört. Die Leitebenen Σ_1 und Σ_2 der beiden Scharen stehen ebenfalls normal aufeinander. Daſs nun wieder neben den unendlich fernen Strahlen die Geraden normal zu Σ_1 und die Geraden, die L_2 senkrecht treffen, Bewegungsachsen sind, erkennt man vielleicht am ehesten mit Hilfe des Satzes von den gemeinsamen Loten. Die Kraftlinien, zu denen auch die unendlich ferne Gerade von Σ_2 gehört, werden auf Σ_1 durch einen einfachen Strahlenbüschel projiziert. Jede auf Σ_1 senkrecht stehende Gerade ist daher gemeinsames Lot zwischen einer endlichen und der unendlich fernen Kraftlinie. Jede Gerade, welche L_2 unter rechtem Winkel trifft, ist gemeinsames Lot zwischen dieser und der unendlich fernen Kraftlinie. Da ferner jeder Ebene ein Strahl der Kraftlinienschar parallel ist, so schneidet die unendlich ferne Gerade jeder Ebene diesen Strahl und die unendlich ferne Kraftlinie. Demnach gilt allgemein: wenn drei Auflagerkräfte dieselbe Gerade senkrecht schneiden, so bilden die Bewegungsachsen ein seiner Form nach unveränderliches Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welches aus zwei Systemen erster Ordnung und erster Klasse zusammengesetzt ist.

Die beiden Geraden L_1 und L_2 seien unmittelbar gegeben; sie treffen sich ebenfalls rechtwinklig in o. Ist dann A eine beliebige Achse, welche L_2 in dem Punkt a unter rechtem Winkel schneidet, so beschreibt ein Strahl B, der an L_1 und A entlang gleitet und dabei fortwährend normal zu L_1 gerichtet ist, ein gleichseitiges Paraboloid, und irgend drei Lagen von B können als gegebene Kraftlinien angesehen werden, welche das Achsensystem bestimmen. Denkt man sich statt der Achse A eine andere gegeben, welche demselben zu L_2 senkrechten Büschel a angehört, so beschreibt B ein anderes gleichseitiges Paraboloid, und auch hier können drei beliebige Lagen von B die gegebenen Kraftlinien vorstellen, welche zu demselben Achsensystem führen, nur mit anderen Parametern. Dreht sich der Strahl A um a in der zu L_2 senkrechten Ebene, so erhält man als Gesamtheit aller Lagen B die sämtlichen Strahlen, welche L_1 rechtwinklig schneiden. Diese Strahlen können also als die Gesamtheit der Kraftlinien-Regelscharen angesehen werden, für welche sich dasselbe Achsensystem, abgesehen vom Parameter, ergiebt, und die Strahlen, welche L_2 senkrecht treffen, bilden die Summe der Leitscharen hierzu. Die letzteren sind die Regelscharen, welche nach § 7

von den Achsen gleichen Parameters gebildet werden. Auch erkennt man die Symmetrie zwischen den Kraftlinien und den Bewegungsachsen.

§ 10. **Das Achsensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse.**

Sind die drei Auflagerkräfte derselben Ebene parallel, ohne dieselbe Gerade senkrecht zu schneiden, liegen vorerst B_1 und B_2 in einer Ebene Σ_1, und bestimmt ihr Schnittpunkt o mit B_3 eine Ebene Σ_2, so können B_1 und B_2 aus dem Büschel o in Σ_1 wieder beliebig gewählt und daher B_1 parallel zu B_3 angenommen werden. In der Kongruenz der Achsenkomplexe B_1B_2 und B_1B_3 bleiben von den Achsen für fortschreitende Bewegung nur diejenigen normal zu Σ_1. Zu einer der Achsen des Komplexes B_1B_3, welche der Ebene Σ_2 parallel sind, ziehen wir durch o eine Parallele A. Diese fällt in die Ebene Σ_2, trifft B_3 und ist daher eine Drehachse. Ist ferner B derjenige Strahl des Büschels o in Σ_1, der zu A normal liegt, so enthält die durch A und B bestimmte Ebene alle Achsen der Richtung A für die drei Kräfte, denn in ihr treffen alle zu A parallelen Strahlen die Gerade B senkrecht.

Die Ebenen der parallelen Achsen schneiden also aus den beiden konzentrischen Strahlenbüscheln o in Σ_1 und Σ_2 die aufeinander senkrechten Strahlen heraus, das heifst, sie bilden einen cylindroidischen Ebenenbüschel, zu dem auch Σ_1 und Σ_2 gehören. Da jeder Büschel paralleler Achsen eine Drehachse enthält, so sind nunmehr unter Hinzurechnung der unendlich fernen Geraden alle Bewegungsachsen bestimmt.

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes lassen sich zwei den cylindroidischen Kegel berührende Ebenen legen, es gehen also durch diesen Punkt zwei je einer Drehachse parallele Bewegungsachsen und aufserdem eine zu Σ_1 normale Achse für fortschreitende Bewegung. Das System ist von der dritten Ordnung. Die Klasse des Systems — dieses Gesetz gilt ja allgemein, wenn drei Auflagerkräfte die Richtungen einer Ebene verfolgen — ist die zweite.

Wenn die Ebene Σ_2 mit der Kraftlinie B_3 mehr und mehr in die Ebene Σ_1 hineingedreht wird, so wird der cylindroidische Ebenenbüschel und der umhüllte Kegel immer flacher und fällt in dem Augenblick, wo B_3 die Ebene Σ_1 erreicht, mit dieser zusammen. Alsdann liegen alle Punkte des Raumes, die nicht der Ebene Σ_1 angehören, innerhalb des Kegels, somit werden für jeden dieser Punkte zwei Achsen imaginär, und man sieht ein warum das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse in diesem Fall auf ein solches erster Ordnung und zweiter Klasse zurückgeführt wird.

Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse zerfällt geometrisch in ein solches erster Ordnung und erster Klasse, bestehend aus dem unendlich fernen Strahlenfeld und dem Strahlenbündel der Achsen für fortschreitende Bewegung, und in ein solches zweiter Ordnung erster Klasse. Das letztere kann man ansehen als die Gesamtheit der Strahlen, welche den cylindroidischen Kegel berühren und gleichzeitig eine Tangente desselben, die unendlich ferne Gerade der Ebene Σ_2, schneiden.

Neben den singulären Ebenen der parallelen Achsen sind besonders die zu Σ_2 parallelen Ebenen hervorzuheben, denn die Schnitte dieser Ebenen mit denen des cylindroidischen Büschels bestehen offenbar sämtlich aus Achsen, so dafs hier wieder von den Achsen ähnlich liegende und konfokale Parabeln umhüllt werden.

In dem allgemeineren Fall, wenn sich keine zwei der Kraftlinien schneiden, liegen die Kraftlinienschar und die Drehachsenschar auf einem hyperbolischen Paraboloide, das aber kein gleichseitiges mehr ist, das heifst, die Leitebenen Σ_1 und Σ_2 stehen nicht senkrecht auf einander.

Die Projektionen der Kraftlinien, zu denen auch die unendlich ferne Gerade von Σ_2 gehört, auf Σ_1 umhüllen eine Parabel, so dass jede Gerade normal zu Σ_1 als gemeinsames Lot für zwei endliche Kraftlinien anzusehen ist. Jede Drehachse, also jede Richtung der Ebene Σ_2, kann nur mit einer Kraftlinie, mit einer Richtung der Ebene Σ_1 einen rechten Winkel einschliefsen. Demnach sind die noch vorhandenen Büschel paralleler Achsen, deren jeder eine Drehachse enthält, bestimmt durch jene Drehachse und die dazu senkrechte endliche Kraftlinie, und jeder solcher Büschel ist anzusehen als Gesamtheit der gemeinsamen Lote zwischen der betreffenden endlichen und der unendlich fernen Kraftlinie. Also: Die Ebenen der parallelen Achsen berühren das Kraftlinien-Paraboloid in Punkten, in denen sich die Erzeugenden beider Scharen rechtwinklig schneiden.

Man kann die beiden Erzeugungsscharen eines Paraboloides projektiv aufeinander beziehen, indem man die sich senkrecht treffenden Strahlen einander zuweist, denn jede Schar liegt perspektiv zu einem einfachen Strahlenbüschel, dessen Strahlen denen der Schar parallel sind, und zwei solche Strahlenbüschel sind projektiv, wenn die senkrechten Strahlen einander entsprechen Führt man durch drei Punkte des Paraboloides, in denen ein solches rechtwinkliges Schneiden stattfindet, eine Ebene, so kann man die Schnittkurve dieser Ebene auffassen als perspektiv sowohl zu der einen wie auch zu der andern

Schar. Man erhält so zwei konjektive (ineinander liegende projektive) Kurven zweiter Ordnung, und da dieselben die drei erst gegebenen Punkte entsprechend gemein haben, so haben sie alle Punkte entsprechend gemein, das heifst, in allen Punkten der Kurve schneiden sich die Erzeugenden beider Scharen unter rechtem Winkel, und die Kurve enthält alle Punkte dieser Art.

Da das Paraboloid zwei Symmetrieebenen besitzt, so entsprechen einem Punkte der gesuchten Kurve aus Symmetriegründen drei andere, welche mit dem ersten in einer zur Hauptachse senkrechten Ebene liegen. Damit ist die Richtung der Kurvenebene bestimmt, und wir können sagen:

Die Strahlen beider Regelscharen eines hyperbolischen Paraboloides treffen sich paarweise rechtwinklig in einer Hyperbel, deren Ebene normal zur Hauptachse des Paraboloides gerichtet ist.

Die Ebenen der parallelen Bewegungsachsen berühren das Kraftlinien-Paraboloid in den Punkten dieser Hyperbel und bilden daher einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt, der Pol der Hyperbelebene, auf der Hauptachse des Paraboloides liegt, so dafs sein Abstand von der Hyperbelebene durch den Paraboloid-Scheitel halbiert wird, denn er ist durch letzteren und durch den unendlich fernen Punkt der Hauptachse von seiner Polaren harmonisch getrennt.

Legt man die beiden Leitebenen Σ_1 und Σ_2 durch die Paraboloid-Hauptachse, so gehören sie ebenfalls dem Büschel singulärer Ebenen an, denn sie berühren das Paraboloid in den unendlich fernen Punkten der Hyperbel. Sie werden von dem Ebenenbüschel in zwei konzentrischen Strahlenbüscheln geschnitten, und da die Strahlen der letzteren den Kraftlinien bezw. den Drehachsen parallel sind, so schneiden die Ebenen des Ebenenbüschels aus den beiden Strahlenbüscheln die zu einander senkrechten Strahlen heraus, das heifst, der Ebenenbüschel und der umhüllte Kegel ist wieder ein cylindroidischer. Demnach ist das System der Bewegungsachsen, wenn man von den Parametern absieht, ganz dasselbe wie in dem erst besprochenen einfacheren Fall, wo zwei derAuflagerkräfte sich schnitten. Auch die unendlich fernen Achsen gehören dazu, weil jede derselben durch eine endliche und durch die unendlich ferne Kraftlinie hindurchgeht. Wir haben daher den Satz:

Wenn drei Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, nicht aber derselben Ebene angehören und nicht dieselbe Gerade senkrecht schneiden, so bilden die Bewegungsachsen

ein Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse, das aus einem solchen erster Ordnung und erster Klasse und aus einem System zweiter Ordnung und erster Klasse zusammengesetzt ist.

Das System der Bewegungsachsen ist augenscheinlich seiner Form nach bestimmt, sobald der Flächenwinkel der beiden Leitebenen gegeben ist. Wird dieser Winkel zu einem rechten, so ist nicht mehr jedem Strahl der einen Regelschar ein ihn rechtwinklig schneidender der zweiten Schar zugeordnet, sondern die Strahlen jeder Schar treffen einen und denselben Strahl der andern Schar senkrecht. Die Hyperbel zerfällt in diese beiden aufeinander lotrechten Geraden, nämlich in die beiden Erzeugenden, welche durch den Paraboloidscheitel gehen, und der Ebenenbüschel zweiter Ordnung zerfällt in zwei Ebenenbüschel erster Ordnung, deren einer die Drehachsen und deren andrer die Kraftlinien enthält, so dafs für die Bewegungsachsen nur ein einfacher Ebenenbüschel übrig bleibt und die Ordnung des Systems sich von der dritten auf die zweite vermindert.

Wir nehmen nunmehr die Hauptachse H des Paraboloides und den cylindroidischen Kegel, dessen Mittelpunkt m auf H liegt, als gegeben an. Dann sind auch die beiden durch H geführten Leitebenen Σ_1 und Σ_2 bestimmt, da sie den Kegel berühren. Der Punkt s auf H sei der Scheitel des Paraboloides. Die beiden Erzeugenden E_1 und E_2, welche durch s hindurchgehen, erhält man als die beiden in den Leitebenen liegenden Lote, die in s auf H errichtet werden können. Eine zu H normale Ebene, deren Abstand von m durch s halbiert wird, schneidet den Kegel in einer Hyperbel. Läfst man jetzt die Gerade E_1 an E_2 und an der Hyperbel entlang gleiten, während sie zu Σ_1 parallel bleibt, so ergiebt sich die Kraftlinien-Regelschar, und ähnlich bekommt man die Drehachsenschar durch Gleiten von E_2 längs der Geraden E_1 und der Hyperbel bei paralleler Lage zu Σ_2.

Verrückt man den Paraboloidscheitel s auf der Hauptachse und damit die Anfangslagen von E_1 und E_2, so verschiebt sich auch die Hyperbelebene entsprechend, denn ihr Abstand von m ist gleich $2sm$. Man erhält also auf dem Kegel eine neue Hyperbel und kann dann wieder mit E_1 in der angegebenen Weise eine von der ersten abweichende Kraftlinien-Regelschar konstruieren, für welche offenbar dasselbe System der Bewegungsachsen, soweit der Parameter nicht in Frage kommt, gültig ist, da ja dieses nur von dem Kegel und von den Leitebenen abhängt. Die Leitschar stellt wieder die Drehachsen dar.

Wir wissen nun, dafs in einer Ebene Σ parallel zu Σ_2 die

Achsen eine Parabel umhüllen, in welcher Σ_3 den Kegel schneidet. Der Strahl, in dem der Kegel von Σ_1 berührt wird, trifft die Parabel im Scheitel t, und die Scheiteltangente der Parabel ist die Schnittlinie von Σ_3 und Σ_1. Die Gerade E_1 in ihrer Anfangslage trifft die Scheiteltangente der Parabel in einem Punkt u, der ebensoweit von t liegt, wie s von m. Die zweite durch u gehende Parabeltangente uv ist der in Σ_3 liegende Strahl der zweiten Schar. Der Berührungspunkt v ist gleichzeitig der Punkt, in welchem dieser Strahl die Hyperbel schneidet, denn v liegt, in der Richtung der Paraboloid-Hauptachse gemessen, in dem Abstande $2ut = 2sm$ von t. Bewegt sich der Scheitel s des Paraboloides auf der Hauptachse, so bewegt sich in Σ_3 der Punkt u auf der Scheiteltangente der Parabel, und die Achse uv beschreibt den ganzen, die Parabel umhüllenden Strahlenbüschel. Das Achsensystem enthält also eine einfach unendliche Zahl paraboloidischer Regelscharen — es sind das die Regelscharen gleicher Parameter —, und die Leitscharen hierzu sind die sämtlichen Kraftlinien-Regelscharen, welche zu derselben Form des Achsensystems führen.

Eine etwas abweichende Form nimmt das Achsensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse für den Fall an, dafs zwei Auflagerkräfte (B_1, B_2) unter sich und die dritte B_3 zu ihrer Ebene parallel sind. Irgend eine mit der Ebene $B_1 B_2$ parallele Ebene Σ trifft die Cylindroide, die von der dritten Kraftlinie mit jeder der beiden andern bestimmt werden, in je zwei sich schneidenden Strahlen C_1 und D_1, C_2 und D_2, die parweise parallel sein müssen, da die Cylindroide der Form und Lage nach gleich und nur in der Richtung B_3 parallel verschoben sind. Die beiden in Σ liegenden Büschel paralleler Achsen, welche je einen Strahl des einen Cylindroides senkrecht treffen, schneiden daher auch je einen Strahl des andern Cylindroides unter rechtem Winkel, so dafs die sämtlichen Parallelbüschel von Achsen, welche die Richtungen der Ebene $B_1 B_2$ verfolgen und für die Kräfte B_1 und B_3 allein gelten, auch für alle drei Kräfte mafsgebend sind. Der Scheitel des cylindroidischen Ebenenbüschels liegt unendlich fern in der Mittelebene des Cylindroides $B_1 B_3$. Zu den genannten Achsen kommen noch diejenigen in der Richtung der fortschreitenden Bewegung und das unendlich ferne Strahlenfeld.

§ 11. Das Achsensystem dritter Ordnung und dritter Klasse.

In ähnlicher Weise, wie hier gezeigt wurde, habe ich auch für den allgemeinsten Fall, dafs die drei Kraftlinien weder durch denselben Punkt gehen, noch derselben Ebene parallel sind, das sich dann ergebende Achsensystem dritter Ordnung und dritter Klasse, als dessen

Vereinfachungen die bisher betrachteten Systeme anzusehen sind, rein synthetisch und als Kongruenz der Achsenkomplexe für je zwei der Kräfte abgeleitet. Da aber gerade dieses allgemeine System in den älteren Arbeiten analytisch sehr eingehend behandelt wurde, nur die unendlich fernen Achsen hat man bisher nicht berücksichtigt, so verzichte ich auf eine Wiedergabe meiner Herleitung und begnüge mich, im Anschlufs an § 7 des Zusammenhangs wegen noch einige, wohl durchweg bekannte, Ergebnisse anzuführen.

Wir konstruieren die durch die drei Kraftlinien hindurchgehende hyperboloidische Regelschar, die Kraftlinienschar, und ebenso die zweite, sie schneidende Schar, die Drehachsenschar. Da das Achsensystem in jeder Richtung des Raumes einen Strahl und in jeder Ebenenrichtung ein Cylindroid enthält, das durch die beiden, der Ebene parallelen, Drehachsen als zugeordnete Geraden bestimmt ist, so gelangen wir zu allen Strahlen des Systems, wenn wir die Cylindroide konstruieren, deren Mittelebenen irgend einen einfachen Ebenenbüschel bilden. Eine beliebige Ebene schneidet das zu ihr parallele Cylindroid in zwei endlichen und in der unendlich fernen Geraden, das System ist also von der dritten Klasse. Eine Ebene, welche durch die Doppelgerade eines Cylindroides gelegt wird, schneidet aus dem letzteren nur einen Strahl heraus, so dafs die zweite in der Ebene liegende endliche Achse dem Cylindroid nicht angehört. Durch den Punkt, wo diese zweite Achse die Cylindroid-Doppelgerade trifft, gehen noch zwei Strahlen des Cylindroides, also ist das System von der dritten Ordnung.

Ganz ebenso wie das Achsensystem erzeugen wir mit Hilfe der Cylindroide, welche je zwei Kraftlinien als zugeordnete Strahlen enthalten, ein zweites System dritter Ordnung und dritter Klasse, dasjenige der Kraftlinien. Die beiden Systeme liegen symmetrisch zu dem Mittelpunkt des Kraftlinien-Hyperboloides, so dafs jede Ebene, welche einen Strahl des einen und den dazu parallelen Strahl des andern Systems enthält, durch den Mittelpunkt geht und der Mittelpunkt den Abstand der beiden Geraden halbiert. Die drei Hauptachsen des Hyperboloides gehören beiden Systemen an und sind im Endlichen die einzigen Strahlen dieser Art. Jeder Strahl des einen Systems schneidet aus dem anderen ein Cylindroid und eine gewöhnliche Regelschar heraus, so dafs man jedes System definieren kann sowohl als die Doppelgeraden der Cylindroide des anderen Systems, wie auch als die Leitscharen der in dem andern System enthaltenen Regelscharen. Ebenso wie die Achsen die gemeinsamen Lote sind für irgend zwei Strahlen der Kraftlinien-Regelschar, so sind auch die

Geraden des Kraftliniensystems die gemeinsamen Lote für irgend zwei Strahlen der Drehachsenschar.

Die erwähnten, in dem Achsensystem enthaltenen Regelscharen sind die Regelscharen der gleichen Parameter, und die Leitscharen dazu bilden die Gesamtheit der Kraftlinien-Regelscharen, die zu demselben Achsensystem führen, nur mit anderen Parametern. Alle Hyperboloide, auf denen jene Regelscharen liegen, haben den Mittelpunkt, die drei Hauptachsen und die Ebenen der Kreisschnitte gemeinsam.

Die Hauptachse des Kraftlinien-Hyperboloides, auf der von letzterem das längere Stück abgetrennt wird, wollen wir die erste Hauptachse nennen. Die beiden sie schneidenden Drehachsen bestimmen ein Cylindroid mit jener Hauptachse als Doppelgerade. Da auch die andern Regelscharen gleichen Parameters mit diesem Cylindroid je zwei zugeordnete Gerade gemeinsam haben, so erhalten wir auf diese Weise ein einfaches Mittel, jene Regelscharen zu konstruieren. Wir legen durch die Hauptachse eine Ebene Σ_1, welche das Kraftlinien-Hyperboloid in einem Kreise schneidet. Irgend zwei zugeordnete Strahlen des erwähnten Cylindroides mögen die Hauptachse, also auch Σ_1 in a und b treffen. Dann ist die Regelschar durch die beiden zugeordneten Geraden und durch den Kreis mit dem Durchmesser ab, den sie mit der Ebene Σ_1 gemeinsam hat, genau bestimmt. Der Durchmesser des gröfsten dieser Kreise ist gleich dem Abstande der am weitesten auseinander liegenden Strahlen des Cylindroides.

Von den zugeordneten Geraden fällt ein Paar ganz in die beiden Ebenen der Hauptkreisschnitte Σ_1 und Σ_2. Die zugehörige Regelschar zerfällt in zwei einfache Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte die Schnittpunkte der zugeordneten Geraden mit der Hauptachse und deren Ebenen die Ebenen Σ_1 und Σ_2 sind. Die entsprechende Kraftlinien-Regelschar besteht aus zwei Strahlenbüscheln mit denselben Mittelpunkten und mit den Ebenen Σ_2 und Σ_1. Das Achsensystem hat also im Endlichen zwei singuläre Ebenen und zwei singuläre Punkte. Jede dieser Ebenen enthält einen Strahlenbüschel und einen davon verschiedenen (unendlich fernen) Strahl. Jeder der Punkte ist ebenfalls Träger eines einfachen Büschels und eines davon verschiedenen Strahles. Liegt nämlich der Achsenbüschel des betreffenden Punktes in Σ_1, so geht durch denselben Punkt in Σ_2 ein Kraftlinienbüschel, und das in dem Punkt auf Σ_2 errichtete Lot ist ebenfalls eine Achse als gemeinsames Lot für zwei (bezw. unendlich viel) Kraftlinien. Weitere (reelle) singuläre Ebenen und singuläre Punkte sind im Endlichen nicht vorhanden.

Die Brennfläche, anscheinend von der sechsten Ordnung und

vierten Klasse, ist beiden Systemen gemeinsam. Sie hat daher mit den Hyperboloiden der Systeme den Mittelpunkt und die drei Symmetrieebenen gemeinsam. Die Ebenen Σ_1 und Σ_2 der Hauptkreisschnitte treffen die Brennfläche je in zwei konzentrischen Kreisen, von denen der äufsere, der oben erwähnte gröfste Hyperboloid-Kreisschnitt, eine Schnittkurve und der innere, durch die beiden singulären Punkte gehende, eine Berührkurve ist. Die beiden singulären Punkte sind zwei konische Knotenpunkte der Fläche.

Die für drei Auflagerkräfte gefundenen Systeme lassen sich, wenn man von dem Auftreten unendlich ferner Kräfte im allgemeinen absieht (§ 8), wie folgt zusammenstellen:

1) die drei Kräfte gehen nicht durch denselben Punkt und sind nicht derselben Ebene parallel — Strahlensystem dritter Ordnung und dritter Klasse;
2) die drei Kräfte sind derselben Ebene parallel — Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Klasse;
3) die drei Kräfte schneiden dieselbe Gerade senkrecht — Strahlensystem zweiter Ordnung und zweiter Klasse;
4) die drei Kräfte liegen in derselben Ebene — Strahlensystem erster Ordnung und zweiter Klasse;
5) die drei Kräfte gehen durch denselben Punkt — Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse.

§ 12. Stützung durch vier und mehr als vier Auflagerkräfte.

Sind vier Auflagerkräfte $B_1 B_2 B_3 B_4$ gegeben, so müssen die Bewegungsachsen den drei Gleichungen

$$a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = a_3 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 = a_4 \cdot \operatorname{tg} \alpha_4$$

Genüge leisten, sie bilden also, da jede Achse durch vier Konstante bestimmt ist und somit noch eine Konstante zur Verfügung steht, eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, eine Regelfläche. Aus der gewöhnlichen Regelschar, die durch die drei Kraftlinien $B_2 B_3 B_4$ hindurchgeht, kann man zwei der Kräfte, etwa B_2 und B_3, so wählen, dafs sie einer durch B_1 gelegten Ebene parallel sind. Man kann demnach stets annehmen, dafs von vier Auflagerkräften drei die Richtungen derselben Ebene verfolgen; das Achsensystem in Bezug auf diese drei Kräfte enthält nur die Richtungen einer Ebene (§ 7), also müssen auch die Achsen für vier Kräfte einer Ebene parallel sein: sie bilden, soweit sie im Endlichen liegen, ein Cylindroid. Diesem zugeordnet ist ein unendlich ferner, einfacher Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt in der Richtung der Cylindroid-Doppelgeraden liegt.

Die Achsen gleichen Parameters ergeben sich als der Durchschnitt von vier linearen Komplexen, das heifst, für jeden Parameter giebt es zwei (reelle, zusammenfallende oder imaginäre) Achsen, und diese sind stets zwei zugeordnete Strahlen des Cylindroides. Das Cylindroid selbst ist durch diejenigen beiden Geraden, welche von allen vier Kraftlinien getroffen werden, als zugeordnete Strahlen (Achsen mit dem Parameter Null) bestimmt, und es ist stets dasselbe, auch bezüglich der Parameter, für irgend vier Kraftlinien aus dem Strahlennetz, das durch die vier ursprünglich gegebenen Kraftlinien hindurchgeht.

Nimmt man zwei andere zugeordnete Geraden des Cylindroides als die Schnittlinien eines Strahlennetzes, so ergiebt sich auch für vier Kraftlinien aus diesem dasselbe Cylindroid der Bewegungsachsen, nur mit anderen Parametern. Die Gesamtheit der Strahlennetze, welche durch irgend zwei zugeordnete Geraden des Cylindroides hindurchgehen, ist der in § 5 behandelte quadratische Strahlenkomplex, so dafs hier der umgekehrte Fall vorliegt wie dort. Während bei zwei Auflagerkräften der quadratische Komplex die Bewegungsachsen enthält und das Cylindroid aus allen Gruppen von zwei Kraftlinien besteht, die zu derselben Form des Achsenkomplexes führen, bildet bei vier Auflagerkräften das Cylindroid das Achsensystem, und der quadratische Komplex enthält alle Strahlennetze, aus denen je vier oder mehr Kraftlinien dasselbe Cylindroid der Bewegungsachsen, nur mit anderen Parametern, ergeben.

Sind die Schnittlinien des Strahlennetzes imaginär (imaginäre Gerade der zweiten Art), so ist doch die Mittelebene des Cylindroides ihnen parallel, und dessen Doppelgerade ist ihr gemeinsames Lot. Die Mittelebene geht durch die Mittelpunkte der vier Hyperboloide, welche durch je drei der Kraftlinien gegeben sind, und ist damit vollständig festgelegt. Daraus ergiebt sich der geometrische Satz:

Die Mittelpunkte aller in einem Strahlennetz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung liegen in einer Ebene, der Mittelebene des Netzes.

Die zweiten Erzeugungsscharen aller paraboloidischen Regelscharen des Strahlennetzes sind ebenso wie dessen Schnittlinien der Mittelebene parallel. Das gemeinsame Lot der Schnittlinien, das stets reell ist, auch wenn die Schnittlinien imaginär sind, steht normal zur Mittelebene des Netzes und ist der sogenannte Hauptstrahl desselben. Da die Mittelebene nur zweifach unendlich viel Punkte, das Strahlennetz aber dreifach unendlich viel Regelscharen besitzt, so mufs jeder Punkt der Mittelebene für eine einfach unendliche Zahl von Regelscharen als Mittelpunkt dienen.

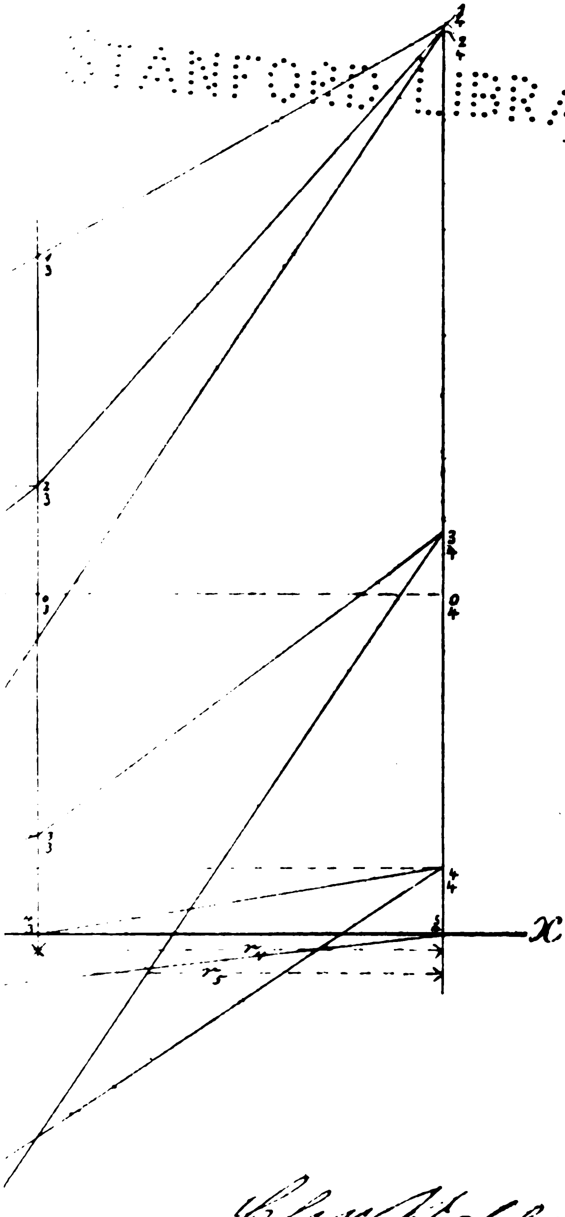
Liegen drei der Kräfte in derselben Ebene, oder gehe durch denselben Punkt, oder lassen sich durch richtige Au aus dem Strahlennetz der Kraftlinien diese Fälle ableiten, so wir Cylindroid zu einem einfachen Strahlenbüschel von Achsen für Drehung.

Wenn die vier Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, also die eine Schnittlinie des Strahlennetzes der Kraftlinien in endliche rückt, dann ist wieder eine fortschreitende Bewegung n zu jener Ebene möglich, und alle Geraden dieser Richtung e wie alle unendlich fernen Geraden sind Bewegungsachsen. Die Schnittlinie liegt im allgemeinen im Endlichen, und das Strahle kann durch zwei Paar sich schneidender Geraden bestimmt w deren Schnittpunkte auf der endlichen Schnittlinie liegen und Ebenen durch die unendlich ferne Schnittlinie hindurchgehen. diesen beiden Paaren gehört jedes einem einfachen Strahlenbü an, deren Strahlen von irgend welchen Bewegungsachsen senk geschnitten werden müssen. Das kann aber für beide Büschel g zeitig aufser von den Achsen der fortschreitenden Bewegung, d den Ebenen normal gerichtet sind, nur von einem einzigen, die en Drehachse enthaltenden Parallelbüschel geschehen, und der von getroffene Strahl in jedem Kraftlinienbüschel schliefst mit der endl Drehachse einen rechten Winkel ein. Demnach ist in diesem noch ein Büschel paralleler Achsen vorhanden.

Ist die endliche Drehachse normal zu den Ebenen geri welche die unendlich ferne Drehachse enthalten, schneiden al vier Auflagerkräfte eine gegebene Gerade senkrecht, so geht Parallelachsenbüschel in den Achsen für fortschreitende Bewe mit auf, dafür gewinnt die senkrechte Schnittlinie die Bede einer Achse für beliebige Bewegung. Wir können demnach s vier Auflagerkräfte, welche eine Gerade senkrecht schneiden, l beliebige Bewegungen um diese Gerade als Achse zu, sonst keine. Soll zum Beispiel ein kreiscylindrischer Körper so u stützt werden, dafs seine Achse trotz zufälliger Verschiebungen genau vorgeschriebene Lage einnimmt, so mufs er an vier Pu seiner Oberfläche aufruhn. Hiervon machen die Feinmechanike brauch, wenn sie als Lager für Fernrohre zwei V-förmige G anwenden.

Fünf Auflagerkräfte lassen nur eine einzige Bewegung zu, Achse die Hauptachse des von den fünf Kraftlinien bestimmten lin Komplexes ist. Ihr ist noch eine unendlich ferne Achse zugeor

STANFORD LIBRARY



Chr. Nehls.

Nur wenn die übrig bleibende Bewegung eine fortschreitende ist, wenn also die fünf Auflagerkräfte derselben Ebene parallel sind, erhält man mehr als zwei Achsen, nämlich das unendlich ferne Strahlenfeld und einen Strahlenbündel mit unendlich fernem Mittelpunkt.

Eine sechste Auflagerkraft, welche dem linearen Komplex der übrigen fünf nicht angehört, macht jede Bewegung unmöglich und legt den Körper fest. Damit bei der Stützung eines Körpers durch zwei bis sechs Auflagerkräfte jede einen wirklichen Beitrag zur Festlegung liefere, mufs man beim Anbringen derselben gerade so verfahren, als wollte man auf dem kürzesten Wege einen linearen Komplex bestimmen. Die Regel dafür läfst sich für zwei bis fünf Auflagerkräfte in dem Satz zusammenfassen, dafs die Gesamtheit von Geraden, welche n Kräfte schneidet ($n = 1, 2, 3, 4$), nicht auch die $n + 1^{te}$ schneiden darf. Die sechste Auflagerkraft endlich darf dem linearen Komplex der übrigen fünf nicht angehören.

Graphische Darstellung der Koefficienten algebraischer Gleichungen und der Nährungswerte von Kettenbrüchen.

Von Wasserbau-Direktor Chr. Nehls.

Die graphische Darstellung der Koefficienten einer algebraischen Gleichung fällt zusammen mit der graphischen Darstellung aller Kombinationen ohne Wiederholung aus ihren Wurzeln, wenn man diese Kombinationen auffafst als die Summen der Produkte der miteinander kombinierten Elemente oder Wurzeln. Allgemein bezeichnen

C_n^e die Kombinationen zur Klasse e aus n Elementen,

$r_1 r_2 r_3 \ldots r_n$ die Wurzeln der Gleichung, oder die zu kombinierenden Elemente.

Es ist also beispielsweise:

$$C_3^2 = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_3 .$$

In dem Zeichen C_n^e mufs e mindestens den Wert 1 und kann e höchstens den Wert n haben, wenn n Elemente vorhanden sind; e liegt also mit Einschlufs der Grenzen zwischen 1 und n. Es ist aber für die Schreibweise der Formeln und für die Homogenität der abzuleitenden Konstruktionen bequem, auch die Bezeichnungen C_n^0 und $C_n^{e \gtrless 0}$ einzuführen und zuzulassen, mit der Bedeutung:

$C_n^0 = 1$ für jedes n,

$C_n^{e \gtrless 0^n} = 0$ für jedes n und jedes ganze e;

diese Bedeutung der Ausdrücke ist vereinbar mit der Bedeutung der eigentlichen Kombination C_n^e, wo also $1 \lessgtr e \lessgtr n$.

Eine gegebene algebraische Gleichung vom Grade $n-1$ mit den Wurzeln $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$ sei:

$$f_{n-1}(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_{n-1})$$
$$= C_{n-1}^0 x^{n-1} - C_{n-1}^1 x^{n-2} + C_{n-1}^2 x^{n-3} - \cdots \pm C_{n-1}^{n-2} x \mp C_{n-1}^{n-1} x^0 = 0.$$

Multipliziert man die Gleichung mit $x - r_n$, so erhält man folgende Gleichung n^{ten} Grades mit den Wurzeln $r_1, r_2 \ldots r_n$

$$f_n(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$
$$= C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \cdots \mp C_n^{n-1} x \pm C_n^n x^0 = 0.$$

Die Koefficienten dieser beiden Gleichungen stehen zu einander in folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
C_n^0 &= C_{n-1}^0 + r_n C_{n-1}^{-1} \\
C_n^1 &= C_{n-1}^1 + r_n C_{n-1}^0 \\
C_n^2 &= C_{n-1}^2 + r_n C_{n-1}^1 \\
C_n^3 &= C_{n-1}^3 + r_n C_{n-1}^2 \\
&\text{— — — — — — — —} \\
C_n^{n-2} &= C_{n-1}^{n-2} + r_n C_{n-1}^{n-3} \\
C_n^{n-1} &= C_{n-1}^{n-1} + r_n C_{n-1}^{n-2} \\
C_n^n &= C_{n-1}^n + r_n C_{n-1}^{n-1}.
\end{aligned}$$

Hiernach ist allgemein:

(A) $$C_n^e = C_{n-1}^e + r_n C_{n-1}^{e-1}.$$

Diese Formel, die ja auch in der reinen Kombinationslehre ohne Rücksicht auf die algebraischen Gleichungen abgeleitet wird, ist die Grundformel für die graphische Behandlung der vorliegenden Aufgabe. Man kann, wenn man will, daraus auch leicht folgende Gleichungen ableiten:

$$
\begin{aligned}
C_n^1 &= r_1 \quad + r_2 \quad + r_3 \quad + r_4 \quad + r_5 \quad + \cdots r_n \\
&= r_1 C_0^0 + r_2 C_1^0 + r_3 C_2^0 + r_4 C_3^0 + r_5 C_4^0 + \cdots r_n C_{n-1}^0 \\
C_n^2 &= \text{———} r_2 C_1^1 + r_3 C_2^1 + r_4 C_3^1 + r_5 C_4^1 + \cdots r_n C_{n-1}^1 \\
C_n^3 &= \text{— — — — —} r_3 C_2^2 + r_4 C_3^2 + r_5 C_4^2 + \cdots r_n C_{n-1}^2 \\
C_n^4 &= \text{— — — — — — —} r_4 C_3^3 + r_5 C_4^3 + \cdots r_n C_{n-1}^3 \\
&\text{— — — — — — — — — — — — — — — —} \\
C_n^n &= \text{— — — — — — — — — — — — — —} r_n C_{n-1}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln können dazu dienen, die Konstruktionen in den Figuren unmittelbar zu verfolgen, ohne auf die Grundformel (A) zurückzugehen.

Die Ausführung der Konstruktion ist nahe verwandt mit der Methode des graphischen Integrierens, so wie ich diese anderweitig entwickelt habe.[1])

Man trage — siehe die Figur 1 der anliegenden Zeichnungen — auf der X-Achse vom Anfangspunkt A aus die den Wurzeln $r_1, r_2 \ldots r_n$, die hier noch als reell angenommen werden, entsprechenden Längen nacheinander ab, und zwar nach den Richtungen $+X$ oder $-X$, je nachdem die Werte positiv oder negativ sind. Der Punkt O links von A auf der negativen X-Achse sei der Konstruktionspol, und der Polabstand $\overline{OA} = 1$. In den Endpunkten der auf der X-Achse abgetragenen Wurzeln, d. i. in $C_1^2, C_2^3 \ldots C_n^{n+1}$ errichte man Normalen zur X-Achse, die eine im Abstand $\overline{A\gamma^0} = 1 \parallel X$ gezogene Gerade in den Punkten $C_1^0, C_2^0 \ldots C_n^0$ schneiden. Die Ordinaten dieser letzteren Punkte sind die Werte $C_1^0, C_2^0 \ldots C_n^0$, sämtlich $= 1$. Die Punkte $C_1^2, C_2^3 \ldots C_n^{n+1}$ liegen auf der X-Achse und dementsprechend sind die zugehörigen Werte $C_1^2, C_2^3 \ldots C_n^{n+1}$ sämtlich $= 0$.

Zieht man durch A unter einem Winkel von 45^0 gegen die Richtung der X geneigt eine Gerade $A C_1^1 C_2^1 \ldots C_n^1 \parallel O\gamma^0$, so schneidet diese Gerade die Teilordinaten der Wurzeln in den Punkten $C_1^1, C_2^1 \ldots C_n^1$ — (die Figur geht bis C_7^1) und die Ordinaten dieser Punkte sind die Werte $C_1^1, C_2^1 \ldots C_7^1$.

---

1) Vergl. u. a. die Schriften: „Über graphische Integration und ihre Anwendung in der graphischen Statik. Leipzig, Baumgärtner 1882.“ — „Der einfache Balken unter ruhender und bewegter Last. Hamburg, Paul Jenichen 1885.“

Nun projiziere man die Punkte $C_1^1, C_2^1 \ldots . C_7^1$ auf die Achse der Y nach $\gamma_1^1, \gamma_2^1 \ldots . \gamma_7^1$ und ziehe nacheinander

$$C_1^2 C_2^2 \parallel O\gamma_1^1,\ C_2^2 C_3^2 \parallel O\gamma_2^1 \ldots . C_6^2 C_7^2 \parallel O\gamma_6^1,$$

dann sind $C_2^2, C_3^2 \ldots . C_7^2$ gleich den Abständen der ebenso bezeichneten Punkte von der X-Achse.

Ebenso geht es weiter: Man projiziert die Punkte $C_2^2, C_3^2 \ldots C_7^2$ auf die Achse der Y nach $\gamma_2^2, \gamma_3^2, \ldots \gamma_7^2$ und zieht nacheinander

$$C_2^3 C_3^3 \parallel O\gamma_2^2,\ C_3^3 C_4^3 \parallel O\gamma_3^2 \ldots . C_6^3 C_7^3 \parallel O\gamma_6^2,$$

dann schneiden die Punkte $C_3^3, C_4^3 \ldots . C_7^3$ auf den Teilordinaten die Werte $C_3^2, C_4^3 \ldots . C_7^3$ ab.

In dieser Weise konstruiert man weiter, bis man schliefslich bei dem Punkt C_n^n, in der Figur C_7^7 ankommt. Dann liegen allgemein auf der e^{ten} Teilordinate die Koefficienten $C_e^0, C_e^1, C_e^2 \ldots . C_e^e$ der Gleichung vom Grade e mit den Wurzeln $r_1, r_2 \ldots . r_e$, also der Gleichung

$$f_e(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot \ldots \cdot (x - r_e) = 0.$$

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens wird nur begrenzt durch die Ausdehnungen der zur Verfügung stehenden Zeichenfläche. Man kann indessen unter Umständen vorteilhaft nach verschiedenen Mafsstäben für die Richtungen x und y konstruieren, was in Fig 1 in der That geschehen ist.

Was hierbei zu beachten ist, wird am leichtesten klar, wenn man die unverzerrte Zeichnung projiziert.

Dreht man also zunächst die unverzerrte Zeichnung um die X-Achse um einen Winkel ω und projiziert sie nun rechtwinklig auf die ursprüngliche Ebene, so bleiben alle Linien gerade, aber sie werden in ihrer Ausdehnung nach der Richtung der Y-Achse verkürzt in dem Verhältnis $1 : \cos \omega$. Der Winkel $C_1^1 A C_1^2 = 45^0$, dessen Tangente also gleich 1 ist, projiziert sich als α und es ist $\operatorname{tg} \alpha = \cos \omega$. Führt man also von vornherein den Winkel α ein, so ist

$\operatorname{tg} \alpha$ die Längeneinheit für die Richtung der y,
1 „ „ „ „ „ „ „ x.

Dreht man statt dessen die Zeichnung um die Achse der y um einen Winkel ω, so bleibt nach der Richtung der y alles unverändert,

dagegen verkürzt sich alles nach der Richtung der x im Verhältnis $1 : \cos \omega$, auch der Polabstand $\overline{OA}$. Daraus folgt leicht, wie man zu zeichnen hat.

Macht man den Winkel $C_1^1 A C_1^2 = \alpha$ und $\overline{OA} = k$ statt $\overline{OA} = 1$, und trägt man aufserdem noch mr_1, $mr_2 \ldots . mr_n$ statt r_1, $r_2 \ldots r_n$ auf, so mufs man die gefundenen Werte C^1, $C^2 \ldots C^n$ mit den Faktoren $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\left(\frac{k}{m}\right)^0$, $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\left(\frac{k}{m}\right)^1 \cdots \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\left(\frac{k}{m}\right)^{n-1}$ multiplizieren, um die richtigen Werte zu erhalten.

Sind n Werte r_1, $r_2 \ldots r_n$ gegeben, so lassen diese sich $n!$ mal permutieren, d. h. sie lassen sich in $n!$ facher Weise auf der Strecke AC_n^{n+1} der X-Achse abtragen; es sind demnach auch $n!$ verschiedene Figuren nach Art der Figur 1 möglich, die alle zu denselben Werten C_n^0, C_n^1, $C_n^2 \ldots . C_n^n$ führen müssen. Ist umgekehrt eine Gleichung

$$f_n(x) = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - + \cdots \mp C_n^{n-1} x \pm C_n^n x^0 = 0$$

gegeben, in der alle Koefficienten reelle Werte haben (einschliefslich des Wertes Null), so kann man aus den Koefficienten das Dreieck $AC_n^{n+1} C_n^1$ zeichnen, denn es ist $C_n^1 = \overline{AC_n^{n+1}} = \overline{C_n^{n+1} C_n^1}$ (unter Voraussetzung einer nichtverzerrten Zeichnung); aufserdem kann man auf der Seite $C_n^{n+1} C_n^1$ dieser Zeichnung alle Punkte C_n^1, $C_n^2 \ldots C_n^n$ festlegen. Weifs man nun, dafs die gegebene Gleichung nur reelle Wurzeln haben kann, so würde die Aufgabe, diese Wurzeln sämtlich zu bestimmen, offenbar darauf hinauskommen, dafs man von jenen $n!$ möglichen Figuren eine beliebige rückwärts zu zeichnen hätte. Das ist ohne Näherungskonstruktionen oder Hilfskurven natürlich nur in beschränktem Mafse, d. i. nur für kleine Werte n möglich: Die Theorie der algebraischen Gleichungen lehrt bekanntlich, dafs die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades nur bis $n = 4$ unbeschränkt lösbar ist. Für lösbare Gleichungen höherer Grade treten bestimmte Bedingungen der Lösbarkeit auf. Es ist nicht unwahrscheinlich, dafs die Resultate der Theorie der Gleichungen sich bei weiterer Bearbeitung der hier gegebenen Konstruktion wenigstens teilweise auch graphisch würden ableiten oder erläutern lassen. Selbstverständlich müfsten dabei auch die komplexen Wurzeln, von denen später noch die Rede sein soll, berücksichtigt werden.

Ist eine Wurzel r_n, in Fig. 1 die Wurzeln r_7, der gegebenen Gleichung $n^{\text{ten}} = 7^{\text{ten}}$ Grades bekannt, so ist es sehr leicht, die Koefficienten der Gleichung:

$$f_6(x) = C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 + C_6^2 x^4 - C_6^3 x^3 + C_6^4 x^2 - C_6^5 x + C_6^6 x^0$$

$$= \frac{f_7(x)}{x - r_7}$$

$$= \frac{C_7^0 x^7 - C_7^1 x^6 + C_7^2 x^5 - C_7^3 x^4 + C_7^4 x^3 - C_7^5 x^2 + C_7^6 x - C_7^7 x^0}{x - r_7} = 0$$

zu konstruieren. Macht man $C_6^7 C_7^8 = r_7$, so kann man $C_6^7 C_7^7$ und dazu parallel $O\gamma_6^6$ zeichnen, wodurch C_6^6 bestimmt wird.

Zieht man $O\gamma_6^5 \parallel C_6^6 C_7^6$, so ist mit γ_6^5 auch C_6^5 gefunden

„ „ $O\gamma_6^4 \parallel C_6^5 C_7^5$, „ „ „ γ_6^4 „ C_6^4 „

„ „ $O\gamma_6^3 \parallel C_6^4 C_7^4$, „ „ „ γ_6^3 „ C_6^3 „

„ „ $O\gamma_6^2 \parallel C_6^3 C_7^3$, „ „ „ γ_6^2 „ C_6^2 „

„ „ $O\gamma_6^1 \parallel C_6^2 C_7^2$, „ „ „ γ_6^1 „ C_6^1 „

und damit die Aufgabe gelöst. Die Probe auf die Richtigkeit der erhaltenen Lösung besteht darin, dafs die Gerade $C_6^1 C_7^1$ unter dem richtigen Winkel α, entsprechend dem angenommenen y-Mafsstab, gegen AX geneigt sein mufs. Jedenfalls ist die Zeichnung ungenau, wenn diese Bedingung nicht erfüllt wird. Wäre nun auch r_6 bekannt, so könnte man die Gleichung $f_6(x) = 0$ ebenso durch den Faktor $x - r_6$ teilen, u. s. w.

Wie man von einer Gleichung n^{ten} Grades übergehen kann zu einer Gleichung vom Grade $(n + 1)$ und dafür die Koefficienten konstruieren, ist nach dem Gesagten und nach Fig. 1 ohne weiteres einleuchtend. Das einfachste Verfahren ist wohl das, dafs man sich einen Pol O links von C_n^{n+1} mit dem gegebenen Polabstand konstruiert und nun zeichnet:

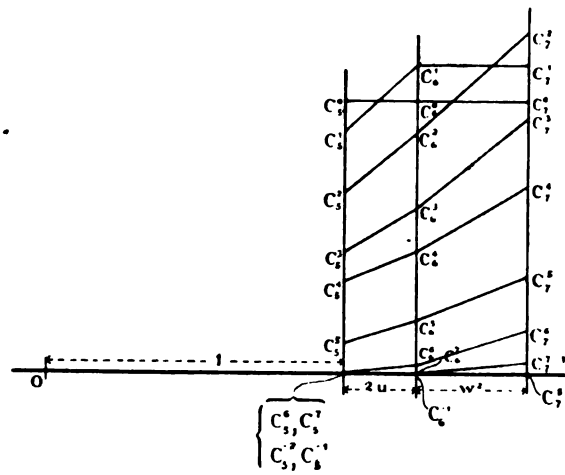
$$C_n^1 C_{n+1}^1 \parallel OC_n^0, \quad C_n^2 C_{n+1}^2 \parallel OC_n^1, \quad C_n^3 C_{n+1}^3 \parallel OC_n^2 \quad \text{u. s. w.}$$

Hat man statt dessen eine Gleichung n^{ten} Grades mit einem quadratischen Wurzelfaktor $x^2 - 2ux + w^2$ zu multiplizieren, so ersieht man aus dem Resultat der Rechnung leicht, wie man zu konstruieren hat. Es ist

$$f_n(x) = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \cdots \pm C_n^{n-2} x^2 \mp C_n^{n-1} x \pm C_n^n x^0 = 0.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $x^2 - 2ux + w^2$, so wird

$$(x)=\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{matrix} C_n^0 \\ +2uC_n^{-1} \\ +w^2C_n^{-2} \end{matrix}\right\}x^{n+2}-\left\{\begin{matrix} C_n^1 \\ +2uC_n^0 \\ +w^2C_n^{-1} \end{matrix}\right\}x^{n+1}+\left\{\begin{matrix} C_n^2 \\ +2uC_n^1 \\ +w^2C_n^0 \end{matrix}\right\}x^n-\left\{\begin{matrix} C_n^3 \\ +2uC_n^2 \\ w^2C_n^1 \end{matrix}\right\}x^{n-1} \\ +\left\{\begin{matrix} C_n^4 \\ +2uC_n^3 \\ +w^2C_n^2 \end{matrix}\right\}x^{n-2}-+\cdots\cdots\cdots\pm\left\{\begin{matrix} C_n^{n-2} \\ +2uC_n^{n-3} \\ +w^2C_n^{n-4} \end{matrix}\right\}x^4\mp\left\{\begin{matrix} C_n^{n-1} \\ +2uC_n^{n-2} \\ +w^2C_n^{n-3} \end{matrix}\right\}x^3 \\ \pm\left\{\begin{matrix} C_n^n \\ +2uC_n^{n-1} \\ +w^2C_n^{n-2} \end{matrix}\right\}x^2\mp\left\{\begin{matrix} C_n^{n+1} \\ +2uC_n^n \\ +w^2C_n^{n-1} \end{matrix}\right\}x^1-\left\{\begin{matrix} C_n^{n+2} \\ +2uC_n^{n+1} \\ +w^2C_n^n \end{matrix}\right\}x^0=0. \end{array}\right.$$



In der vorstehenden Figur ist bespielsweise $n = 5$ angenommen worden: die gegebenen Koefficienten sind also

$$C_5^0 = 1,\ C_5^1,\ C_5^2 \ldots\ C_5^5,$$
$$C_5^6 = C_5^7 = C_5^{-2} = C_5^{-1} = 0.$$

Neben der Ordinate, auf der diese Koefficienten abgetragen worden sind, ziehe man in den Abständen $2u$ und $2u + w^2$ zwei andere Ordinaten. Fängt man nun von unten herauf an zu zeichnen, so ist zu machen:

$$C_5^7 C_6^7 \parallel OC_5^6,\quad C_6^7 C_7^7 \parallel C_5^6 C_6^6 \parallel OC_5^5,\quad C_6^6 C_7^6 \parallel C_5^5 C_6^5 \parallel OC_5^4,$$

$$C_6^5 C_7^5 \parallel C_5^4 C_6^4 \parallel OC_5^3,\quad C_6^4 C_7^4 \parallel C_5^3 C_6^3 \parallel OC_5^2,\quad C_6^3 C_7^3 \parallel C_5^2 C_6^2 \parallel OC_5^1,$$

$$C_6^2 C_7^2 \parallel C_5^1 C_6^1 \parallel OC_5^0,\quad C_6^1 C_7^1 \parallel C_5^0 C_6^0 \parallel OC_5^{-1},\quad C_6^0 C_7^0 \parallel C_5^{-1} C_6^{-1} \parallel OC_5^{-2};$$

allgemein $$C_{n+1}^{r+2} C_{n+2}^{r+2} \parallel C_n^{r+1} C_{n+1}^{r+1} \parallel OC_n^r.$$

Ist $w^2 = 0$, so reduziert sich der quadratische Wurzelfaktor auf $x^2 - 2ux = x(x - 2u)$. Multipliziert man die Gleichung $f(x) = 0$ mit diesem Faktor, so erhält man die Gleichung $f_{n+2}(x)$ mit den Wurzeln $r_1, r_2 \ldots . r_n, 2u$ und 0; die Koefficienten dieser Gleichung findet man nach Mafsgabe der vorstehenden Figur mit $w^2 = 0$.

Entspricht der Faktor $x^2 - 2ux + w^2$ zwei konjugierten komplexen Wurzeln $u \pm vi$, so ist

$$\begin{aligned} x^2 - 2ux + w^2 &= (x - u - vi)(x - u + vi) \\ &= x^2 - 2ux + u^2 + v^2, \\ \text{also} \qquad w^2 &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Ist hierin $v = 0$, so geht der Ausdruck über in $x^2 - 2ux + u^2 = (x - u)(x - u)$ und entspricht zwei gleichen Wurzeln u mit gleichem Vorzeichen.

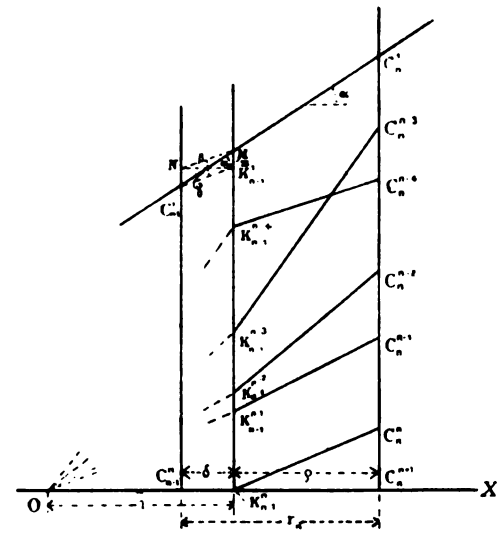
Setzt man in dem Faktor $x^2 - 2ux + w^2$ die Gröfse $u = 0$, so geht der Ausdruck über in $x^2 + w^2 = (x + wi)(x - wi)$ und entspricht zwei gleichen Wurzeln wi mit entgegengesetztem Vorzeichen. Ist w imaginär, so sind diese Wurzeln reell, und umgekehrt für ein reelles w. Fafst man w^2 als positive Gröfse auf, so entspricht der Ausdruck $x^2 - w^2$ zwei gleichen reellen, $x^2 + w^2$ zwei gleichen imaginären Wurzeln, letztere beide Male mit entgegengesetztem Vorzeichen

Hiernach ist klar, wie die ganze Konstruktion auch für komplexe Wurzelfaktoren zu verwenden ist, wenn diese nur konjugiert vorkommen und es sich demnach ausschliefslich um solche algebraische Gleichungen handelt, deren sämtliche Koefficienten reell sind.

Ebenso wie auf Seite 144 die Aufgabe gelöst wurde, aus den Koefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades $f_n(x) = 0$ durch Division mit dem einer reellen Wurzel r_n entsprechenden Faktor $x - r_n$ die Koefficienten der dann resultierenden Gleichung vom Grade $(n - 1)$ zu konstruieren, ebenso kann auch die Aufgabe vorliegen, eine gegebene Gleichung n^{ten} Grades durch den quadratischen Wurzelfaktor $x^2 - 2ux + w^2$ zu teilen, d. h. aus den Koefficienten der gegebenen Gleichung n^{ten} Grades die Koefficienten der resultierenden

Gleichung vom Gerade $(n-2)$ durch Zeichnung zu ermitteln. Die Lösung dieser Aufgabe bedarf nach dem auf Seite 144 und 145 Gesagten kaum irgend einer weiteren Erläuterung.

Es liegt die Frage nahe, ob man die in Rede stehenden Konstruktionen benutzen kann, um wenigstens die reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung n^{ten} Grades $f_n(x) = 0$ zu ermitteln. Grundsätzlich ist diese Frage zu bejahen, sobald man die Anwendung von Näherungskonstruktionen und Hilfskurven zuläfst. Es handle sich um die Wurzel r_n, für die ein Versuchswert ϱ angenommen wird. Man teilt ebenso wie es auf Seite 144 angegeben wurde, die gegebene Gleichung durch den Faktor $x-\varrho$; die dabei erhaltenen Koefficienten werden zum Unterschied mit K bezeichnet: Fällt K^1_{n-1} genau auf die durch den Anfangspunkt A und C^1_n verlaufende Gerade, so ist ϱ eine Wurzel der Gleichung $f_n(x) = 0$.



In der vorstehenden Figur würde letzteres der Fall sein, wenn der Punkt K^1_{n-1} auf M fiele. Das ist nicht der Fall, und darum ist in der Figur ϱ keine Wurzel. Dasselbe Verfahren kann man nun für andere Werte ϱ wiederholen; jedem dieser Werte wird ein anderer Punkt K^1_{n-1} entsprechen. Zeichnet man durch alle diese Punkte eine stetige Kurve, so wird diese die Gerade AC^1_n (in der Figur $C^1_{n-1}C^1_n$) in so vielen Punkten berühren oder schneiden, wie die Gleichung reelle Wurzeln hat[1]), und die durch die Berührungs- oder Schnittpunkte gezogenen Ordinaten schneiden

---

1) Das Berühren wird einem Paar oder mehreren Paaren gleicher Wurzeln entsprechen, wenn der Berührungspunkt kein Inflexionspunkt ist; ist letzteres der Fall, so entspricht er 1, 3, 5, 7 ... gleichen Wurzeln.

auf der Achse der x die reellen Wurzeln ab, positiv von C_n^{n+1} nach links gemessen. Allgemein wird das Verfahren nur dann praktisch anwendbar sein, wenn die Kurve des Punkts K_{n-1}^1 die Gerade AC_n^1 unter nicht allzu spitzen Winkeln schneidet. Dafs in der Regel ein Schneiden, kein Berühren der beiden Linien stattfindet, kann so bewiesen werden:

Aus der Figur Seite 147, in der der Pol O in die bequemste Lage geschoben ist, kann man ablesen:

$$K_{n-1}^{n-1} = \frac{C_n^n}{\varrho},$$

$$K_{n-1}^{n-2} = \frac{C_n^{n-1} - K_{n-1}^{n-1}}{\varrho} = \frac{C_n^{n-1}}{\varrho} - \frac{C_n^n}{\varrho^2}$$

$$K_{n-1}^{n-3} = \frac{C_n^{n-2} - K_{n-1}^{n-2}}{\varrho} = \frac{C_n^{n-2}}{\varrho} - \frac{C_n^{n-1}}{\varrho^2} + \frac{C_n^n}{\varrho^3}$$

$$K_{n-1}^{n-4} = \frac{C_n^{n-3} - K_{n-1}^{n-3}}{\varrho} = \frac{C_n^{n-3}}{\varrho} - \frac{C_n^{n-2}}{\varrho^2} + \frac{C_n^{n-1}}{\varrho^3} + \frac{C_n^n}{\varrho^4}$$

endlich

$$K_{n-1}^1 = \frac{C_n^2}{\varrho} - \frac{C_n^3}{\varrho^2} + \frac{C_n^4}{\varrho^3} - + \cdots \pm \frac{C_n^n}{\varrho^{n-1}}$$

$$= \varrho\left\{\frac{C_n^2}{\varrho^2} - \frac{C_n^3}{\varrho^3} + \frac{C_n^4}{\varrho^4} - + \cdots \pm \frac{C_n^n}{\varrho^n}\right\}.$$ [1])

Aus diesem Ausdruck wird der Wert für C_{n-1}^1, wenn man $\varrho = r_{\_}$ setzt. Die Ordinate von M ist:

1) Zur Kontrolle kann man folgende Rechnung anstellen:
Subtrahiert man voneinander die beiden Gleichungen

$$f_n(\varrho) = \varrho^n - C_n^1\varrho^{n-1} + C_n^2\varrho^{n-2} - + \cdots \pm C_n^n$$

$$K_{n-1}^1\varrho^{n-1} = \qquad\qquad C_n^2\varrho^{n-2} - + \cdots \pm C_n^n,$$

so folgt:

$$f_n(\varrho) = \varrho^{n-1}(\varrho - C_n^1 - K_{n-1}^1).$$

Für $\varrho = r_n$ wird hieraus:

$$f_n(\varrho) = \varrho^{n-1}(\varrho - C_n^1 - C_{n-1}^1)$$

$$= \varrho^{n-1}(\varrho - r_n),$$

d. i. $f_n(r_n) = r_n^{n-1}(r_n - r_n) = 0.$

Diese Schlufsgleichung entspricht der Wurzel r_n.

$$\overline{K^n_{n-1}M} = \frac{\varrho C^1_{n-1} + \delta C^1_n}{r_n}.$$

Setzt man nun: $\overline{K^1_{n-1}M} = \varepsilon$, so findet man

$$\varepsilon = \delta \frac{C^1_n}{r_n}$$

$$+\varrho\left\{C^2_n\left(\frac{1}{r^2_n}-\frac{1}{\varrho^2}\right)-C^3_n\left(\frac{1}{r^3_n}-\frac{1}{\varrho^3}\right)+C^4_n\left(\frac{1}{r^4_n}-\frac{1}{\varrho^4}\right)-+\cdots\pm C^n_n\left(\frac{1}{r^n_n}-\frac{1}{\varrho^n}\right)\right\}.$$

Hierin ist $\varrho = r_n - \delta$. Läfst man δ unendlich klein werden und schreibt zur Bezeichnung dessen $d\delta$ statt δ, $d\varepsilon$ statt ε, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\widehat{MNK^1_{n-1}} = \frac{d\varepsilon}{d\delta} = \frac{C^1_n}{r^n} - 2\frac{C^2_n}{r^2_n} + 3\frac{C^3_n}{r^3_n} - + \cdots \mp n\frac{C^n_n}{r^n_n}.$$

Weiter ist:

$$tg\gamma = \operatorname{tg}\widehat{MC^1_{n-1}K^1_{n-1}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{cotg}\beta)+1}{\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{tg}\alpha+1},\ \operatorname{tg}(\alpha-\gamma) = \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{cotg}\beta-1.$$

und wenn $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^0$ ist:

$$\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta - 1.$$

γ ist der Winkel, unter dem die Kurve des Punktes K^1_{n-1} die Gerade AC^1_n schneidet, und da dieser Wert in der Regel von Null verschieden ist, so findet in der Regel auch ein Schneiden beider Linien, kein Berühren statt. Letzteres ist, wie oben schon angedeutet wurde, für paarweise vorkommende gleiche Wurzeln der Fall, während für unpaar vorkommende gleiche Wurzeln ein Berühren und gleichzeitig eine Inflexion der Kurve im Berührungspunkt stattfindet.

Grundsätzlich mufs dieses Verfahren offenbar alle reellen Wurzeln liefern, und diese sind einzeln dann alle von C^{n+1}_n aus zu messen. Hat man eine von diesen Wurzeln, r_n, gefunden, so sind damit die Koefficienten der Gleichung $\frac{f_n(x)}{x-r_n} = f_{n-1}(x) = 0$ bekannt, und man kann die andern Wurzeln nun auch suchen, indem man von dieser letzteren Gleichung ausgeht, u. s. w.; natürlich werden dabei die Zeichenfehler, die der gefundenen ersten Wurzel etwa anhaften mögen, dann mit fortgetragen.

Für ein sicheres Arbeiten ist eine gut durchgeführte Bezeichnung der einzelnen Punkte in der Zeichnung sehr wesentlich; die in der

Fig. 1 der angehängten Zeichnungen und in den Figuren auf Seite 145 und 147 eingeführte Bezeichnung ist dafür brauchbar.

Über manche der hier in Frage kommenden Beziehungen kommt man zu einem klaren Einblick durch Betrachtungen, die denen verwandt sind, die Dr. H. Scheffler anstellt in seinem Buch: „Die Auflösung der algebraischen und transcendenten Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten . . ., Braunschweig 1859", speziell § 9 (und andere §§).

Um gleichzeitig zwei Wurzeln der Gleichung zu ermitteln (die, wenn sie konjugiert sind, auch komplex sein könnten), müfste man sich auf die Betrachtungen auf Seite 144 und 145 stützen: das Verfahren würde in einzelnen Fällen zwar nicht undurchführbar, aber doch recht schwerfällig werden, weil man es gleichzeitig mit 2 Unbekannten $2u$ und w^2 zu thun hat.

In der Figur 2 der anliegenden Zeichnungen ist dieselbe Aufgabe, die in Fig. 1 für die reellen Werte r_1, r_2, r_3 . . . gelöst wurde, behandelt für den Fall, dafs an die Stelle dieser reellen Werte die komplexen Werte $r_1 . e^{i\varphi_1}$, $r_2 . e^{i\varphi_2}$, $r_3 . e^{i\varphi_3}$, $r_4 . e^{i\varphi_4}$ und $r_5 . e^{i\varphi_5}$ treten; r_1 bis r_4 und ebenso φ_1 bis φ_4 sind positiv, r_5 und φ_5 sind negativ gewählt worden. Die Zeichnung liefert also allgemein gesprochen (bezogen auf die Achse AY als Grundachse und für einen Drehsinn von rechts nach links), in einem Wert AC_n^e, der nach Gröfse und Richtung zu nehmen ist, die Summe der aus n Elementen komplexer Natur $(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2} \ldots . r_n e^{i\varphi_n})$ gebildeten Kombinationen zur Klasse e, ohne Wiederholung. Die Konstruktion geschieht in folgender Weise, wobei in den Formeln die Einklammerung einer linearen Gröfse bedeutet, dafs sie nach Länge und Richtung zu nehmen ist.

Man trage auf der X-Achse von A aus die Moduln r_1, r_2 . . nach Länge und Vorzeichen auf, genau wie in Fig. 1, ferner trage man neben A die Winkel φ_1, φ_2 . . . aneinander gereiht auf. Ohne weiteres kann man nun die Kombinationen der ersten Klasse zeichnen, denn es ist:

$$(C_1^1) = (AC_1^1) = (r_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$$

$$(C_2^1) = (AC_2^1) = (r_1) + (r_2) = r_1 e^{i\varphi_1} + r_2 . e^{i\varphi_2}$$

$$(C_3^1) = (AC_3^1) = (r_1) + (r_2) + (r_3) = r_1 . e^{i\varphi_1} + r_2 . e^{i\varphi_2} + r_3 . e^{i\varphi_3}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$(C_n^1) = (AC_n^1) = (r_1) + \cdot\cdot + (r_n) = r_1 . e^{i\varphi_1} + \cdot\cdot\cdot + r_1 . e^{i\varphi_n} .$$

Bestimmt man weiter die Punkte $\overset{1}{1}, \overset{2}{2}, \overset{3}{3}\ldots$ genau so, wie in Fig. 1 die Punkte $C_1^1, C_2^2, C_3^3\ldots$ bestimmt wurden, projiziert dann $\overset{1}{1}$ nach $\overline{\overline{1,\ 1,}}\ \overset{2}{2}$ nach $\overline{\overline{2,\ 2,}}\ \overset{3}{3}$ nach $3,\ 3\ \ldots$ und macht $AC_1^1 = A\overline{\overline{1,\ 1,}}$, $AC_2^2 = A\overline{\overline{2,\ 2,}}$, $AC_3^3 = A\overline{\overline{3,\ 3}}\cdots$, wo $C_1^1, C_2^2, C_3^3\cdots$ auf den äusseren Schenkeln der Winkel $\varphi_1, \varphi_1+\varphi_2, \varphi_1+\varphi_2+\varphi_3, \cdots$ liegen, so ist

$$(C_1^1) = (AC_1^1) = (r_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$$
$$(C_2^2) = (AC_2^2) = (r_1)\cdot(r_2) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$
$$(C_3^3) = (AC_3^3) = (r_1)\cdot(r_2)\cdot(r_3) = r_1 r_2 r_3 e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(C_n^n) = (AC_n^n) = (r_1)(r_2)\cdots(r_n) = r_1\cdot r_2\cdots r_n\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n)}.$$

Damit sind also der erste Polygonzug

$$AC_1^1 C_2^1 \ldots C_n^1$$

und die Anfangspunkte

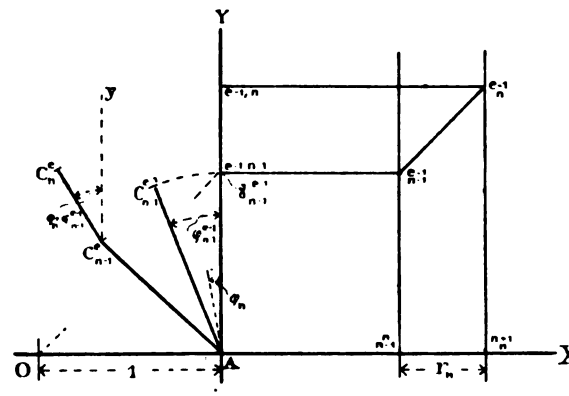
$$C_2^2,\ C_3^3 \ldots C_n^n$$

der folgenden Züge gefunden; nun zeichnet man

$$C_2^2, C_3^2 \ldots C_n^2,$$

dann

$$C_3^3, C_4^3 \ldots C_n^3$$



u. s. w. bis $C_n^{n-1}C_n^n$; der letzte Polygonzug für die Kombinationen n^{ter} Klasse besteht aus der einzigen schon gefundenen Geraden AC_n^n.

Ist die weitere Konstruktion bei einem beliebigen Punkt C_{n-1}^e angekommen, wo e und n beliebige Werte haben können, so findet man weiter den Punkt C_n^e nach vorstehender Figur nach der Formel (A) auf Seite 140, die jetzt so lautet:

$$(C_n^e) = (C_{n-1}^e) + (r_n)\cdot(C_{n-1}^{e-1})$$

oder

$$(AC_n^e) = (AC_{n-1}^e) + (r_n)\cdot(AC_{n-1}^{e-1})$$
$$= (AC_{n-1}^e) + r_n\cdot e^{i\varphi_n}\cdot\overline{AC_{n-1}^{e-1}}\cdot e^{i\varphi_{n-1}^{e-1}}$$
$$= (AC_{n-1}^e) + r_n\cdot\overline{AC_{n-1}^{e-1}}\cdot e^{i(\varphi_n+\varphi_{n-1}^{e-1})}.$$

Man mache $A\overline{e-1,\ n-1} = AC_{n-1}^{e-1}$ und ziehe von dem Punkte $\overline{e-1,\ n-1}$, d. i. γ_{n-1}^{e-1} die Parallele zu x nach $_{n-1}^{e-1}$ und dann die Gerade $_{n-1}^{e-1}\ _{n}^{e-1} \parallel O\gamma_{n-1}^{e-1}$, darauf $_{n}^{e-1}\ \overline{e-1,\ n-1} \parallel x$. Nun ist offenbar die Strecke

$$\overline{e-1,\ n-1\quad e-1,\ n} = r_n \cdot \overline{AC_{n-1}^{e-1}},$$

d. i. gleich dem Modul von $\left(C_{n-1}^{e}\, C_{n}^{e}\right)$ oder gleich der Länge $\overline{C_{n-1}^{e} C_{n}^{e}}$. Trägt man demnach diese Länge von C_{n-1}^{e} aus auf einer Geraden ab, die mit der Richtung der Grundachse y den Winkel $\varphi_n + \varphi_{n-1}^{e-1}$ bildet, so hat man in dem Endpunkt den gesuchten Punkt C_n^e gefunden.

Mit dieser Konstruktion (die ganz allgemein und daher auch für das bereits Gezeichnete: $AC_1^1\, C_2^1 \ldots C_n^1$, AC_2^2, $AC_3^3 \ldots$ gilt) schliefst man an C_2^2 an, findet dann zunächst C_3^2, darauf C_4^2 u. s. w., bis man zu Ende gekommen ist.

Kommen neben den komplexen Werten (r) auch reelle Werte r vor, und handelt es sich nur um die Konstruktion der Koefficienten der Gleichung, die diese Wurzeln besitzt, so ist die Aufeinanderfolge der Wurzeln gleichgültig und man kann alle reellen Wurzeln zuerst, alle komplexen zuletzt nehmen oder umgekehrt. Wesentlich ist immer, die Zeichnung klar und übersichtlich zu halten.

Auch hier ist, wie man leicht erkennt, die Umkehrung der Aufgabe durchführbar, nämlich eine gegebene Gleichung $f_n(x) = 0$ durch einen bekannten Wurzelfaktor $x - r_n \cdot e^{i\varphi_n}$ zu teilen und die entsprechende Gleichung $f_{n-1}(x) = 0$ zu finden. Die Arbeit kann aber etwas mühsam werden — und sie wird es um so mehr werden, wenn man auf diese Weise ähnlich wie auf Seite 147 bis 149 eine noch unbekannte komplexe Wurzel $r_n e^{i\varphi_n}$ bestimmen will.

Es sei

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}} = (a_1,\ a_2,\ a_3 \cdots)$$

ein Kettenbruch, dessen sämtliche Teilzähler gleich der positiven Einheit, dessen Teilnenner a irgendwelche positive oder negative, durch Zahlen oder Strecken von Linien bestimmte Gröfsen sind. Bezeichnet man den n^{ten} Näherungsbruch dieses Kettenbruchs mit $\frac{p_n}{q_n}$, so ist

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2}{1 + a_2 \cdot a_1},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{1 + a_3 \cdot a_2}{a_1 + a_3(1 + a_2 a_1)},$$

— — — — — — —

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-2} + a_n \cdot p_{n-1}}{q_{n-2} + a_n \cdot q_{n-1}}.$$

Es ist also:

$$p_n = p_{n-2} + a_n \cdot p_{n-1},$$

$$q_n = q_{n-2} + a_n \cdot q_{n-1}.$$

Die Form dieser Ausdrücke läfst ohne Weiteres erkennen, dafs nach einem ähnlichen Verfahren wie bei der Konstruktion der Koefficienten algebraischer Gleichungen aus den Wurzeln der letzteren, auch die Gröfsen p_n und q_n aus den Teilnennern a des Kettenbruchs konstruiert werden können. Die Konstruktion gestaltet sich am klarsten, wenn man als 0ten Teilbruch noch den Bruch $\frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}$ hinzufügt, so dafs die Reihe der Teilnenner in 1, a_1, a_2, a_3 . . . übergeht. Dabei kann man es, um an Zeichenfläche zu sparen, leicht so einrichten, dafs man alle Nenner vom Anfangspunkt an auf der Abscissen- oder Ordinatenachse aufträgt, nicht wie bei den algebraischen Gleichungen die Wurzeln aneinander gereiht. Macht man dann weiter $\frac{p_n}{q_n} = \operatorname{tg} \alpha_n$, so werden die absoluten Werte des Bruches $\frac{p_n}{q_n}$ und des Winkels α_n gleichzeitig zu- und abnehmen, und den Grenzen 0 und $\pm \infty$ des Bruchs entsprechen die Grenzen 0 und $\pm \frac{\pi}{2}$ des Winkels. Bringt man schliefslich alle Näherungsbrüche $\frac{p_n}{q_n}$ auf denselben Zähler oder Nenner, so erhält man ein übersichtliches Bild ihrer Werte, dem man auch leicht die Werte aller möglichen Mittelbrüche einfügen kann.

Liegt der allgemeinere Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots}}} = \left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots\right\}$$

vor, so sind dessen Näherungswerte:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{a_1},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 \cdot b_1}{b_2 + a_2 \cdot a_1},$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{b_3 \cdot b_1 + a_3 (a_2 b_1)}{b_3 \cdot a_1 + a_3 (b_2 + a_2 a_1)}$$

— — — — — — — —

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_n p_{n-2} + a_n \cdot p_{n-1}}{b_n q_{n-2} + a_n \cdot q_{n-1}},$$

so dafs

$$p_n = b_n \cdot p_{n-2} + a_n \cdot p_{n-1},$$

$$q_n = b_n \cdot q_{n-2} + a_n \cdot q_{n-1} \text{ ist.}$$

Auch diese Ausdrücke sind noch, wenn man nach und nach von dem ersten zum zweiten, von diesem zum dritten Näherungsbruch übergeht und so weiter fortschreitet, ganz bequem zu zeichnen (vergl. Seite 144 ff.). Statt den gegebenen Kettenbruch unmittelbar in der gegebenen Form in Angriff zu nehmen, könnte man ihn auch zuvor auf die oben besprochene Form mit den Teilzählern + 1 bringen, was mit Hilfe der folgenden, durch einfache Division abzuleitenden Formel geschehen kann:

$$\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \ldots\right\} =$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2 b_1}{b_2}, \frac{a_3 b_2}{b_3 b_1}, \frac{a_4 b_3 b_1}{b_4 b_2}, \frac{a_5 b_4 b_2}{b_5 b_3 b_1}, \frac{a_6 b_5 b_3 b_1}{b_6 b_4 b_2}, \frac{a_7 b_6 b_4 b_2}{b_7 b_5 b_3 b_1}, \ldots\right),$$

Die Anwendung dieser Formel beim Zeichnen ist nicht schwierig. — Endlich braucht die graphische Behandlung auch hier vor dem Fall nicht Halt zu machen, wo die einzelnen Teilzähler und Teilnenner alle oder teilweise komplexe Gröfsen sind.

Wesentlich ist bei solchen Darstellungen allerdings immer eine geschickte Anordnung der Zeichnung, die man natürlich in verschiedener Weise treffen kann, und eine übersichtliche und streng durchgeführte Bezeichnung oder Bezifferung der einzelnen in den Figuren vorkommenden Punkte und Linien. Beides darf ich nach dem bereits Mitgeteilten wohl der freien Wahl des Lesers überlassen.

Dem vorstehend skizzierten Verfahren haftet namentlich dann, wenn die Gröfsen a oder b und a erhebliche positive oder negative Werte haben, d. h. wenn sie erheblich über $\pm$ 1 hinausgehen, der Übelstand an, dafs die Grössen p_n und q_n sehr bald die Ausdehnung der verfügbaren Zeichenfläche überschreiten werden. Dann liegt der

Versuch nahe, zunächst durch rechnerische oder zeichnerische Division die einzelnen Teilzähler und Teilnenner auf kleinere Zahlen zu bringen, oder auch durch Zeichnen in verkürztem Maßstab die räumlichen Schwierigkeiten zu überwinden.

Zu beachten ist auch sowohl fürs Rechnen wie fürs Zeichnen die folgende Art der Lösung, die freilich in letzterem Falle wegen zu großer Zahlen nicht immer durchführbar sein wird. Man setze für den Kettenbruch

$$\left\{\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \cdots\right\},$$

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{b_1}{a_1} + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n-1},$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{b_1}{a_1} + \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{n-1} + \delta_n,$$

so daß jedem hiuzugefügten δ ein weiterer Teilbruch entspricht. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n} + \delta_n,$$

also:

$$\delta_n = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}.$$

Da nun

$$p_{n+1} = b_{n+1} \cdot p_{n-1} + a_{n+1} \cdot p_n,$$
$$q_{n+1} = b_{n+1} \cdot q_{n-1} + a_{n+1} \cdot q_n,$$

so ist:

$$\delta_n = b_{n+1} \frac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n q_{n+1}}.$$

Setzt man hierin $n-1$ statt n, dann $n-2$ statt $n-1$ u. s. w. und führt schließlich die Werte

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2}$$

ein, so geht δ_n über in

$$\delta_n = (-1)^n \cdot \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n \cdot b_{n+1}}{q_n \cdot q_{n+1}}.$$ [1])

1) Bezeichnet man für $k+1 < n+1$, oder $k < n$, den Teil des Kettenbruches vom $(k+2)^{\text{ten}}$ Teilbruch an bis einschließlich des $(n+2)^{\text{ten}}$ Teilbruchs so:

$$\left\{\frac{b_{k+2}}{a_{k+2}}, \frac{b_{k+3}}{a_{k+3}}, \cdots \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right\} = \frac{p_{\overline{k+2},\ \overline{n+1}}}{q_{\overline{k+2},\ \overline{n+1}}},$$

Man kann statt dessen auch so rechnen:

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}},$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \cfrac{1}{\frac{a_1}{b_1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n},$$

so dafs jedem hinzugefügten ε ein weiterer Teilbruch entspricht. Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

$$\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} = \frac{q_n}{p_n} + \varepsilon_n,$$

also

$$\varepsilon_n = \frac{p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n}{p_n p_{n+1}}.$$

Da nun

$$p_{n+1} = b_{n+1} p_{n-1} + a_{n+1} p_n,$$
$$q_{n+1} = b_{n+1} q_{n-1} + a_{n+1} q_n,$$

so ist:

$$\varepsilon_n = b_{n+1} \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{p_n p_{n+1}}.$$

Setzt man hierin $n-1$ statt n, dann $n-2$ statt $n-1$ u. s. w. und führt schliefslich die Werte

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 b_1}{a_2 a_1 + b_2}$$

ein, so geht ε_n über in

$$\varepsilon_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n \cdot b_{n+1}}{p_n p_{n+1}}.$$ [1])

Soweit man imstande ist, die Ausdrücke δ_n oder ε_n zu konstruieren, soweit kann man auch die aufeinander folgenden Näherungswerte des gegebenen Kettenbruchs graphisch darstellen, indem man für jeden folgenden an dem zunächst vorhergehenden oder an dessen Nenner die entsprechende Verbesserung δ oder ε anbringt.

so sind die allgemeineren Gleichungen:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_k}{q_k} = \delta_n + \delta_{n-1} + \cdots + \delta_k = (-1)^k \quad b_1 \cdot b_2 \cdots b_{k+1} \cdot \frac{q_{\overline{k+2}, \overline{n+1}}}{q_k q_{n+1}},$$

$$\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}} - \frac{q_k}{p_k} = \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} + \cdots + \varepsilon_k = (-1)^{k+1} \quad b_1 b_2 \cdots b_{k+1} \cdot \frac{q_{\overline{k+2}, \overline{n+1}}}{p_k \cdot p_{n+1}}.$$

Für $k = n$ und $\overline{n+1}$ treten rechts 1 und 0 an die Stelle von $q_{\overline{k+2}, \overline{n+1}}$.

1) Siehe vorige Anmerkung.

Im allgemeinen wird man irgend einen Näherungswert $\frac{p_n}{q_n}$ am einfachsten und mit dem geringsten Aufwand von Zeichenfläche ermitteln, wenn man von unten herauf konstruiert. Man bringt zunächst den n^{ten} Teilbruch $\frac{b_n}{a_n}$ auf den Nenner 1, also auf die Form $\frac{\frac{b_n}{a_n}}{1}$ und addiert diesen Wert zu a_{n-1} hinzu, verbessert also damit den $(n-1)^{\text{sten}}$ Teilbruch. Nun bringt man diesen verbesserten Teilbruch auf den Nenner 1 und verbessert damit den $(n-2)^{\text{ten}}$ Teilbruch, und so fort, bis man auch den 1sten Teilbruch verbessert und damit den gewünschten Näherungswert ermittelt hat. Für irgend einen andern Näherungswert mufs man das Verfahren freilich vollständig wiederholen, da es indessen schnell und sicher auszuführen ist, wird man damit in der Regel für alle Fälle ohne Benutzung irgend welcher Formeln auskommen. Das gilt auch dann noch, wenn die Teilbrüche komplexe Zähler und Nenner enthalten.

Überhaupt lassen sich manche scheinbar verwickelte graphische Darstellungen in der Zeichnung so einfach anordnen, dafs man sie fast mechanisch ausführen kann, eine Behauptung, für deren Richtigkeit ich bei dem beschränkten Raum dieser Mitteilungen leider wieder an die eigene Geschicklichkeit des Lesers appellieren mufs. Ein gewandter Zeichner wird aber in solchen Fällen leicht und sicher das einfachste und kürzeste und zugleich das am wenigsten Zeichenfläche beanspruchende Verfahren zur Lösung der Aufgabe finden.

März 1892.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1892/93,

zusammengestellt vom Jahrverwalter, Dr. J. A. Repsold.

Versammlung vom 13. Februar 1892.

(Nachtrag zum vorigen Jahresbericht.)

Herr Ingenieur Hübner trägt vor über die Bewegungsachsen gestützter starrer Körper in ihren geometrischen Beziehungen zu einander. Der Vortrag wird in allgemeinerer Ausführung in den Mittheilungen der Gesellschaft erscheinen (vergl. S. 107).

Herr Dr. Busche berichtet über den Inhalt der letzten Hefte des American Journal of Mathematics.

Herr Dr. Järisch legt dar, wie sich eine Differentialgleichung 4. Ordnung, die in einer Arbeit von J. Thomae über das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders auftritt, in einfacher Weise durch Bessel'sche Functionen integriren lässt.

Herr Dr. Schröder macht aufmerksam auf den reichen Inhalt der Vorlesungen von F. Klein über die Gleichung $\Delta^2 u + x^2 u = 0$, herausgegeben von F. Pockels.

Hauptversammlung am 29. Februar 1892.

(Nachtrag zum vorigen Jahresbericht.)

Der abgehende Jahrverwalter, Herr Dr. Hoppe, giebt einen kurzen Bericht über die Thätigkeit der Gesellschaft im Laufe des 202. Jahres ihres Bestehens und ertheilt Abrechnung über die Kassenverwaltung. — Die Zahl der Ehrenmitglieder beträgt zur Zeit 12, die der hiesigen, d. h. in Hamburg, Altona, Ottensen und Wandsbeck wohnenden Mitglieder 56 und die der auswärtigen 16. — Bei der statutenmässigen Wahl eines Adjuncten fällt die Mehrzahl der Stimmen auf Herrn Dr. Köpcke, Ottensen. Der Vorstand besteht demnach für die Dauer des neuen Geschäftsjahres aus den Herren Dr. J. A. Repsold, Jahrverwalter, Dr. P. Järisch, Mitjahrverwalter, und Dr. A. Köpcke, Adjunct. — An die Versammlung schliesst sich das übliche Snuten- und Poten-Festessen.

Versammlung am 12. März 1892.

Herr Wasserbau-Director Nehls trägt vor über die gebräuchliche Gleichung der Berührungsebene für krumme Flächen. Redner führt aus, dass die gewöhnlich behauptete Nichtanwendbarkeit dieser Gleichung für die singulären Punkte der Flächen thatsächlich zwar zuzugeben sei, aber darauf beruhe, dass die Gleichung nach der Art ihrer Ableitung für solche Punkte nicht zutreffen könne. Eine allgemein gültige Gleichung für die Berührungsebene, die natürlich die gewöhnliche, nur für Punkte in stetig gekrümmter Fläche geltende Gleichung als besonderen Fall mit umfassen müsse, sei nur zu finden, wenn man diese Ebene festlege als die Ebene zweier einander unendlich naher Tangenten an die Fläche durch den Berührungspunkt, ähnlich wie dies in Dr. H. Scheffler's Naturgesetzen, S. 823 ff. geschehen. Dabei werde es allerdings nothwendig, allgemein nicht schlechthin von einer Berührung in einem gegebenen Flächenpunkte, sondern von einer Berührung in diesem Punkte für eine bestimmte, von dem Punkte ausgehende Richtung in der Fläche zu sprechen. — He

Director Nehls giebt darauf noch eine Mittheilung über graphische Darstellung der Combinationen ohne Wiederholung aus reellen und complexen Grössen, für die er erläuternde Beispiele zur Verfügung stellt.

Versammlung am 9. April 1892.

Der Vorsitzende theilt mit, dass Herr Regierungs-Baumeister Koldewey wegen dauernder Abwesenheit von Hamburg seinen Austritt aus der Gesellschaft erklärt hat. — Für ein Robert Mayer in seiner Vaterstadt Heilbronn zu errichtendes Denkmal wird ein Beitrag bewilligt. — Herr Dr. Järisch trägt vor über F. Lindemann's Molecularphysik. Redner weist darauf hin, dass Lindemann sich an 1884 von W. Thomson gehaltene Vorlesungen anschliesst, aber seine Untersuchungen auch auf die chemischen, magnetischen und electrischen Phänomene ausdehnt; er findet bei beiden in dem Nachweis der Existenz der Eigenschwingungen der Moleküle eine Lücke und zeigt, wie die Beweisführung dadurch strenger zu gestalten sei, dass die Thomson'schen Integrale der die Bewegung der Kugelschalen bestimmenden Differentialgleichungen durch allgemeinere ersetzt werden. Weiter bezeichnet er als sehr wünschenswerth, für das grundlegende Resultat der Eigenschwingungen eine strenge Herleitung aus den allgemeinen Elasticitätsgleichungen zu gewinnen; dazu sei, wie Lindemann selbst bemerkt, die Thomson'sche Hypothese über die Constitution des Moleküls dahin abzuändern, dass man sich das Molekül als eine stetig mit Masse erfüllte Kugel zu denken habe, deren Dichtigkeit mit dem Radius variire und für ausgezeichnete Werthe desselben besonders gross werde. — Herr Dr. Böger berichtet über Aug. Schmidt's Strahlenbrechung auf der Sonne.

Versammlung am 14. Mai 1892.

Es wird beschlossen, in Zukunft die Verhandlungen präcise 7½ Uhr zu eröffnen und die Dauer eines Vortrages nicht über eine Stunde auszudehnen. — Herr Professor Schubert trägt vor über die Wahrscheinlichkeit, dass unter einer nicht zu kleinen Anzahl von Elementen, nachdem sie beliebig permutirt sind, mindestens eines wieder seinen ursprünglichen Platz hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Element, oder dass nur ein Element seinen alten Platz einnimmt, ergeben sich als gleich gross, nämlich als reciprok zur Basis des natürlichen Logarithmensystems, und der Fall, dass mindestens ein Element seinen natürlichen Platz haben wird, besitzt grössere Wahrscheinlichkeit als der Fall, dass dies für kein Element zutreffen wird. — Herr Dr. Hoppe

trägt vor über Theorie der Krystallelectricität. Es wird der Versuche Brewster's, Hankel's und Anderer, zu einer Theorie zu gelangen, sowie der Weiterbildung der Anschauung von der molekularen Polarität durch W. Thomson gedacht und gezeigt, dass die im vorigen Jahre von Voigt aufgestellte Theorie einen weiteren Fortschritt bilde, da sie zuerst der Beobachtung genüge, dass Krystalle nicht nur bei Erwärmung und Abkühlung, sondern auch durch Druck electrisch werden. — Herr Dr. Schröder theilt einige partielle Differentialgleichungen mit, welchen die Perioden des überall endlichen elliptischen Integrals genügen. Diese durch ihre einfache und symmetrische Gestalt bemerkenswerthen Relationen ergeben sich aus den Gleichungen, die die nach den Verzweigungswerthen gebildeten partiellen Ableitungen des Integrals 1. Gattung durch das Normalintegral 2. Gattung ausdrücken.

Versammlung am 18. Juni 1892.

Herr Dr. Schröder trägt vor über die Systematik der elliptischen Functionen. Nach einem Hinweis auf F. Klein's Arbeiten und einer Besprechung der Riemann'schen Fläche werden die Functionen construirt, welche nirgends auf der Fläche ihren analytischen Charakter verlieren, jeden Werth auf der Fläche zweimal annehmen und zu einem beliebig gegebenen Punkte doppelt zählend algebraisch unendlich werden. Der sich ergebende Ausdruck, welcher die directe Verallgemeinerung der Weierstrass'schen Function $p(u)$ ist, enthält noch zwei willkürliche Constanten, die an der Weierstrass'schen Normalform bestimmt werden. Darauf werden die Functionen mit algebraischen bez. logarithmischen Unstetigkeiten dargestellt, und schliesslich wird eine Function gebildet, welche sich auf der ganzen Fläche wie eine rationale ganze Function verhält, nirgends unstetig ist und nur an einer Stelle doppelt zählend verschwindet. Die Quadratwurzel aus dieser Function, die sogen. Klein'sche Primform, besitzt genau dieselben Eigenschaften wie die fundamentale Weierstrass'sche Sigmafunction und ist mit dieser identisch.

Versammlung am 8. October 1892.

(Im September hat der Epidemie wegen eine Versammlung nicht stattgefunden.)

Als auswärtiges Mitglied wird Herr Joaquim de Mendizabal Tamborrel in Mexico aufgenommen. — Der Jahrverwalter regt bei der Gelegenheit an, dass es sich empfehlen würde, den auswärtigen Mitgliedern eine einmalige Ablösung ihrer Jahresbeiträge zu ermöglichen. — Herr Dr. Schröder trägt vor über eine Beziehung

zwischen den Moduln der hyperelliptischen Thetafunctionen dreier Argumente. Anknüpfend an eine früher mitgetheilte Differentialgleichung, welcher der Modul der elliptischen Thetafunctionen genügt, wird gezeigt, dass sich diese Gleichung nicht direct auf den allgemeinen hyperelliptischen Fall übertragen lässt, dass vielmehr, abgesehen von dem einfachsten hyperelliptischen Falle : $p = 2$, das Analogon jener Gleichung eine complicirtere Gestalt hat. Die 6 Gleichungen, die sich bei $p = 3$ ergeben, lassen sich zu 3 anderen Gleichungen zusammenfassen, aus welchen eine ausser den Ableitungen der Moduln nach den Nullstellen der Grundform nur noch diese Nullstellen selbst enthaltende Beziehung zwischen den 6 Thetamoduln entspringt. Schliesslich wird diese zunächst in irrationaler Form erscheinende Relation rational gemacht. — Herr Admiralitätsrath Koldewey berichtet über einen Apparat zur Prüfung des Excentricitätsfehlers von Sextanten, welcher neuerdings auf der Seewarte benutzt wird, und überreicht eine diesen Gegenstand behandelnde Druckschrift.

Versammlung am 12. November 1892.

Der Vorsitzende macht Mittheilung von dem schon am 1. Juli d. J. erfolgten Tode des Mitgliedes Th. Knoblich und von dem wegen Uebersiedlung nach der Schweiz erfolgten Austritt des Herrn B. Schäffer. — Ein Antrag des Herrn Dr. Hoppe auf Aenderung der Statuten in Betreff des Beitrages der auswärtigen Mitglieder wird angenommen; statutengemäss ist indess noch die Abstimmung der nicht anwesenden einheimischen Mitglieder einzuholen. — Herr Dr. Oppenheimer trägt vor über die Construction algebraischer Curven aus einer Anzahl gegebener Doppelpunkte. Es wird gezeigt, wie man die projectivische Beziehung eines Curvenbüschels m^{ter} und eines Curvenbüschels n^{ter} Ordnung und die gegenseitige Lage ihrer Basispunkte anordnen müsse, um eine Curve $(m + n)^{ter}$ Ordnung mit Doppelpunkten zu construiren. Sodann construirt Redner Curven sechster Ordnung mit acht gegebenen Doppelpunkten, erläutert die entsprechenden Büschel und Netze, untersucht den Ort derjenigen Punkte, die zu den acht gegebenen Doppelpunkten als neunte Doppelpunkte von nicht zerfallenen Curven sechster Ordnung möglich sind, und zeigt, wie eine specielle Lage der gegebenen acht Doppelpunkte ermöglicht, auf die Jacobi'sche Curve des Satzes aller Curven dritter Ordnung durch sieben gegebene Punkte überzugehen. Noch wird die Construction von Curven $2n^{ter}$ Ordnung aus zerfallenen Curven $(2n + 1)^{ter}$ Ordnung erläutert. — Herr Prof. Schubert berichtet

über die von Prof. Hurwitz in Zürich ausgeführte Entwicklung der Zahl e auf Grundlage der schon von Lambert in seinen „Beiträgen" mitgetheilten Kettenbruch-Entwicklung einer Function von e^x und schliesst daran einige allgemeine Betrachtungen über Beweise für die Transcendenz der Zahlen e und π. — Herr Dr. Järisch giebt für die partielle Differentialgleichung, welche für Schwingungsprobleme die gleiche Bedeutung hat wie die Potentialgleichung für die Probleme des Gleichgewichts, eine neue Lösung, welche durch eine willkürliche Function eines von den sphärischen Coordinaten abhängigen Argumentes dargestellt wird, und zeigt, dass aus theoretisch-physikalischen Gründen auf das Vorhandensein einer zweiten ähnlichen Lösung von gleicher Allgemeinheit geschlossen werden müsse, für deren Aufsuchung er die Mitglieder der Gesellschaft zu interessiren sucht.

Versammlung am 10. December 1892.

Der Vorsitzende berichtet, dass die schriftlich erledigte Abstimmung über den in der vorigen Versammlung verhandelten Antrag Hoppe die Annahme mit allen Stimmen gegen eine ergeben hat. Berichtigte Exemplare der Statuten werden zur Verfügung gestellt. — Es wird beschlossen, einen Beitrag zu den Herstellungskosten eines Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen durch eine besondere Sammlung im Kreise der Mitglieder zu beschaffen. — Ein Beitrag zu einer Ehrengabe an Prof. Hermite in Paris bei Gelegenheit seines 70. Geburtstages wird aus der Gesellschaftskasse bewilligt. — Herr Dr. Köpcke trägt vor über stetige Functionen, die in einem Punkte mit allen ihren Ableitungen verschwinden. Es wird hervorgehoben, dass derartige nicht constante Functionen existiren, und dass, wie schon Dini nachgewiesen, eine stetige Function keineswegs durch die Werthe, die sie selbst und ihre Ableitungen in einem einzelnen Punkte besitzen, erklärt werden könne, da sie von einer etwa hierdurch bestimmten Taylor'schen Reihe vielleicht um eine jener erwähnten Functionen abweicht. Redner betont dann, dass die Frage, ob nicht durch jene Werthe im einzelnen Punkte nur eine einzige anschauliche Function erklärt wird, nicht entschieden werden könne, dass sie aber erneute Anregung gebe, nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Anschaulichkeit einer stetigen Function zu forschen; er beruft sich dabei auf eine Reihe von axiomatischen Aussprüchen über Bewegung und Anschaulichkeit, die er der Kritik der Mitglieder zu unterbreiten wünscht. — Herr *Wasserbaudirector Nehls* macht Mittheilung über neue Versuche zur Ent-

wicklung und Umformung von Kettenbrüchen, zu denen er durch den Vortrag des Herrn Prof. Schubert in der vorigen Versammlung angeregt worden ist, und giebt erläuternde Beispiele.

Versammlung am 14. Januar 1893.

Herr Geheimrath Neumayer trägt vor über einige neuere Arbeiten auf dem Gebiete des Erdmagnetismus. Redner geht aus von Gauss' allgemeiner Theorie des Erdmagnetismus. Er hebt hervor, dass bei dem damals noch sehr geringen Umfange zuverlässiger magnetischer Beobachtungen die Anwendung dieser Theorie zur Berechnung der magnetischen Elemente sehr unsichere Resultate ergeben musste, dennoch aber die zwischen Rechnung und Beobachtung übrig gebliebenen Differenzen sich in verhältnissmässig engen Grenzen hielten, und dass die von Erman und Petersen 1874 herausgegebene Bestimmung des magnetischen Potentials für 1829, welche auf viel reicheren, aber über 40 Jahre ausgedehnten Beobachtungen beruhte, kein wesentlich günstigeres Ergebniss gebracht hat. Entschieden besseren Erfolg hatte die von dem Vortragenden und Petersen für 1885 durchgeführte Berechnung, welche für die im physikalischen Atlas von Berghaus veröffentlichten magnetischen Karten benutzt worden ist. Indess zeigten eingehende Vergleichungen, dass gewisse Vernachlässigungen in der Berechnung, welche Gauss sich wegen des sehr ungenügenden Beobachtungsmaterials hatte erlauben dürfen, bei dem jetzigen, wesentlich vollkommeneren zu Fehlern geführt hatten. Redner hat sich deshalb entschlossen, eine nochmalige Berechnung unter strengerer Anwendung der Gauss'schen Theorie zu unternehmen, und hat dabei in der Mitwirkung des Dr. A. Schmidt in Gotha durch seine „Entwicklung der allgemeinen Formeln zur Darstellung des Potentials und der Componenten der erdmagnetischen Kraft" eine sehr willkommene Hülfe gefunden. Die Berechnungen danach, welche auf möglichst erlesenen und gleichzeitigen Beobachtungen beruhen, werden in Kurzem beendigt sein. Es sind bei denselben die von Prof. Seeliger in München berechneten Tafeln (Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe) von grossem Nutzen gewesen. Es wird noch der Beobachtungen an der Küste der Ostsee und auf derselben von Seiten der deutschen Marine und Gyllensköld's, sowie einer Arbeit des Prof. Frank E. Bigelow gedacht, welcher den Erdmagnetismus der Einwirkung der Sonnenstrahlen zuschreibt. — Zur Erläuterung des Vortrages wird eine reiche Sammlung von Karten, Photographien

und Schriftwerken vorgelegt. — Herr Dr. Busche trägt vor über die Function $E(x)$ mit complexem Argument. Es wird zunächst die allgemeine Dirichlet'sche Reciprocitätsgleichung für die reelle Function $E(x)$ abgeleitet. Darauf wird die Function $E(x)$ für ein complexes x definirt und ihr eine andere Function gegenübergestellt, die die Anzahl aller in einem Bereich enthaltenen ganzen Zahlen angiebt. Mit Hülfe dieser Function wird ein Analogon zu der Dirichlet'schen Formel aufgestellt, welches in gewissen Fällen die Berechnung einer Summe von complexen grössten Ganzen ermöglicht.

Herr Dr. Bohnert berichtet über den Inhalt einiger Hefte des American Journal of Mathematics.

Die Bibliothek der Gesellschaft hatte im Laufe des Jahres 1892/93 werthvolle Zuwendungen zu verdanken den Herren:

Julius Bergbohm, Moritz Cantor, Oscar Flor, Edmund Hoppe, A. Hurwitz, C. Koldewey, M. Krause, Hugo Krüss, M. E. Lemoine, M. Jos. Marchand, Joaquim de Mendizábal-Tamborrel, M. M. d'Ocagne, Ernst Ritter, Heinrich Schnell, Herm. Schubert, Wilhelm Schur, A. Sommerfeld, M. Stegemann, H. Stück, Oswald Venske, sowie den folgenden Gesellschaften: Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico, Danske Videnskabernes Selkskab in Kopenhagen, Naturforschende Gesellschaft in Zürich, Wiskundig Genootschap in Amsterdam.

Verzeichniss der Mitglieder der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1893.

I. Ehrenmitglieder.

Bierens de Haan, D., Dr. phil., Professor der Mathematik in Leyden.
Bruns, H., Dr. phil., Director der Sternwarte in Leipzig.
Cantor, M., Dr. phil., Professor der Mathematik in Heidelberg.
Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.
Hübbe, H. W. C., Stadtbaudirector in Schwerin.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Königsberg.
Lindley, W., Ingenieur in London.
Netto, E., Dr. phil., Professor der Mathematik in Giessen.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Strassburg.
Stammann, J. O., Dr. jur., Senator in Hamburg.
Sturm, R., Dr. phil., Professor der Mathematik in Breslau.
Weierstrafs, K., Dr. phil., Professor und Mitglied der königl. preuss. Academie der Wissenschaften in Berlin.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ambronn, F. A. L., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, königliche, in Berlin.
Böddicker, O., Dr. phil., Parsonstown, Irland.
Grimsehl, E., Oberlehrer in Cuxhaven.
Lentz, H., Wasserbau-Inspector in Cuxhaven.
Liebenthal, E., Dr. phil., Assistent an der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg.
Mahlke, Ch., wissenschaftl. Hilfsarbeiter an der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg.
Mendizábal-Tamborrel, J. de, Ingenieur in Mexico.
Meyn, H. W., Director der Karlshütte in Rendsburg.
Mügge, O., Dr. phil., Professor in Münster.
Ofterdinger, L. F., Dr. phil., Professor in Ulm.
Peters, C. F. W., Dr. phil., Director der Sternwarte in Königsberg.
Schrader, C. W. O., Dr. phil., Reichsprüfungsinspector in Berlin.
Schur, A. C. W., Dr. phil., Director der Sternwarte in Göttingen.
Servus, H., Dr. phil., Privatdocent an der Königl. Technischen Hochschule in Charlottenburg und Lehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin.
Sprung, A., Dr. phil., Sectionschef am meteorolog. Institut in Berlin.
Weyer, G. D. E., Dr. phil., Professor der Mathematik in Kiel.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium.
Bahnson, F. W. V., Dr. phil., Professor am Realgymnasium.
Bauch, F., Lehrer der Mathematik.
Bock, J. W., Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
Böger, R., Dr. phil., Oberlehrer.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Gymnasiallehrer.
Bolte, F. G., Dr. phil., Lehrer an der Navigationsschule.
Bubendey, J. F., Wasserbau-Inspector.
Busche, E., Dr. phil., Oberlehrer, Bergedorf.
Classen, J., Dr. phil., Assistent am physikalischen Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometermacher.
Eichler, K., Dr. phil., Oberlehrer, Altona.
Eylert, H., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Fischer, F., Assecuradeur.
Glinzer, E., Dr. phil., Lehrer d. Mathematik u. d. Naturwissenschaften.
Groscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer.
Herrmann, E., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.

Hildenbrandt, C. C. W., Revisor der Feuerkasse.
Hoppe, E., Dr. phil., Oberlehrer.
Hübner, A., Ingenieur, Altona.
Järisch, P. G. M., Dr. phil., Oberlehrer.
Keferstein, H. J., Dr. phil., Oberlehrer.
Kiessling, K. J., Dr. phil., Professor am Johanneum.
Köpcke, H. A., Dr. phil., Oberlehrer, Ottensen.
Koldewey, C. C., Admiralitätsrath und Abtheilungsvorsteher an deutschen Seewarte.
Krüss, H., Dr. phil., Inhaber des optischen Instituts von A. K
Kühl, J. H., Ingenieur und Lehrer an der Gewerbeschule.
Michaelsen, A., Dr. phil., Gymnasiallehrer, Altona.
Nagel, A. C., Civilingenieur.
Nehls, Chr., Wasserbau-Director.
Neumayer, G., Wirkl. Admiralitätsrath, Dr. phil., Professor, Dire der Seewarte.
Niebour, C. T. B., Director der Navigationsschule.
Öltjen, H., Dr. phil., Gymnasiallehrer.
Oppenheimer, H., Dr. phil.
Plath, C. W., Dr. phil., Oberingenieur a. D.
Reinmüller, P., Dr. phil., Director der Realschule der reformi Gemeinde.
Repsold, J. A., Dr. phil., Inhaber der astronomischen Werkstatt A. Repsold & Söhne.
Rümker, G. C. W., Professor, Director der Sternwarte.
Schader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelms-Gymnasium.
Schäffer, M., Dr. jur., in Firma Bernhard Schäffer & Co.
Schlick, O., Schiffbau-Ingenieur.
Schröder, J., Dr. phil.
Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspector.
Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor am Johanneum.
Schulze, K., Dr. phil., Gymnasiallehrer.
Sieveking, J. H., Assistent an der Seewarte.
Sinram, H. Th., Lehrer der Mathematik.
Steinhaus, C. F., Schiffbau-Ingenieur.
Timm, J. J. A., Schiffbau-Ingenieur.
Tuch, Th., Dr. phil.
Voller, A., Dr. phil., Professor, Director des physikalischen St laboratoriums.
Wagner, H., Dr. phil., Oberlehrer.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 4. Ausgegeben im Februar 1894.

Über die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis n.

Von E. Busche in Bergedorf.

Im 103. Bande von Crelles Journal habe ich in der Arbeit „Zur Anwendung der Geometrie auf die Zahlentheorie“ eine Methode angegeben, nach der man auf einem geometrischen Wege Lehrsätze über Teileranzahlen ableiten kann. Von dieser Methode will ich hier eine naheliegende Anwendung machen.

Unter „Teilerpunkten“ verstehe ich die Schnittpunkte der Strahlen, die durch den Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und durch die ganzen Punkte mit der Ordinate 1 gehen, mit den Strahlen, die parallel der Ordinatenachse durch die ganzen Punkte der x-Achse gezogen sind. Es sollen nur die Teilerpunkte mit positiven Koordinaten berücksichtigt werden. Die Ordinaten der Teilerpunkte, die auf der im Punkte $n \mid 0$ errichteten Senkrechten zur x-Achse liegen, sind dann die Teiler der positiven ganzen Zahl n. Die Teilerpunktebene kann als eine spezielle quadratische Abbildung einer gewöhnlichen xy-Ebene betrachtet werden. Die Abbildung wird vermittelt durch die Gleichungen

$$x' = xy, \quad y' = y,$$

wenn mit $x \mid y$ ein Punkt der xy-Ebene, mit $x' \mid y'$ ein Punkt der Teilerpunktebene bezeichnet wird. Umgekehrt kann man die Teilerpunktebene auf eine gewöhnliche xy-Ebene abbilden durch die Gleichungen

$$x = \frac{x'}{y'}, \quad y = y'.$$

Den ganzen Punkten (Eisensteinschen Gitterpunkten) der xy-Ebene entsprechen dann die Teilerpunkte der $x'y'$-Ebene. Handelt es sich

nun darum, eine Anzahl von Teilern der auf einander folgenden Zahlen zu bestimmen, wobei die Teiler irgend eine Bedingung erfüllen sollen, die nur ihre Grösse betrifft, so liegen die diesen Teilern entsprechenden Teilerpunkte innerhalb einer geschlossenen Figur der $x'y'$-Ebene. Dieser Figur entspricht in der xy-Ebene eine andere Figur, und die Anzahl der ganzen Punkte innerhalb dieser ist die gesuchte Teileranzahl, die man also damit unmittelbar als eine Summe von gröfsten Ganzen erhält. Da die Anzahl der ganzen Punkte innerhalb einer geschlossenen Figur bekanntlich annähernd gleich dem Flächeninhalt dieser Figur ist, so kann man die Teileranzahl angenähert auch durch ein bestimmtes Integral ausdrücken.

Diese allgemeine Überlegung will ich jetzt benutzen, um die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis n zu bestimmen. Dabei bemerke ich aber, dafs die eben erwähnte Summe von gröfsten Ganzen in diesem einfachsten Falle auch durch andere Betrachtungen sehr leicht gefunden werden kann, so dafs sie thatsächlich längst bekannt ist. Wenn also hierbei die Teilerpunktebene auch gänzlich entbehrt werden kann, so ist es doch nicht unangemessen, von ihr auszugehen, weil dadurch die zu lösende Aufgabe als ein besonderer Fall des vorher besprochenen allgemeinen Problems erscheint.

Die gesuchte Anzahl S ist die der Teilerpunkte in dem Dreieck, dessen Ecken die Punkte $1\,|\,1$, $n\,|\,1$, $n\,|\,n$ sind, wobei die auf den Seiten liegenden Teilerpunkte mitgezählt werden müssen. In der xy-Ebene entspricht der Geraden durch die Punkte $1\,|\,1$ und $n\,|\,$ die die Gleichung $y' = 1$ hat, die Gerade mit der Gleichung $y =$ der Geraden durch die Punkte $1\,|\,1$ und $n\,|\,n$ mit der Gleichung $x' = y'$ die Gerade $x = 1$ und der Geraden durch die Punkte $n\,|$ und $n\,|\,n$, d. h. der Geraden $x' = n$, die Hyperbel $xy = n$. Es sind also die ganzen Punkte in der geschlossenen Figur mit den Eckpunkten $A = 1\,|\,1$, $B = n\,|\,1$, $C = 1\,|\,n$, die begrenzt wird durch die Strecken AB und AC und den Hyperbelbogen BC, zu zählen. Ohne weiteres ergiebt sich hieraus die bekannte Formel

$$S = \sum_{1}^{n} {}_x \left[\frac{n}{x}\right].$$

Die zu zählenden ganzen Punkte liegen symmetrisch verteilt zu beiden Seiten der Strecke AD, wo D der Scheitel der Hyperbel ist. Zählt man blofs die in der dreieckigen Figur ADC liegenden Punkte ausschliefslich der Punkte auf AD, verdoppelt diese Anzahl und zählt die auf AD liegenden Punkte hinzu, so bekommt man, da der Punkt D die Koordinaten $\sqrt{n}$, $\sqrt{n}$ hat,

$$S = 2 \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_x \left[\frac{n}{x}\right] - 2(1 + 2 + 3 + \cdots + [\sqrt{n}]) + [\sqrt{n}]$$

$$= 2 \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_x \left[\frac{n}{x}\right] - 2 \cdot \frac{[\sqrt{n}] \cdot ([\sqrt{n}] + 1)}{2} + [\sqrt{n}]$$

$$(1) \qquad = 2 \cdot \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_x \left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2 .$$

Dieser Ausdruck für S ist zuerst von Herrn Hermite auf anderem Wege abgeleitet worden. Einen angenäherten Wert für S erhält man, wenn man den Flächeninhalt der Figur ABC berechnet. Er ist

$$\int_1^n \frac{n}{x}\, dx = n \cdot \log n ,$$

wo mit $\log n$ der natürliche Logarithmus von n bezeichnet wird. Die Annäherung an S, die dieser Ausdruck liefert, ist natürlich keine sehr bedeutende, immerhin aber giebt er, namentlich für sehr grofse Werte von n, eine richtige Vorstellung von der Gröfse der zu bestimmenden Anzahl. S ist gröfser als $n \cdot \log n$.

Um genauere Näherungsformeln für S zu erhalten, ist es zweckmäfsig, die Zahl S selbst als einen Flächeninhalt zu deuten. S ist gleich dem Flächeninhalt einer Figur, die sich zusammensetzt aus S Quadraten q von der Seitenlänge 1, deren oberer linker Eckpunkt (bei der üblichen Lage und Richtung der Koordinatenachsen) je einer der ganzen Punkte innerhalb oder auf dem Rande der Figur $ABDC$ ist. Die aus diesen Quadraten zusammengesetzte Figur wird von der x-Achse, von der Geraden AC und von einer treppenförmigen Linie begrenzt, die teils aufserhalb, teils innerhalb des Hyperbelbogens CDB verläuft. Diese gebrochene Linie ist nicht symmetrisch in Bezug auf AD, zieht man aber jedesmal, wenn die Hyperbel eine der x-Achse parallele Seite eines Quadrates q durchschneidet, ein solches Quadrat von S ab, im ganzen also n, so erhält man für $S - n$ ein Flächenstück, dessen treppenförmige Grenzlinie wieder symmetrisch ist in Bezug auf AD. Bestimmt man nun das Flächenstück $S - n$, indem man von B anfangend die einzelnen Stücke berechnet, die man von dem Hyperbelinhalt abziehen mufs, um den gesuchten Flächeninhalt zu erhalten, so braucht man wegen der erwähnten Symmetrie bei dieser Auswertung nur bis zum Punkt D vorzuschreiten, wenn man jedes abzuziehende Flächenstück verdoppelt. So ergiebt sich

$$S - n = n \cdot \log n$$
$$- 2\left(n \cdot \log \tfrac{2}{1} - 1\left(n - \tfrac{n}{2}\right) + R\left(\tfrac{n}{2}\right)\right)$$
$$- 2\left(n \cdot \log \tfrac{3}{2} - 2\left(\tfrac{n}{2} - \tfrac{n}{3}\right) + R\left(\tfrac{n}{3}\right)\right)$$
(2) $$- \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$- 2\left(n \cdot \log \frac{[\sqrt{n}]}{[\sqrt{n}]-1} - ([\sqrt{n}]-1)\left(\frac{n}{[\sqrt{n}]-1} - \frac{n}{[\sqrt{n}]}\right) + R\left(\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right)\right)$$
$$- 2 \cdot \left(n \cdot \log \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]} - [\sqrt{n}] \cdot \left(\frac{n}{[\sqrt{n}]} - \sqrt{n}\right) + \tfrac{1}{2}\left(R(\sqrt{n})\right)^2\right).$$

In dieser Formel wird mit $R(\alpha)$ der positive Bruchrest von α bezeichnet. Durch die Abweichung in der Bildung des letzten Gliedes von dem Gesetz, nach dem die übrigen negativen Glieder gebildet sind, wird der besonderen Stellung des Scheitelpunktes D Rechnung getragen. Ordnet man die rechte Seite anders, so folgt

$$S - n = n \cdot \log n$$
$$- 2n \cdot \left(\log \tfrac{2}{1} + \log \tfrac{3}{2} + \cdots + \log \frac{[\sqrt{n}]}{[\sqrt{n}]-1} + \log \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]}\right)$$
$$+ 2 \cdot \left(\tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{3} + \cdots + \frac{n}{[\sqrt{n}]}\right)$$
$$- 2\left(R\left(\tfrac{n}{2}\right) + R\left(\tfrac{n}{3}\right) + \cdots + R\left(\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right)\right)$$
$$+ 2[\sqrt{n}] \cdot \left(\frac{n}{[\sqrt{n}]} - \sqrt{n}\right) - (R(\sqrt{n}))^2 \cdot$$

Da nun die Summe der Logarithmen in der ersten Klammer gleich $\log \sqrt{n}$ und $2n \log \sqrt{n} = n \log n$ ist, da ferner $\frac{n}{r} - R\left(\frac{n}{r}\right) = \left[\frac{n}{r}\right]$ und $(R(\sqrt{n}))^2 = (\sqrt{n} - [\sqrt{n}])^2 = n - 2\sqrt{n} \cdot [\sqrt{n}] + [\sqrt{n}]^2$ ist, so ist

$$S - n = 2 \cdot \left(\left[\tfrac{n}{2}\right] + \left[\tfrac{n}{3}\right]\right) + \cdots + \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right])$$
$$+ 2n - 2\sqrt{n} \cdot [\sqrt{n}] - n + 2\sqrt{n} \cdot [\sqrt{n}] - [\sqrt{n}]$$

oder

$$S = 2 \cdot \sum_{1}^{[\sqrt{n}]} {}_x \left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2 \cdot$$

Man erhält also auf diesem Umwege wieder, wie es sein muſs, die Hermitesche Formel (1), aber man kann auf diese Weise au

brauchbare Näherungen für S ermitteln. Aus der geometrischen Bedeutung des Aggregates

$$a = n \cdot \log \frac{r+1}{r} - \frac{n}{r+1} + R\left(\frac{n}{r+1}\right),$$

wo $r < \sqrt{n}$ ist, ergiebt sich sofort, dafs das Doppelte dieses Ausdruckes annähernd gleich $\left[\frac{n}{r}\right] - \left[\frac{n}{r+1}\right]$ ist. Denn diese letztere Differenz ist der Inhalt eines Rechteckes mit der Höhe 1, das durch die Hyperbel in zwei Teile zerlegt wird. Der konkave Teil vermehrt um ein kleines rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $R\left(\frac{n}{r}\right)$ und $\frac{n}{\left[\frac{n}{r}\right]} - r$ und einem kleinen Stück der Hyperbel als Hypotenuse ist das Aggregat a. Dieses zu dem konkaven Teil des Rechtecks hinzukommende Dreieck und der Umstand, dafs auch der Austritt der Hyperbel aus dem Rechteck schon in der Entfernung $R\left(\frac{n}{r+1}\right)$ vor dem oberen linken Eckpunkt erfolgt, bewirken, dafs a, trotzdem es im grofsen und ganzen durch den konkaven Teil des Rechtecks dargestellt wird, ebensowohl gröfser als kleiner sein kann als die Hälfte des Rechtecks. Nur für $r = 1$ und einen nicht zu kleinen Wert von n ist a sicher kleiner als die Hälfte des Rechtecks. Bezeichnet man die annähernde Gleichheit durch das Zeichen $\sim$, so ist also

$$(3) \quad \cdot \; 2\left(n \cdot \log \frac{r+1}{r} - \frac{n}{r+1} + R\left(\frac{n}{r+1}\right)\right) \sim \left[\frac{n}{r}\right] - \left[\frac{n}{r+1}\right].$$

Beiläufig bemerkt folgt hieraus die einfache Beziehung

$$2n \cdot \log \frac{r+1}{r} \sim \left[\frac{n}{r}\right] + \left[\frac{n}{r+1}\right],$$

wo die linke Seite ebenfalls gröfser oder kleiner sein kann als die rechte Seite, während in der ähnlichen Beziehung

$$2n \cdot \log \frac{r+1}{r} \sim \frac{n}{r} + \frac{n}{r+1} \text{ oder } 2 \cdot \log \frac{r+1}{r} \sim \frac{1}{r} + \frac{1}{r+1}$$

die linke Seite immer kleiner ist als die rechte Seite.

Benutzt man nun die Formel (3), um die Gleichung (2) zu vereinfachen, so erhält man

$$S - n \sim n \cdot \log n - \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] \cdots - \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]-1}\right] + \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$$
$$- 2n \cdot \log \frac{\sqrt{n}}{[\sqrt{n}]} + n - [\sqrt{n}]^2$$

$$\text{oder } (4) \quad \cdot \; S \sim 2n \cdot \log [\sqrt{n}] + n - [\sqrt{n}]^2 + \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right].$$

Da diese Formel nur eine annähernd richtige Gleichung ist, so kann man noch $[\sqrt{n}]$ durch $\sqrt{n}$ ersetzen und bekommt dann

(4′) . . . . . $S \sim n \cdot \log n + \sqrt{n}$.

Diese Formel liefert schon einen ganz brauchbaren Annäherungswert an die gesuchte Teileranzahl. In weitaus den meisten Fällen ist aber die linke Seite etwas gröfser als die rechte Seite. Das rührt daher, dafs in der Formel (3), wie schon gesagt ist, für $r = 1$ die linke Seite kleiner ausfällt als die rechte Seite. Benutzt man also die Formel (3) für diesen Fall noch nicht, und addiert man deshalb rechts in der Beziehung (4) den Ausdruck

$$n - \left[\frac{n}{2}\right] - 2n \cdot \log 2 + 2 \cdot \left[\frac{n}{2}\right],$$

der vorher ungenauer Weise als gleich Null betrachtet wurde, so ergiebt sich

(5) $S \sim 2n \cdot \log [\sqrt{n}] - 2n \cdot \log 2 + 2n + \left[\frac{n}{2}\right] - [\sqrt{n}]^2 + \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]$

oder, wenn wieder $[\sqrt{n}]$ durch $\sqrt{n}$, $\left[\frac{n}{2}\right]$ durch $\frac{n}{2}$ ersetzt wird,

(5′) . . . . . $S \sim n \cdot \log \frac{n}{4} + \frac{3}{2} n + \sqrt{n}$.

Für grofse Werte von n ist es zweckmäfsig, die Formel (3) auch für $r = 2$, $r = 3$ u. s. w. noch nicht anzuwenden, doch darf man hierbei nicht zu weit gehen, da sonst für S ein Wert gefunden werden könnte, der von dem wahren Wert erheblicher abweicht, als z. B. der durch die Formel (5′) gefundene. Die drei nächsten Näherungsformeln, die sich so ergeben, mögen noch in der abgekürzten Form, nachdem also schon z. B. $[\sqrt{n}]$ durch $\sqrt{n}$ ersetzt ist, angegeben werden. Sie lauten:

(6) . . . . . $S \sim n \cdot \log \frac{n}{9} + \frac{7}{3} n + \sqrt{n}$,

(7) . . . . . $S \sim n \cdot \log \frac{n}{16} + \frac{35}{12} n + \sqrt{n}$,

(8) . . . . . $S \sim n \cdot \log \frac{n}{25} + \frac{101}{30} n + \sqrt{n}$.

Zahlenbeispiel. Für $n = 1000$ ist nach der Hermiteschen Formel $S = 7069$.

Nach	(4′)	erhält	man	statt	dessen	6939,4,	Fehler	— 129,6,
„	(5′)	„	„	„	„	7053,1,	„	— 15,9,
„	(6)	„	„	„	„	7075,5,	„	+ 6,5,
„	(7)	„	„	„	„	7083,5,	„	+ 14,5,
„	(8)	„	„	„	„.	7087,2,	„	+ 18,2.

Die Formel (6) liefert hier also den genauesten Wert.

Uber eine Kegelschnittkonfiguration.

Von H. Oppenheimer in Hamburg.

1.

Ist in zwei perspektivischen ebenen Systemen in involutorischer Lage P das Kollineationscentrum, p die Kollineationsachse, so liegt bekanntlich ein Paar entsprechender Punkte $Q_1 — Q_2$ allemal auf einem Strahl q durch P und zwar harmonisch getrennt von P und dem Schnittpunkt Ω von q und p. — Auf p liegen ja doch die in beiden Systemen sich selbst entsprechenden Punkte. — Daraus fließt ohne weiteres der Satz:

„Drei beliebige Punktpaare eines solchen „Punktpaarsystems“ (wie wir die Gesamtheit aller dieser Paare von entsprechenden Punkten nennen wollen) liegen auf einem Kegelschnitt. Denn greifen wir irgend zwei Punktpaare $P_1 — P_2$ und $Q_1 — Q_2$ heraus und legen durch diese vier Punkte den Kegelschnittbüschel, so schneidet derselbe auf irgend einem Strahl q durch P eine Punktpaarinvolution aus mit den Doppelpunkten P und Ω, wenn Ω der Schnittpunkt von q und p ist. P und p sind ja doch Pol und Polare in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels (weil $Q_1 Q_2$ und $P_1 P_2$ sich in P schneiden und die Kollineationsachse p die Punktpaare $Q_1 — Q_2$ und $P_1 — P_2$ harmonisch von P trennt). Anderseits bilden die Punktpaare des Punktpaarsystems auf q eine Involution mit denselben Doppelpunkten P und Ω; d. h. die beiden Involutionen sind identisch.

Dieser Satz giebt zu einigen interessanten Bemerkungen Anlass. Ein solcher Kegelschnitt, der drei Punktpaare enthält, enthält unendlich viele solcher Punktpaare. Die Punktpaare bestehen aus entsprechenden Punkten zweier schiefer projektiver Gebilde. Nun giebt es aber solcher Kegelschnitte — die wir für die Folge mit K bezeichnen wollen — dreifach unendlich viele (durch drei beliebige Punktpaare geht einer). Die beiden perspektivischen Systeme enthalten also ∞^3 sich selbst entsprechende Kegelschnitte. Zwei solche K-Büschel werden, projektivisch auf einander bezogen, eine C^4 erzeugen, die ebenfalls von Punktpaaren erfüllt ist, also auch in beiden Systemen sich selbst entspricht, und ein solcher C^4-Büschel und ein K-Büschel werden eine sich selbst entsprechende C^6 erzeugen u. s. w.: es giebt sich selbst entsprechende Kurven von beliebiger geradzahliger Ordnung, die alle Träger solcher krummer projektiver Gebilde, also eine Verallgemeinerung des Göpelschen Kegelschnittes sind (Göpel, Crelles Journal, Bd. XXXVI).

2.

Besonders fruchtbar erweisen sich diese Betrachtungen für das Studium sich doppelt berührender Kegelschnitte.

Zwei von den ∞^3 sich selbst entsprechenden Kegelschnitten schneiden sich allemal in zwei Punktpaaren. Greifen wir nun zwei Punktpaare $A_1 - A_2$ und $B_1 - B_2$ und einen von den ∞^3 K, K_1 heraus. Dann schneidet also jeder $K(A_1A_2B_1B_2)$ den K_1 in zwei Punktpaaren $M_1 - M_2$ und $M_1' - M_2'$. Die Verbindungslinien M_1M_2 und $M_1'M_2'$ gehen durch das Kollineationscentrum P, und es ist klar, dass alle diese Strahlenpaare, veranlafst durch die $K(A_1A_2B_1B_2)$, eine Involution bilden. Die Doppelstrahlen D_1D_1' und D_2D_2' schneiden offenbar solche Punktpaare $D_1 - D_1'$ und $D_2 - D_2'$ aus, in deren jedem ein $K(A_1A_2B_1B_2)$ den K_1 doppelt berührt. Daraus folgt: Durch zwei Punktpaare $A_1 - A_2$ und $B_1 - B_2$ giebt es zwei Kegelschnitte, die irgend einen von den ∞^3 K doppelt berühren. Daraus ergiebt sich folgende Lösung der Aufgabe, durch drei gegebene Punkte $A_1A_2A_3$ einen Kegelschnitt zu legen, der einen andern Kegelschnitt K doppelt berührt. Ich betrachte zwei von den Punkten, z. B. A_1 und A_2, als ein Punktpaar und den Kegelschnitt K als einen der ∞^3 sich selbst entsprechenden Kegelschnitte zweier perspektivischer und involutorischer ebenen Systeme. Von A_1 mögen an K die Tangenten t_1, t_2, von A_2 die Tangenten t_1', t_2' gehen, mit resp. den Berührungspunkten T_1, T_2, T_1', T_2'. Weil nun dem Punkte A_1 der Punkt A_2, K sich selbst entspricht, mufs einer Tangente t_1 von A_1 an K eine Tangente t_1' von A_2 entsprechen, der zweiten Tangente t_2 die zweite Tangente t_2' und $T_1 - T_1'$, $T_2 - T_2'$ sind zwei Punktpaare des Punktpaarsystems. Umgekehrt ist also durch diese Zuweisung von t_1 und t_1', t_2 und t_2' das System bestimmt. Zu A_3 kann man also seinen entsprechenden Punkt A_3' finden und durch $A_1 - A_2$, $A_3 - A_3'$ gehen zwei K doppelt berührende Kegelschnitte. Hätten wir der Tangente t_1 statt t_1' t_2' zugewiesen, dann hätten wir ein anderes Punktpaarsystem und die beiden andern Kegelschnitte durch A_1, A_2, A_3 erhalten. Bleiben wir bei der ersten Zuweisung, die uns zu dem Punktpaar $A_1 - A_2$ das Punktpaar $A_3 - A_3'$ liefert. Einer von den zwei durch diese zwei Punktpaare gehenden K doppelt berührenden Kegelschnitten sei K_1. Denselben K_1 mufs ich doch auch erhalten können, wenn ich anstatt des Punktpaares $A_1 - A_2$ ein anderes Punktpaar aus der Zahl der vier Punkte, etwa $A_1 - A_3$ an Stelle des Punktes A_3 einen der beiden übrig bleibenden Punkte A_2 oder A_3' zur Konstruktion benutze. Habe ich $A_1 - A_3$ ausgewählt und die zur Konstruktion von K_1 nötige Tangentenzuweisung

bewerkstelligt, dann werde ich den entsprechenden Punkt zu A_2 und zu A_3' erhalten auf gleiche Weise, wie ich zu A_3 den Punkt A_3' erhalten habe. Ich bekomme so zwei neue Punkte des K_1. Nun kann man aus vier Punkten sechs verschiedene Punktpaare bilden. Es sind aber bei dem ersten Konstruktionsvorgang bereits verwendet die Punktpaare $A_1 - A_2$ und $A_3 - A_3'$. Die vier neuen Punktpaare dagegen liefern je zwei neue Punkte des K_1. Also: die vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_3' ermöglichen wieder acht neue Punkte. So kann man in fortlaufender Kette immer wieder neue Punkte des K_1 gewinnen. Sind zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 aus der Zahl der ∞^3 Kegelschnitte gegeben und irgend ein einzelnes Punktpaar $A_1 - A_1'$, so werde ich wünschen können, dafs eine endliche Anzahl von Kegelschnitten der Mannigfaltigkeit durch $A_1 - A_1'$ gehen und K_1 und K_2 doppelt berühren. Daraus ergiebt sich umgekehrt die Möglichkeit, das Problem, durch einen gegebenen Punkt A_1 einen Kegelschnitt zu legen, der zwei gegebene Kegelschnitte K_1 und K_2 doppelt berührt, mittels unserer Betrachtungen zu lösen. Alle möglichen K_1 und K_2 doppelt berührende Kegelschnitte sind also sich selbst entsprechende Kegelschnitte in einem von den dreien durch das Durchschnittspunktquadrupel bestimmten Punktpaarsystemen. Alle andern sich an diese Betrachtungen knüpfenden geometrischen Beziehungen übergehen wir, weil doppelt berührende Kegelschnitte ja auch schon anderweitig mehrfach studiert sind, und es sich hier nur um die neue Methode handelt.

3.

Zum Schlusse möge eine eigentümliche Analogie betrachtet werden, die in der Behandlung des Kegelschnitts einmal mittels des Punktes und der Geraden, einmal unter Benutzung von Punktpaaren und doppelt berührenden Kegelschnitten besteht.

Halten wir irgend ein Punktpaar $A_1 - A_2$ eines Punktpaarsystems fest, so geht von den ∞^3 sich selbst entsprechenden K ein Netz durch $A_1 - A_2$. Ebenso giebt es ein Netz von Geraden in der Ebene. Eine Gerade verbindet zwei Punkte B und C, ein K verbindet zwei Punktpaare $B_1 - B_2$ und $C_1 - C_2$. Irgend ein Kegelschnitt der Ebene nun wird umhüllt von einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit von Geraden, deren je zwei durch einen Punkt gehen, und erfüllt von ∞^1 Punkten, deren allemal zwei auf einer Geraden liegen. Greifen wir anderseits irgend einen von den $\infty^3 K$, der nicht durch $A_1 - A_2$ geht, heraus, so wird er umhüllt von ∞^1 doppelt berührenden Kegelschnitten durch $A_1 - A_2$, deren zwei durch irgend ein Punktpaar gehen, und erfüllt von ∞^1 Punktpaaren, deren

zwei auf einem $K(A_1 - A_2)$ liegen. Da nun der Kegelschnitt die einzige Kurve zweiter Ordnung und zweiter Klasse ist, ja die eine dieser zwei Bedingungen allein schon zur Charakterisierung des Kegelschnitts erschöpfend ist, so ist klar, dafs wir alle Sätze zwischen Punkten und Tangenten des Kegelschnitts auf diese Punktpaare und doppelt berührenden Kegelschnitte übertragen dürfen.

Was zum Beispiel die Erzeugung der Kegelschnitte mittels projektiver Strahlenbüschel betrifft, so können wir auf irgend einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ zwei Punkte S_1, S_2 beliebig wählen; sind Q_1, Q_2, Q_3 drei weitere beliebige Punkte auf $\mathfrak{K}$, so ist durch die Zuweisung von S_1Q_1 und S_2Q_1, S_1Q_2 und S_2Q_2, S_1Q_3 und S_2Q_3 bewirkt, dafs die Strahlenbüschel von S_1 und S_2 projektivisch sind und $\mathfrak{K}$ erzeugen. — Nehmen wir andrerseits auf irgend einem der ∞^3 K, K_1, zwei beliebige Punktpaare $S_1 - S_1'$ und $S_2 - S_2'$, ferner drei weitere Punktpaare $Q_1 - Q_1'$, $Q_2 - Q_2'$, $Q_3 - Q_3'$, so ist durch die Zuweisung der Kegelschnitte $K(A_1 - A_2, S_1 - S_1', Q_1 - Q_1')$ und $K(A_1 - A_2, S_2 - S_2', Q_1 - Q_1')$, $K(A_1 - A_2, S_1 - S_1', Q_2 - Q_2')$ und $K(A_1 - A_2, S_2 - S_2', Q_2 - Q_2')$, $K(\cdot\cdot S_1 - S_1', Q_3 - Q_3')$ und $K(\cdot\cdot S_2 - S_2', Q_3 - Q_3')$ bewirkt, dafs die beiden Büschel der $K(A_1 - A_2\ S_1 - S_1')$ und $K(A_1 - A_2, S_2 - S_2')$ projektivisch sind, und der Kegelschnitt K_1, auf dem die fünf Punktpaare $S_1 - S_1'$, $S_2 - S_2'$, $Q_1 - Q_1'$, $Q_2 - Q_2'$, $Q_3 - Q_3'$ liegen, erzeugt wird (der andere Teil der zerfallenen C^4 ist die doppelt zu zählende Gerade A_1A_2, da dem Geradenpaar A_1A_2, S_1S_1' als zerfallenem K das Geradenpaar A_1A_2, S_2S_2' entspricht). ——

Das Pascalsche Theorem würde übertragen auf unsere neuen Koordinaten lauten: Haben wir sechs Punktpaare auf einem K: 1 — 2 — 2′, 3 — 3′, 4 — 4′, 5 — 5′, 6 — 6′ und wir legen durch 1 — und 2 — 2′, 2 — 2′ und 3 — 3′ ··· 5 — 5′ und 6 — 6′, 6 — 6′ u 1 — 1′ die Kegelschnitte, so schneiden sich der erste und vierte, d zweite und fünfte, der dritte und sechste Kegelschnitt in je eine weiteren Punktpaar (aufser in $A_1 - A_2$). Diese drei Punktpaa liegen auf einem und demselben K des Netzes.

Von diesem Gedanken soll eine Anwendung gemacht werde

Kann man von zwei Kegelschnitten beliebig viele Punkte k struieren, so wird man doch im allgemeinen ihre vier Schnittpun nicht konstruieren können. Anders verhält es sich in dem Fa wenn uns zwei gemeinsame Tangenten gegeben sind, t_1 und Diese mögen die Kegelschnitte K und K' resp. in den konstrui baren Punkten T_1, T_1' und T_2, T_2' berühren. Dann bestimmen di Punktpaare $T_1 - T_2$ und $T_1' - T_2'$ ein Punktpaarsystem, von dem die Durchschnittspunkte in einer bestimmten Gruppierung zwei Punkt

paare sind. Verschaffen wir uns nun das eben besprochene Arrangement, indem wir auf K' ein Punktpaar $A_1 - A_2$ festhalten, so können wir das Durchschnittspunktpaar von K' und K auf einem Wege erhalten, der vollkommen analog ist der Konstruktion der zwei Durchschnittspunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt. $\mathfrak{K}$ sei ein Kegelschnitt, k' eine Gerade. Wir nehmen auf $\mathfrak{K}$ irgend zwei Punkte S_1 und S_2 an und projizieren drei weitere Punkte Q_1, Q_2, Q_3 von $\mathfrak{K}$ durch die Strahlen S_1Q_1 und S_2Q_1, S_1Q_2 und S_2Q_2, S_1Q_3 und S_2Q_3. Damit sind die Strahlenbüschel von S_1 und S_2 projektivisch auf einander bezogen und schneiden k' in zwei projektivischen Punktreihen $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{Q}_1'$, $\mathfrak{Q}_2'$, $\mathfrak{Q}_3'$. Die Doppelpunkte dieser zwei projektivischen Reihen sind bekanntlich die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ und k'. — Analog nehmen wir auf K irgend zwei Punktpaare $S_1 - S_1'$ und $S_2 - S_2'$ an und projizieren die weitern Punktpaare $Q_1 - Q_1'$, $Q_2 - Q_2'$, $Q_3 - Q_3'$ von $S_1 - S_1'$ und $S_2 - S_2'$ aus durch die K des Netzes (mit $A_1 - A_2$ auf K' als festgehaltenem Punktpaar). Die Büschel der $K(A_1 - A_2, S_1 - S_1')$ und $K(A_1 - A_2, S_2 - S_2')$ sind damit projektivisch auf einander bezogen und schneiden auf K' zwei projektivische Punktpaarreihen aus — dabei ist zu beachten, dafs wenn man von zwei Kegelschnitten zwei Schnittpunkte A_1, A_2 kennt, man auch die andern zwei konstruieren kann. — Die Doppelpunktpaare dieser projektiven Punktpaarreihen sind die gesuchten Durchschnittspunktpaare. Dabei ist zu bemerken, dafs wir diese projektivischen Punktpaarreihen von dem Kollineationscentrum durch zwei projektivische Strahlenbüschel projizieren können und dann einfach auf dem bekannten linearen Wege die Doppelstrahlen derselben zu konstruieren haben.

Einige Sätze über Teileranzahlen sowie einige Anwendungen der Geometrie auf Zahlentheorie.

Von J. Schröder in Hamburg.

Im Bulletin de la Société Royale des Sciences de Bohême[1]) hat Herr Lerch das Theorem bewiesen:

$$(1) \quad \cdots\cdots\cdots \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varrho\, \psi(n-\varrho;\ \varrho) = n,$$

wenn $\psi(\alpha;\beta)$ die Anzahl aller Teiler von α bedeutet, welche gröfser

1) Bulletin de la Société royale des Sciences de Bohême von 1887, p. 883 ff.; Prag.

sind als β. Herr Lerch gewinnt diesen Satz durch Betrachtung des Ausdrucks:

$$(2) \quad \cdot \cdot \cdot \quad F(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{1+x^{\nu+1}}{1-x^{\nu+1}} - \frac{1+x^{\nu}}{1-x^{\nu}} \right),$$

an dessen Stelle ebenso gut der Ausdruck

$$(2a) \cdot \cdot \cdot \quad F_1(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \left(\frac{1}{1-x^{\nu+1}} - \frac{1}{1-x^{\nu}} \right)$$

treten kann.

Es soll nun gezeigt werden, dafs man durch eine zweckmäfsige Verallgemeinerung des Ausdrucks (2a) zu einem umfassenderen zahlentheoretischen Theorem gelangt, in welchem die Relation (1) als einfachster Fall enthalten ist. Von diesem allgemeineren Satze werden sodann einige Spezialfälle besonders genannt und nach einer von Herrn Busche entwickelten Methode geometrisch bewiesen werden.

1.

Wir legen der Betrachtung den folgenden Ausdruck zu Grunde:

$$(3) \quad F(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \left\{ \frac{1}{\prod_{1}^{m}{}_{i} (1-x^{r(\nu+i)+s})} - \frac{1}{\prod_{0}^{m-1}{}_{i} (1-x^{r(\nu+i)+s})} \right\},$$

wo $0 < x < 1$ sein soll und wo r, m, s feste positive ganze Zahlen bedeuten. Führt man die rechts stehende Summation so aus, dafs man ν alle Werte von 0 bis ∞ erteilt, so ergiebt sich, wie man ohne weiteres sieht, der folgende Wert:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{\prod_{0}^{m-1}{}_{i} (1-x^{ir+s})}$$

Fafst man hingegen in der Summe immer die beiden zu demselben Werte ν gehörenden Bestandteile zusammen, so wird:

$$F(x) = -(1-x^{rm}) \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^{r\nu+s}}{\prod_{0}^{m}{}_{i} (1-x^{r(\nu+i)+s})}$$

Hieraus ergiebt sich die Gleichung:

$$(4) \quad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu} \frac{x^{r\nu+s}}{\prod_{0}^{m}{}_{i} (1-x^{r(i+\nu)+s})} = \frac{1 - \prod_{0}^{m-1}{}_{i} (1-x^{ri+s})}{(1-x^{rm}) \prod_{0}^{m-1}{}_{i} (1-x^{ri+s})}.$$

Infolge der Festsetzung $0 < x < 1$ dürfen wir jetzt von den Relationen

$$(5) \quad \cdot \cdot \quad \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x^{r(\nu+\alpha)+s}} = \sum_0^\infty \varrho_\alpha x^{\varrho_\alpha [r(\nu+\alpha)+s]}; & (\alpha = 1, 2, \ldots m) \\ \dfrac{x^{r\nu+s}}{1 - x^{r\nu+s}} = \sum_1^\infty \varrho_0 x^{\varrho_0 [r\nu+s]} \end{cases}$$

Gebrauch machen. Bezeichnen wir aufserdem die rechte Seite der Gleichung (4) mit $\Phi(x)$, so erhalten wir

$$(5) \quad \cdot \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_{\varrho_m} \sum_0^\infty{}_{\varrho_{m-1}} \cdots \sum_0^\infty{}_{\varrho_1} \sum_1^\infty{}_{\varrho_0} x^{\sum_0^m i \varrho_i [r(\nu+i)+s]} = \Phi(x)$$

Für $\Phi(x)$ läfst sich nun ebenfalls eine Potenzentwicklung nach steigenden Potenzen von x gewinnen, welche mit dem Gliede s^{ter} Ordnung beginnt, und deren Koeffizienten ganze, positive Zahlen sind. Wird der Koeffizient von x^n mit $C_n^{(m,r,s)}$ bezeichnet, so ist

$$(5a) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \Phi(x) = \sum_s^\infty{}_n C_n^{(m,r,s)} \cdot x^n$$

und es ergiebt sich aus der Thatsache, dafs die Entwicklungen (5) und (5a) identisch sind, die Folgerung, dafs die Zahl $C_n^{(m,r,s)}$ die Anzahl der Fälle angiebt, in denen die Gleichung:

$$(6) \quad \begin{aligned} &\varrho_m [r(\nu+m)+s] + \varrho_{m-1} [r(\nu+m-1)+s] + \cdots\cdots \\ &\qquad + \varrho_1 [r(\nu+1)+s] + \varrho_0 [r\nu+s] = n \end{aligned}$$

sich durch Zahlen aus den Wertegebieten:

$$(7) \quad \cdot \cdot \begin{cases} (\nu, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \cdots, \varrho_m) = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots \\ \varrho_0 = 1, 2, 3, 4, \cdots\cdots \end{cases}$$

befriedigen läfst.

Die Gleichung (6) kann jedoch auch die Form erhalten:

$$\begin{aligned} &(r\nu+s) \cdot (\varrho_m + \varrho_{m-1} + \cdots + \varrho_1 + \varrho_0) \\ &= n - r[m\varrho_m + (m-1)\varrho_{m-1} + \cdots + \varrho_1] \end{aligned}$$

oder kürzer:

$$(8) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (r\nu+s) \cdot \sum_0^m i \varrho_i = n - r \cdot \sum_1^m i \varrho_i \cdot$$

Aus dieser Gleichung aber entspringt unmittelbar die folgende Deutung der Zahl $C_n^{(m,r,s)}$:

„Die Zahl $C_n^{(m,r,s)}$ ist gleich der Anzahl aller derjenigen Teiler von $\left(n - r \cdot \sum_1^m i\varrho_i\right)$ für $(\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_m) = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$, welche gröfser als $\sum_1^m \varrho_i$ sind und welche zugleich Komplementarteiler von der Form $rv + s$ für $(v = 0, 1, 2, \cdots)$ besitzen."

Nennen wir nun die Anzahl der Teiler von α, die gröfser sind als β und die zugleich einen Komplementarteiler γ haben, $\psi_\gamma(\alpha; \beta)$, so ist der Inhalt des letzten Satzes in folgender Weise zu fixieren:

$$(9) \quad \cdots \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_m = 0, 1, 2, \cdots} \psi_{rv+s}\left(n - r \cdot \sum_1^m i\varrho_i;\ \sum_1^m \varrho_i\right) = C_n^{(m,r,s)},$$

wo die Bedeutung von $C_n^{(m,r,s)}$ durch die Gleichung:

$$\Phi(x) = \frac{1 - \prod_0^{m-1} \prod_i (1 - x^{ri+s})}{(1 - x^{rm}) \prod_0^{m-1} \prod_i (1 - x^{ri+s})} = \sum_s^\infty C_n^{(m,r,s)} \cdot x^n$$

definiert ist.

2.

Von Spezialfällen des Satzes (9) führen wir folgende besonder an: Es sei $m = 1$. Dann wird:

$$(10) \quad \cdots \sum_{\varrho = 0, 1, 2, \cdots} \psi_{rv+s}(n - r\varrho;\ \varrho) = C_n^{(1,r,s)}, \text{ wobei}$$

$$\Phi(x) = \frac{x^s}{(1 - x^r)(1 - x^s)} = \sum_s^\infty C_n^{(1,r,s)} \cdot x^n \text{ wird.}$$

Hier kann auch die folgende Darstellung für $\Phi(x)$ Platz greife

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty \lambda \sum_1^\infty x^{\lambda r + \varkappa s} = \sum_s^\infty C_n^{(1,m,r)} x^n.$$

Demnach ist $C_n^{(1,m,r)}$ gleich der Anzahl der Fälle, in denen d Ausdruck $\varkappa s + \lambda r$ für Zahlen aus den Wertegebieten:

$$\lambda = 0, 1, 2, \cdots, \quad \varkappa = 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

den Wert n annehmen kann. Die Anzahl dieser Fälle aber ist glei der Anzahl der Möglichkeiten, in denen der Bruch $\frac{n - \lambda r}{s}$ durch Ei setzung positiver ganzer Zahlen (mit Einschlufs der Null) für λ glei

einer positiven ganzen von Null verschiedenen Zahl wird. Bezeichnen wir diese letztere Anzahl mit $\chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right)$, so besteht nach dem Vorhergehenden offenbar der Satz:

$$(11) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \sum_{0,1,2,\cdots}^{\varrho} \psi_{r\nu+s}(n - r\varrho;\ \varrho) = \chi\left(\frac{n-\lambda r}{s}\right).$$

Der in dieser Formel enthaltene Satz lautet:

„Die Anzahl aller derjenigen Teiler von $n - r\varrho$, die sich für $\varrho = 0, 1, 2, \cdots$ finden lassen, und deren Komplementarteiler die Form $r\nu + s$ besitzt, stimmt überein mit der Anzahl der Fälle, in denen der Bruch $\frac{n-\lambda r}{s}$ bei den für λ möglichen Werten $0, 1, 2, \cdots$ gleich einer ganzen positiven von Null verschiedenen Zahl ist."

Setzen wir jetzt $s = 1$, so entspringt aus (11) der folgende noch einfachere Satz:

$$(12) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \sum_{0,1,2,\cdots}^{\varrho} \psi_{r\nu+1}(n - r\varrho;\ \varrho) = \chi(n - \lambda r)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist nun für $s = 1$ immer eine ganze Zahl; nehmen wir an, dafs nun $n \equiv b \pmod r$ ist, dafs also etwa:

$$n = ar + b \qquad (0 < b < r)$$

ist, so ist klar, dafs λ die Werte $0, 1, 2, \ldots . a$ annehmen kann. Es ist also für $b > 0$

$$\chi(n - \lambda r) = a + 1 = \frac{n - b + r}{r}.$$

Dieses Resultat können wir aber auch mit Beachtung der Thatsache, dafs

$$\frac{b-1}{r} < 1$$

ist, folgendermafsen schreiben:

$$\chi(n - \lambda r) = E\left[\frac{n + r - 1}{r}\right].$$

Ist $n \equiv 0 \pmod r$, also $n = ar$, so sind für λ nur die Werte zulässig:

$$\lambda = 0, 1, 2, \cdots, a - 1,$$

so dafs:

$$\chi(n - \lambda r) = a = \frac{n}{r}$$

wird. Da wir aber auch hierfür $E\left[\frac{n + r - 1}{r}\right]$ setzen können, so haben wir für jedes n den folgenden Satz:

$$(13) \quad \cdots \quad \sum_{0,1,2,\ldots}^{\varrho} \psi_{r\,r+1}(n - r\varrho;\ \varrho) = E\left[\frac{n+r-1}{r}\right].$$

Nehmen wir jetzt noch $r = 1$, so ergiebt sich:

$$\sum_{0,1,2,\ldots}^{\varrho} \psi_{r+1}(n - \varrho;\ \varrho) = E[n] = n.$$

In diesem Falle sind alle Zahlen als Komplementarteiler zulässig; wir brauchen demnach die Natur der Komplementarteiler nicht besonders zum Ausdruck zu bringen und erhalten so in der Formel:

$$(14) \quad \cdots \quad \sum_{0,1,2,\ldots}^{\varrho} \psi\,(n - \varrho;\ \varrho) = n$$

gerade den oben genannten Satz von Lerch.

Lassen wir schliefslich s beliebig, während wir gleichzeitig $r = 1$ wählen, so erhalten wir:

$$\sum_{0,1,3,\ldots}^{\varrho} \psi_{r+s}(n - \varrho;\ \varrho) = \chi\left(\frac{n-\lambda}{s}\right).$$

Ist nun $n \equiv b \pmod{s}$, also $n = as + b$, so sind für λ die folgenden Werte zulässig:

$$b,\quad s+b,\quad 2s+b,\quad \cdots,\quad (a-1)\cdot s + b;$$

mithin ist:

$$\chi\left(\frac{n-\lambda}{s}\right) = a$$

oder:

$$\chi\left(\frac{n-\lambda}{s}\right) = E\left[\frac{n}{s}\right];$$

folglich ist:

$$(15) \quad \cdots \quad \sum_{0,1,2,\ldots}^{\varrho} \psi_{r+s}(n - \varrho;\ \varrho) = E\left[\frac{n}{s}\right].$$

3.

Die unter (13) und (15) mitgeteilten Sätze können nun auch direkt geometrisch bewiesen werden, wenn man sich des von Herrn Busche[1]) beschriebenen „Teilerpunktsystems" bedient, welches auf folgende Weise erhalten wird. Es werden in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Geraden $y = a$ ($a = 1, 2, 3, 4 \cdots$) gezogen, welche sämtlich der X-Achse parallel sind. Trägt man dann auf jeder dieser Geraden vom Punkte $x = 0$ aus die positiven ganzzahligen Multipla des zugehörigen Wertes von a ab, so veranschaulichen die auf irgend eine Gerade $x = b$ (b ganzzahlig und positiv) fallenden Punkte die Teiler der positiven ganzen Zahl b. Man sieht

1) Journal für reine und angew. Math. Bd. 103.

nun sofort, dafs alle auf diesem Wege erhaltenen Punkte sich auf denjenigen Strahlen eines durch den Anfangspunkt gehenden Strahlenbüschels gruppieren, welche durch die Gleichung $x - my = 0$ $(m = 1, 2, 3, 4 \cdots)$ bestimmt sind. Diese Strahlen wollen wir je nach dem zugehörigen Werte von m als den Einstrahl, Zweistrahl, Dreistrahl, u. s. w. unterscheiden.

Markieren wir nun auf jeder Geraden $y = a$ die Teilerpunkte vom Typus $r\nu + 1$, wo r eine beliebige positive ganze Zahl ist, und wo ν die Werte 0, 1, 2, ... annehmen kann, so heben wir alle diejenigen Punkte besonders hervor, welche auf dem Einstrahl, dem $(r+1)$-Strahl, dem $(2r+1)$-Strahl u. s. f. liegen. Jeder dieser Punkte hat einen Komplementarteiler von der Form $(r\nu + 1)$. Die auf den Zwischenstrahlen gelegenen Punkte haben Komplementarteiler anderer Art.

Wollen wir uns jetzt zunächst mit der Formel:

$$\sum_{0,1,2,\ldots}^{\varrho} \psi_{r\nu+1}(n - r\varrho;\ \varrho) = E\left[\frac{n+r-1}{r}\right]$$

befassen, so haben wir auf der Geraden $x = n$ alle Teilerpunkte oberhalb der Geraden $y = 0$, auf der Geraden $x = n - r$ alle Teilerpunkte oberhalb $y = 1$, auf $x = n - 2r$ alle Teilerpunkte oberhalb $y = 2$ u. s. w. in Betracht zu ziehen und die Gesamtanzahl derselben zu bestimmen. Alle diese Punkte liegen in dem Dreiecke, welches von den Geraden $x = n$, $x = y$, $x + ry = n$ gebildet wird. Andrerseits aber läfst sich zeigen, dafs die fraglichen Punkte, soweit sie zu einem bestimmten n gehören, auf ganz bestimmten, leicht zu ermittelnden Horizontalen liegen. Wir wollen zu dem Zweck annehmen, dafs α ein Teiler von $(n - \varrho r)$ mit dem Komplementarteiler $(r\nu + 1)$ sei. Dann liegt der diesem Teiler entsprechende Teilerpunkt auf der Geraden $y = \alpha$. Ferner möge $(\alpha + \lambda)$, wo λ eine negative oder positive ganze Zahl bedeutet, ein Teiler von $n - \varrho' r$ mit dem Komplementarteiler $(r\nu' + 1)$ sein. Dann ist zunächst:

$$n - \varrho r = (r\nu + 1)\alpha \quad \text{und}$$
$$n - \varrho' r = (r\nu' + 1)(\alpha + \lambda).$$

Hieraus folgt durch Subtraktion:

$$r(\varrho' - \varrho) = r\alpha(\nu - \nu') - r\nu'\lambda - \lambda,$$

oder

$$r\{(\varrho' - \varrho) + \alpha(\nu' - \nu) + \nu'\lambda\} = -\lambda.$$

Man sieht nun, dafs die linke Seite durch die gegebene Zahl r teilbar ist, folglich mufs es auch die rechte Seite sein; d. h. λ hat die Form:

$$\lambda = r \cdot \lambda'.$$

Wenn also ein brauchbarer Teilerpunkt auf der Geraden $y = \alpha$ liegt, so können sich die übrigen in Frage kommenden Teilerpunkte nur auf den Geraden: $y = \alpha \pm r \cdot \lambda'$ befinden.

Nun wissen wir aber, dafs der Punkt mit Koordinaten ($x = n$, $y = n$) zu den hier betrachteten Teilerpunkten gehört, da der zu ihm gehörige Komplementarteiler gleich 1 ist. Infolgedessen liegen alle anderen Teilerpunkte auf den Geraden:

$$y = n - r, \quad y = n - 2r, \quad y = n - 3r, \quad \text{u. s. f.}$$

Andererseits mufs aber auch auf jeder dieser Geraden genau ein derartiger Teilerpunkt liegen, nicht mehr und nicht weniger. Um das einzusehen, betrachten wir auf allen den Horizontalen $y = 1, 2, 3, 4 \cdots$ die Strecken, welche in die Fläche des beschriebenen Dreiecks fallen. Auf der Geraden $y = 1$ hat diese Strecke die Länge r, auf der folgenden Geraden die Länge $2r$, auf der nächsten die Länge $3r$ u. s. f. In dieser Weise wächst die Länge jener Strecken bis zu dem Schnittpunkte der beiden Geraden $x = y$ und $x + ry = n$, welcher die Koordinaten $x = y = \frac{n}{r+1}$ hat. Dann nimmt die Länge jener Strecken wieder beständig ab. Nun ist evident, dafs auf jeder dieser Strecken nur ein Teilerpunkt gezählt werden kann. Denn auf der Geraden $y = \alpha$ ist der Abstand der in Betracht kommenden aufeinanderfolgenden Teilerpunkte gerade gleich $r \cdot \alpha$, so dafs für alle Strecken, deren Abstand von der X-Achse kleiner (resp. gleich) ist als $\frac{n}{r+1}$, die Länge dieser Strecken übereinstimmt mit der Entfernung je zweier aufeinanderfolgenden zulässigen Teilerpunkte. Für alle Strecken aber, deren Abstand von der X-Achse gröfser ist als $\frac{n}{r+1}$, ist die Länge der Strecke kleiner als der fragliche Abstand der Teilerpunkte. Bei allen Strecken der letzteren Art fällt nun allemal in den einen Endpunkt, welcher auf dem Einstrahl liegt, ein mitzuzählender Teilerpunkt. Bei den übrigen Strecken indessen mufs entweder ein Teilerpunkt vorhanden sein, oder es finden sich zwei Teilerpunkte, die auf die Endpunkte der Strecke fallen. Aber auch von diesen beiden Punkten darf immer nur einer mitgezählt werden, da es sich um alle diejenigen Teilerpunkte handelt, deren Ordinate gröfser ist als der zugehörige Wert von ϱ. Es läuft dies darauf hinaus, dass alle auf der Geraden $x + ry = n$ gelegenen Punkte ausgeschlossen sind.

Aus alledem folgt somit, dafs die Anzahl der hier in Frage kommenden Teiler um 1 gröfser ist als die Zahl, welche angibt

wie oft eine Strecke von der Länge r in einer Strecke von der Länge $(n-1)$ enthalten ist. Ist nun $n-1 \equiv \alpha \pmod r$, so ist $n-\alpha-1$ durch r teilbar; es ist also die Anzahl der betreffenden Teiler gegeben durch die Zahl:

$$p = \frac{n-\alpha-1}{r} + 1 = \frac{n+r-1-\alpha}{r}$$

Dieser Bruch ist eine positive ganze Zahl. Addieren wir hierzu noch den echten Bruch: $\frac{\alpha}{r}$, so ist p die gröfste in dem Bruch $\frac{n+r-1}{r}$ enthaltene ganze Zahl. Wir finden somit auch als Ergebnis unserer geometrischen Überlegung den Satz:

$$\sum_{0,1,2,\cdots}^{\varrho} \psi_{r,r+1}(n-r\varrho;\varrho) = E\left[\frac{n+r-1}{r}\right].$$

In ganz analoger Weise kann die Formel:

$$\sum_{0,1,2,\cdots}^{\varrho} \psi_{r,r+s}(n-\varrho;\varrho) = E\left[\frac{n}{s}\right]$$

geometrisch bewiesen werden.

In diesem Falle ist ein Dreieck zu betrachten, das von den drei Geraden:

$$x = n, \quad x+y = n, \quad x = y$$

gebildet wird. Ferner kommen nur solche Teilerpunkte in Betracht, die auf dem s-Strahl, dem $(s+1)$-Strahl, dem $(s+2)$-Strahl u. s. w liegen. Ferner kommen dieses Mal, da $r = 1$ ist, alle Horizontalen in Betracht. Zulässige Teilerpunkte finden sich aber nur auf denjenigen, deren Abstand vor der x-Achse kleiner als $\frac{n}{s}$ ist. Die Zahl $\frac{n}{s}$ ist nämlich der Wert für die Ordinate der Austrittsstelle des s-Strahles aus dem zu Grunde gelegten Dreieck, da dieser Austrittspunkt sich als Schnittpunkt der Geraden:

$$x = n \quad \text{und} \quad x = sy$$

ergiebt. Da endlich auch hier auf jeder Horizontalen nur immer ein mitzuzählender Teilerpunkt liegt, so erkennt man sofort, dafs thatsächlich:

$$\sum_{0,1,2,\cdots}^{\varrho} \psi_{r,r+s}(n-\varrho;\varrho) = E\left[\frac{n}{s}\right] \text{ ist.}$$

4.

Zum Schluſs sei es gestattet, im Anschluſs an die Besprechung des Teilerpunktsystems auf die Bestimmung der Anzahl der Teiler der ersten n ganzen Zahlen zurückzukommen. Alle diese Teiler liegen in dem Dreiecke, welches durch die 3 Geraden: $y = 0$, $x = y$, $x = n$ gebildet wird. Ihre Anzahl S bestimmen wir, indem wir die Abzählung auf den Parallelen zur x-Achse: $y = 1, 2, 3, \cdots, n$, nicht aber auf den Vertikalen $x = 1, 2, 3, \cdots, n$ vornehmen. Da auf der Geraden $y = \alpha$ im ganzen $\left[\frac{n}{\alpha}\right]$ Teilerpunkte in Betracht kommen, so ist:

$$(16) \quad \cdots \quad S = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

Jetzt stellen wir fest, auf wie viel Geraden nur je 1 Teilerpunkt liegt, wie viele je 2, wie viele je 3, u. s. w. Teilerpunkte tragen. Es ergiebt sich, daſs die letzten $\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ Horizontalen je 1 Teilerpunkt, die dann folgenden $\left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{3}\right]\right)$ Geraden je 2 Teilerpunkte, die nächsten $\left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right]\right)$ Geraden je 3 Teilerpunkte u. s. w. liefern. Auf Grund dieser Bemerkung erfährt (16) die folgende Umgestaltung:

$$(17) \quad S = 2\sum_{1}^{\lambda}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - (\lambda - 1)\left[\frac{n}{\lambda+1}\right] + \left\{\left[\frac{n}{\lambda+2}\right] + \left[\frac{n}{\lambda+3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{\left[\frac{n}{\lambda+1}\right]}\right]\right\}$$

Die Anzahl der Glieder in der geschweiften Klammer reduziert sich immer mehr, je näher λ dem Werte $[\sqrt{n}]$ kommt. Wird $\lambda = [\sqrt{n}]$ — so wird:

$$(18) \quad \cdots \quad S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]-1}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - ([\sqrt{n}] - 2)\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right] + K,$$

oder:

$$(18a) \quad \cdots \quad S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}] \cdot \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right] + K,$$

wo K den Ausdruck bedeutet, auf welchen sich für $\lambda = [\sqrt{n}]$ — die geschweifte Klammer reduziert. Behufs Ermittelung des Wertes von K nehmen wir an, daſs $n = a^2 + \delta$ sei, wo $0 \leqq \delta \leqq 2a$ ist.

Dann ist $[\sqrt{n}] = a$, also: $\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right] = a + \left[\frac{\delta}{a}\right]$

Folglich ist:

$$\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right] = \begin{cases} a, & \text{wenn } \delta = 0, 1, 2, \cdots, (a-1) \\ a+1, & \text{„ } \delta = a, (a+1), \cdots, (2a-1) \\ a+2, & \text{„ } \delta = 2a \end{cases}$$

ist. Demnach wird:

$$\left[\frac{n}{\left[\frac{n}{\lambda+1}\right]}\right] = \left[\frac{n}{\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]}\right] = \begin{cases} \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right], & \text{wenn } \delta = 0, 1, 2, \cdots (a-1), \\ \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+1}\right], & \text{„ } \delta = a, a+1, \cdots (2a-1), \\ \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+2}\right], & \text{„ } \delta = 2a \end{cases}$$

ist. Das Glied $\left[\frac{n}{\lambda+2}\right]$, welches in (16) auftritt, wird in allen drei Fällen gleich: $\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+1}\right]$. Hat man nun mit einer Zahl n zu thun, deren δ eine der Zahlen $0, 1, \cdots, (2a-1)$ ist, so kommt dieses letztgenannte Glied überhaupt nicht in Betracht; für $0 \leqq \delta \lessgtr (a-1)$ ist es überhaupt bei der Umrechnung schon verschwunden, wenn $\lambda = [\sqrt{n}] - 1$ wird. Für $a \leqq \delta \lessgtr (2a-1)$ ist es identisch mit dem Gliede $\left[\frac{n}{\left[\frac{n}{\lambda+1}\right]}\right]$; da aber jedes derartige Glied in der ursprünglichen Gleichung (16) nur einmal, und nicht doppelt auftritt, so ist nur eines der beiden Glieder zu benutzen. Bei $\delta = 2a$ aber ist

$$\left[\frac{n}{\lambda+2}\right] = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+1}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{n}{\left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right]}\right] = \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+2}\right].$$

In diesem Falle kommen beide Glieder zur Verwendung.

Hiernach ergeben sich folgende drei Fälle:

1) $\mathbf{0 \leqq \delta \lessgtr a-1.}$

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]^2.$$

2) $\mathbf{a \leqq \delta \lessgtr 2a-1.}$

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}] \cdot \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]}\right] + \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+1}\right];$$

oder:

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]([\sqrt{n}]+1) + [\sqrt{n}];$$

oder:

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]^2 .$$

3) $\delta = 2a.$

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]([\sqrt{n}]+2) + \left[\frac{1}{[\sqrt{n}]+1}\right] + \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]+2}\right],$$

oder:

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]^2 - 2[\sqrt{n}] + 2[\sqrt{n}],$$

oder:

$$S = 2\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]^2 .$$

In allen drei Fällen erhält man somit dasselbe Ergebnis, und zwar stimmt dieses Resultat genau mit dem schon früher von Herrn Hermite[1]) und darauf von Herrn Busche[2]) auf anderem Wege abgeleiteten Ausdruck überein.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1893/94.

Zusammengestellt vom Jahrverwalter Dr. P. Jaerisch.

Hauptversammlung am 13. Februar 1893.

(Nachtrag zum vorigen Jahresbericht.)

Der Jahrverwalter Herr Dr. J. A. Repsold berichtet über die Thätigkeit der Gesellschaft im Laufe des 203. Jahres ihres Bestehens, sowie über den Bestand der Kasse. Die Gesellschaft besteht zur Zeit aus 12 Ehrenmitgliedern, 52 einheimischen und 18 auswärtigen Mitgliedern.

Den Statuten gemäfs wird sodann die Wahl eines Adjunkten vollzogen. Gewählt wird Herr Ingenieur A. Hübner. Den Vorstand bilden demnach für die Dauer des folgenden Jahres die Herren Dr. P. Jaerisch, Jahrverwalter, Dr. A. Köpcke, Mitjahrverwalter, und Ingenieur A. Hübner, Adjunkt.

Nach der Versammlung vereinigen sich die Mitglieder unter Beteiligung einer gröfseren Anzahl von Gästen zu dem üblichen Snuten- und Poten-Festessen.

1) S. Acta mathematica Bd. 2. p. 299 ff.

2) S. Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 100, p. 259 ff. — Diese Mittheilungen Bd. III, p. 167 ff.

Versammlung am 11. März 1893.

Herr Ingenieur A. Hübner trägt über das Cylindroid und seine Anwendung in der Mechanik vor. Das Cylindroid wurde zuerst von Plücker in seiner „Geometrie des Raumes“ als Ort der Hauptachsen eines Büschels linearer Strahlenkomplexe definiert. Kurz darauf entdeckte R. Ball den fundamentalen Zusammenhang des Cylindroids mit der Mechanik; und dies war für die englischen Mathematiker der Anlafs, sich eingehender mit der Fläche zu beschäftigen. Cayley gab zuerst eine geometrische Konstruktion an, bei der ein gerader Kreiscylinder zur Ableitung der Fläche benutzt wurde, und diese Konstruktion führte zu dem Namen Cylindroid. Der Vortragende entwickelt dann die hauptsächlichsten Eigenschaften der Fläche auf analytischem Wege unter Hinweis auf einige im letzten Heft der Mitteilungen ausgesprochene Sätze. Eingehender werden dann die Beziehungen des Cylindroids zur Mechanik begründet. Das Cylindroid ist aufzufassen als der Ort der resultierenden Dynamen oder Windungen für alle Dynamen oder Windungen, deren Schrauben dem Cylindroid selbst angehören. Mit Hilfe des Cylindroids ermöglicht sich die Zusammensetzung beliebiger Kräftezustände (Dynamen) und beliebiger Schraubenbewegungen (Windungen) in ähnlich einfacher Weise, wie die Zusammensetzung von Einzelkräften in der Ebene durch das Kräfteparallelogramm. — Herr Dr. P. Jaerisch entwickelt dann für die verallgemeinerte Laplacesche Gleichung neue Integrale, welche er in seiner demnächst erscheinenden Arbeit „Zur Theorie der elastischen Kugelwellen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichtes“ anwendet, und durch welche sich alle von der Elasticitätstheorie gegebenen Bedingungen an der Grenze des reflektierenden Mediums erfüllen lassen.

Versammlung am 8. April 1893.

Herr Professor H. Ahlborn trägt über die Lösung von Konstruktionsaufgaben allein mit dem Lineal vor. Die harmonischen Eigenschaften des Vierseits gestatten mit Hilfe zweier aneinander liegender gleichen Strecken oder mit Hilfe eines gegebenen Parallelogramms oder eines Kreises zunächst die einfachen Fundamentalkonstruktionen allein mit dem Lineal auszuführen, wie eingehend gezeigt wird. Es wird dann auf die entsprechende Lösung mannigfacher Aufgaben hingewiesen. — Nach einem kurzen Referat über einige Arbeiten in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie spricht Herr Dr. Hoppe über den Zusammenhang des Lichtbrechungs-

koefficienten mit der Dielektricitätskonstanten. Die Theorie forderte bisher die Gleichheit des Quadrats des Brechungsexponenten und der Dielektricitätskonstante. Die angestellten Versuche hatten aber sämtlich negativen Erfolg, ohne dafs man den Grund für die Nichtübereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung finden konnte. Es ist jetzt Drude gelungen, nachzuweisen, dafs dafür die Absorption der ultravioletten Strahlen die Ursache ist.

Herr Dr. R. Schorr wird als Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Versammlung am 13. Mai 1893.

Im Anschlufs an den Vortrag der vorigen Sitzung erinnert Herr Prof. Dr. Schubert an neuere französische Arbeiten, in denen gezeigt wird, dafs man bei Konstruktionsaufgaben unter Benutzung der gegebenen Breite des Lineals auch den Steinerschen Kreis entbehren kann, und dafs sich mit einem gegebenen Zeichendreieck, welches man durch zwei feste Punkte gehen läfst, sogar Konstruktionen ausführen lassen, welche auf Gleichungen vierten Grades führen. — Darauf trägt Herr Prof. Dr. Schubert „über die Punktgebilde zweiten Grades vor, welche als in einem Raume beliebig hoher Dimension liegend gedacht werden können." Der Vortragende weist zunächst auf seine seit 1884 über abzählende Geometrie erschienenen Arbeiten hin; er erinnert an die von ihm im Jahre 1891 auf der Mathematiker-Versammlung zu Halle gegebenen, verallgemeinerten Formeln und geht dann näher auf seine seitdem gefundenen weiteren Verallgemeinerungen ein. Er zeigt insbesondere für die Anzahlen, welche angeben, wieviel Punktgebilde zweiten Grades von $m - 1$ Dimensionen in einem Raume von m Dimensionen gegebene elementare Lagebedingungen erfüllen, dafs dieselben sich allgemein mit Hilfe des auf Büschel von Räumen ausgedehnten Chaslesschen Korrespondenzprinzips ausdrücken lassen. — Hinsichtlich aller Einzelheiten des obigen Vortrages wird auf eine in den Math. Annalen erscheinende Arbeit hingewiesen.

Versammlung am 10. Juni 1893.

Der Jahrverwalter widmet dem verstorbenen Mitgliede Dr. K. Schulze Worte des Nachrufes. Darauf giebt Herr Dr. Oppenheimer in seinem Vortrage über die Erzeugung algebraischer Raumkurven durch veränderliche Figuren ein Referat einer Arbeit Caspary's (Journal f. r. u. a. Mathematik Bd. 100), welche sich an die besonders von Grassmann behandelte Erzeugung algebraischer Flächen durch veränderliche

Figuren anschliefst. Das Fundament der Arbeit bildet der folgende Satz: Wenn ein Punkt X im Raume sich so bewegt, dafs eine von ihm abgeleitete Linie in einer ebenfalls von ihm abgeleiteten Ebene liegt oder durch einen von ihm abgeleiteten Punkt geht, dann beschreibt der Punkt eine algebraische Raumkurve. — Herr Prof. Dr. H. Schubert giebt eine vereinfachte Lösung des Pascal'schen Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch Einführung seiner in die abzählende Geometrie mehrdimensionaler Räume eingeführten φ-Funktion.

Versammlung am 9. September 1893.

Herr J. Sieveking trägt über die Attraktion eines homogenen Ellipsoides vor. Nach einem Referat über die hierher gehörigen einschlägigen, bekannten Sätze werden die Attraktionsverhältnisse innerhalb und aufserhalb ruhender und rotierender Ellipsoide, die Lotverhältnisse sowie die Veränderlichkeit der Schwerkraft auf der Erde durch Zeichnungen erläutert. Zum Schlufs wird auf die Theorie der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren rotierender tropfbarflüssiger Massen eingegangen, und es werden namentlich auch die Druck- und Zugverhältnisse innerhalb solcher Massen durch Zeichnungen erläutert. — Herr Wasserbauinspektor Bubendey berichtet über Temperaturmessungen während der Eisbildung in der Elbe, welche durch frühere von Herrn Kapitän Meyer vorgenommene Messungen veranlafst waren.

Versammlung am 14. Oktober 1893.

Herr Wasserbaudirektor Ch. Nehls trägt vor über die analytische Behandlung komplexer Kurven. Nach einer einleitenden Darstellung der Grundoperationen mit komplexen Gröfsen werden die Grundformeln für die Goniometrie und Trigonometrie abgeleitet. Darauf geht der Vortragende zur Betrachtung komplexer Kegelschnitte über, die er durch sorgfältige Figuren veranschaulicht, wobei er besonders auf die Beziehungen zwischen Ellipse und Hyperbel und dann zwischen Epicykloide, Hypocykloide und Pericykloide eingeht. An den Vortrag knüpft Herr Prof. Dr. Schubert einige Bemerkungen über die Verallgemeinerungen der vorgetragenen Sätze. — Herr Wasserbauinspektor Bubendey überreicht der Gesellschaft eine Programmabhandlung von Oberlehrer Riessen (Nr. 280 1893), in welcher ein ungedrucktes Rechenbuch aus dem Jahre 1676 zum Abdruck gelangt, welches Heinrich tho Aspern, Lehrer Paul Halkes, einstigen Mitgliedes der Gesellschaft, zum Verfasser hat, und aus welchem Paul Halke mannigfache Aufgaben in seinem von der Gesellschaft herausgegebenen Sinnenkonfekt veröffentlicht hat.

Versammlung am 11. November 1893.

Herr Dr. J. Schröder trägt vor über einige elementare auf Teileranzahlen bezügliche Sätze sowie einige Anwendungen der Geometrie auf Zahlentheorie. Der Vortrag erscheint in den Mitteilungen der Gesellschaft (vergl. S. 178). — Herr Dr. J. Schröder referiert dann über die von Gutzmer für die verallgemeinerte Potentialgleichung gegebenen Sätze und die im Anschluſs daran entwickelte Verallgemeinerung des Green'schen Theorems.

Herr F. Bertheau wird als Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Versammlung am 9. Dezember 1893.

Herr Dr. H. Wagner trägt über das Dreieck und seine merkwürdigen Punkte vor. Der Vortragende stellt sich die Aufgabe, einmal die Seiten und den Flächeninhalt des Dreiecks der merkwürdigen Punkte d. h. desjenigen Dreiecks, dessen Eckpunkte der Höhenschnittpunkt und die Mittelpunkte der ein- und umbeschriebenen Kreise des gegebenen Dreiecks sind, aus den Seiten des letzteren zu berechnen; und zweitens soll aus der Lage der 3 merkwürdigen Punkte das Dreieck selbst durch Konstruktion sowohl als durch Rechnung gefunden werden. Die letztere Konstruktion führt auf eine vom Vortragenden schon früher behandelte Kurve (Programm der Realschule vor dem Lübeckerthor zu Hamburg 1890). — Herr J. Sieveking giebt im Anschluſs an seinen in der September-Sitzung gehaltenen Vortrag über die Attraktion des homogenen Ellipsoids eine historische Übersicht über die Beweismethoden für die einschlägigen Sätze.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt wertvolle Zuwendungen folgenden Herren:

J. Bergbohm, P. Bergholz, E. M. Blake, G. Bohlmann, M. Cantor, W. Felgentraeger, L. Goldschmidt, Grimsehl, A. Gutzmer, H. Hermite, A. Hübner, A. Hurwitz, P. Jaerisch, E. Koebke, M. Krause, M. E. Lemoine, E. Netto, N. B. Newson, M. M. d'Ocagne, F. Rogel, S. H. Schoute, H. Schubert, W. Schumann, H. Wagner, sowie allen Gesellschaften, mit denen die mathematische Gesellschaft in Schriftaustausch steht.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 5. Ausgegeben im Februar. 1895.

Zur Theorie schwingender Saiten.

Von Karl Eichler in Altona.

Die übliche Behandlung des Saitenproblems geht von dem Satze aus, dafs alle Schwingungen eines Punktsystems aus einfachen harmonischen Bewegungen sich zusammensetzen. Die hierbei für eine Saite gemachte Voraussetzung einer einzigen festen Schwingungsebene entspricht nicht den Thatsachen. Jede irgend wie erregte Saite beschreibt räumliche Konfigurationen, welche die Einführung von Elementarrotationen rechtfertigen. Dafs eine solche Erweiterung zulässig und erfolgreich ist, soll im folgenden gezeigt werden.

I.

Gehört ein materieller Punkt m zu einem konservativen Punktsystem, so mufs für jede beliebige Bewegung desselben die Summe der kinetischen und potentiellen Energie konstant sein. Bezeichnet man diese mit T bez. V, ferner den Vektor irgend einer Verschiebung des Punktes aus seiner Ruhelage mit μ, dagegen ihre Länge mit $\bar{u}$, die ersten und zweiten Differentialquotienten noch der Zeit t entsprechend mit $\dot{u}$, $\ddot{u}$ bezw. $\dot{\bar{u}}$, $\ddot{\bar{u}}$, so ist

$$T = \frac{m\dot{\bar{u}}^2}{2}, \quad V = \frac{\mu\bar{u}^2}{2}.$$

Dann wird nach Lagrange die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{u} + \mu u = 0.$$

Das vollständige Integral ergiebt sich in der Form einer Exponentialfunktion

$$u = re^{\pm i(nt+\alpha)}$$

wo $n^2 = \frac{m}{\mu}$ und $\mu = re^{i\alpha}$ die Anfangslage des Punktes für $t = 0$ angiebt.

Erhält also ein durch die Spannung μ in Ruhe gehaltener Punkt m in der Anfangslage einen seitlichen Impuls, so rotiert er gleichförmig in einem Kreise, rechts- oder linksläufig. Seine Schwingungsdauer ist $\tau = \frac{2\pi}{n} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\mu}}$. Die potentielle Energie wirkt, da $\bar{u}^2 = r^2$, also $V = \frac{\mu r^2}{2}$, nach dem Zentrum, die kinetische Energie T tangential, da $\dot{u} = \pm inu$. Letztere wird $= \frac{m}{2}(nr)^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{2r\pi}{\tau}\right)^2$, bedeutet also die Rotationsenergie.*)

2. Der stets vorhandenen Einwirkung dissipativer Kräfte läfst sich auch noch Rechnung tragen, sobald man die Störung proportional der Geschwindigkeit annimmt. Die Bewegungsgleichung wird dann:

$$\ddot{u} + k\dot{u} + n^2u = 0,$$

wo k die während der Einheit der Geschwindigkeit bewirkte, sehr klein vorzustellende Verzögerung bedeutet. Setzt man $u = r \cdot e^{(\alpha + i\beta)t}$, so ergiebt sich $\alpha = -\frac{k}{2}$, $\beta^2 = n^2 - \frac{k^2}{4}$, also

$$u = r \cdot e^{-\frac{kt}{2}} \cdot e^{i\left(t\sqrt{n^2 - \frac{k^2}{4}} + \alpha'\right)}.$$

Da k sehr klein, so ist es erlaubt, $e^{-\frac{k}{2}t}t = -\frac{kt}{2}$ zu setzen. So zerfällt u in zwei Teile, deren erster wieder die Kreisschwingung, deren zweiter die Verzögerungsfunktion liefert. Wie ich in einer früheren Arbeit**) über cyklische Kurven angegeben habe, stellt u die Bewegung in einer logarithmischen Spirale vor. Die Gleichung gestattet leicht k aus der ganzen Schwingungsdauer, ebenso jeden Ausschlag für einen beliebigen Zeitpunkt zu bestimmen.***)

3. Ist die Rotation keine freie, sondern durch eine äufsere Kraft E erzwungene, so mufs diese von der Form Ee^{ipt} sein. Die Differentialgleichung lautet jetzt:

$$\ddot{u} + k\dot{u} + n^2u - Ee^{ipt} = 0.$$

Für $\mu = re^{i(pt - \varepsilon)}$ folgt dann $E\sin\varepsilon = rkp$, $E\cos\varepsilon = r(n^2 - p^2)$, also

---

*) Thomson u. Tait, theor. Physik I, § 281.

**) Mitteilungen d. math. Ges. zu Hamburg 1890.

***) Vergl. die Ableitung Thomson u. Tait I, § 342.

$$r = \frac{E}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}}, \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{pk}{n^2 - p^2},$$

also

$$u = \frac{E e^{i(pt - \varepsilon)}}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + k^2 p^2}}.$$

Die Rotationsperiode der natürlichen Saitenschwingung stimmt also mit der Kraftperiode überein, die Amplitude der Schwingung ist der Kraft E proportional.

4. Legt man jetzt die Kreisbewegung als elementare zu Grunde, so lassen sich durch bloſse Addition alle möglichen Arten zusammengesetzter Rotationen ableiten, wenn man über die Amplituden und Perioden, sowie Anfangslagen beliebig verfügt. Unter der vorläufigen Annahme, daſs Reibungskräfte nicht existieren und daſs die Bewegung keine ezwungene ist, erhalten wir als allgemeinsten analytischen Ausdruck:

$$u = \sum_1^k {}_s u_s = \sum_1^k {}_s A_s e^{\pm i(n_s t + \alpha_s)}$$

wo μ_s die Vektorkomponenten bezeichnen. In dieser Gleichung kann $A_s e^{i\alpha_s} = C_s$ gesetzt werden; ob C_s reell oder komplex, ist für die weitere Untersuchung ohne Belang.

Die geometrische Deutung von u ist in genügender Ausführlichkeit Gegenstand der cit. Abhandlung über cyklische Kurven gewesen; es sei hier auf dieselbe hingewiesen. Man erhält alle möglichen Formen von Epi- und Hypocykloiden und Trochoiden, sowie Mischformen, welche sich aus Rotationen und harmonischen Bewegungen zusammensetzen.

Für die Untersuchung der Schwingungserscheinungen eignet sich obige Darstellung ganz besonders. Da die Vektorkomponenten μ_s von einander unabhängig sind, so braucht man also nur die Bedingungen für die Einzelrotationen über Amplitude und Periodizität zu kennen, um aus ihnen sofort auf die Gesamtbewegung zu schlieſsen. Daſs diese bei Abwesenheit von Reibungskräften eine stabile sein muſs, ist aus der Gleichungsform schon ersichtlich; genauer folgt es aus der hier, wie im früheren Falle 1) gültigen Gleichung

$$T + V = \Sigma(T_s + V_s) = \text{const},$$

deren Nachweis keine Schwierigkeit bietet.

Auch unter der Annahme innerer Reibung (k) läſst sich noch wie bei 2) die Störung der Bewegung berechnen. Drittens läſst sich der Fall 3) erzwungener Bewegung für zusammengesetzte Rotationen erweitern.

5. Die bisherigen Betrachtungen behalten ihre Gültigkeit, wenn man statt der Zirkulärvektoren e^{inst} elliptische einführt. Diese setzen sich aus zwei entgegengesetzten Rotationen

$$u_s = A_s e^{+\text{inst}} + B_s e^{-\text{inst}}$$

zusammen. Wird $A_s = B_s$, so erhalten wir speziell harmonische Bewegungen.*)

II.

Indem ich mich nun zu den Saitenschwingungen wende, lege ich für gleichmäfsige Dichte und Abwesenheit zerstreuender Kräfte die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = n^2 \frac{d^2u}{dx^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

zu Grunde. Die periodische Funktion u wird jetzt von der Form

$$u = A_s e^{is(x \pm nt)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

d. h. geometrisch: Ordnet man jeden Punkt x der zunächst unbegrenzt gedachten Saite eine auf ihr senkrechte Ebene als Ort der entsprechenden u zu, so giebt 2) zu jedem $x = a$ die Bewegung in einem Kreise und zwar aus der Anfangslage $u_0 = A_s e^{isa}$. Zweitens liefert die Gleichung für jeden Zeitpunkt t die Gestalt der Saite. Diese windet sich auf einem Kreiscylinder vom Radius A_s um die ursprüngliche Lage schraubenförmig herum. Da $\frac{du}{dx} = isu$, $\frac{du}{dt} = \pm inu$, so liefert $\frac{du}{dt} : \frac{du}{dx} = \pm \frac{n}{s}$ eine konstante Beziehung zwischen der Saitenneigung und der Geschwindigkeit für irgend einen Punkt.

Im übrigen gilt auch hier, was in der sonst üblichen Darstellung über fortschreitende Wellen und stationäre Schwingungen ausgeführt wird. Ich verweise besonders auf Rayleighs Theorie des Schalles § 144 und 145.

Die Verallgemeinerung

$$u = \sum_1^k A_s e^{is(x \pm nt)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

führt zu einer Darstellung zusammengesetzter räumlicher Saitenschwingungen und giebt ein nützliches einfaches Beispiel ab für die Untersuchung kinetischer Stabilität (cf. Thomson u. Tait I, § 346 ff.).

Für die Akustik wird der Spezialfall einer begrenzten Saite wichtig. Da für $x = 0$, $x = l$ auch $u = 0$ werden mufs, so reduziert

*) Vergl. Thomson u. Tait I, § 66, Verdet, Wellentheorie des Lichts II, cap. 28.

sich der Faktor e^{ikx} auf das Glied sinus. Schreibt man das Argument zweckmäfsiger in der Form $\frac{s\pi x}{l}$, so erhält man den einfachsten Fall

$$u = A_s \sin\frac{s\pi x}{l} \cdot e^{\pm int} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Die Saite hat in $x = \frac{l}{s}$ Knotenpunkte; ihre aliquoten Teile schwingen in Kreisen gleichförmig um die Ruhelage nach rechts oder links, je nachdem der Exponent von e positiv oder negativ angenommen wird. Erweitert man daher durch Einführung elliptischer Rotation, so wird

$$u = \sin\frac{s\pi x}{l}(A_s e^{int} + B_s e^{-int}). \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

Sind die Koeffizienten A, B nicht direkt gegeben, sondern erst aus den Anfangswerten der Bewegung zu bestimmen, so folgt für $t = 0$

$$u_0 = \sin\frac{s\pi x}{l}(A_s + B_s), \quad \dot{u}_0 = \sin\frac{s\pi x}{l}(A_s - B_s),$$

dann ferner

$$A_s = \frac{1}{l}\int_0^l u_0 \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx - \frac{i}{ns}\int_0^l \dot{u}_0 \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx.$$

$$B_s = \frac{1}{l}\int_0^l u_0 \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx + \frac{i}{ns}\int_0^l \dot{u}_0 \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx$$

also übereinstimmend mit Rayleigh l. c. § 127:

$$u = \frac{2}{l}\sin\frac{s\pi x}{l} \cdot \cos snt \int_0^l u_0 sm\frac{s\pi x}{l}\,dx + \frac{2}{ns}\sin\frac{s\pi x}{t}\sin snt\int_0^l \dot{u}_0 \sin\frac{s\pi x}{l}\,dx.$$

Die Zusammensetzung von Kreisrotationen 4), welche wir unbeschadet der Allgemeinheit in der Folge zu Grunde legen, ergiebt nun für $s = 1, 2, 3 \ldots k$

$$u = \Sigma u_s = \Sigma \sin\frac{s\pi x}{l} A_s e^{int} \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Die Energie T und V für die Gesamtbewegung berechnet sich für jede Konfiguration in folgender Weise:

Bezeichnen φ_s die Vektorenausdrücke, somit

$$u = \varphi_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \varphi_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots$$

$$\dot{u} = \dot{\varphi}_1 \sin\frac{\pi x}{l} + \dot{\varphi}_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots$$

so ergiebt sich für die kinetische Energie, wenn das Massenelement $= \varrho dx$,

$$T = \frac{\varrho}{2}\int_0^l \dot{u}^2 dx = \frac{\varrho}{2}\int_0^l \sum \dot{\bar{\varphi}}_s^2 \sin^2 \frac{s\pi x}{l} dx$$

$$+ \frac{\varrho}{2}\int_0^l \sum \dot{\bar{\varphi}}_m \dot{\bar{\varphi}}_n \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Nun wird das zweite Integral gleich Null, also

$$T = \varrho \frac{l}{4} \sum \dot{\bar{\varphi}}_s^2.$$

Entsprechend erhält man, wenn T_1 die ursprüngliche Saitenspannung bezeichnet

$$V = \frac{T_1}{2}\int_0^l \left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 dx = \frac{T_1}{2}\int_0^l \left(\sum \bar{\varphi}_s \frac{s\pi}{l} \cdot \cos \frac{s\pi x}{l}\right)^2 dx = \frac{T_1 l}{4} \sum \bar{\varphi}_s^2 \cdot \frac{s^2\pi^2}{l^2}.$$

Also T und V stellen sich als Quadratsummen dar. Die Gesamtenergie wird jetzt

$$T + V = \varrho \frac{l}{4} \sum \dot{\bar{\varphi}}_s^2 + \frac{T_1 l}{4} \sum \bar{\varphi}_s^2 \frac{s^2\pi^2}{l^2} = \sum_1^k (T_s + V_s).$$

Die Bewegungsgleichungen erhalten also die Form

$$\ddot{\varphi}_s + c_s \varphi_s = 0 \quad (s = 1, 2, 3 \cdots),$$

d. h. die Untersuchung der Gesamtbewegung reduziert sich auf die der Einzelrotationen. Die Größen $\varphi_s = e^{\text{int}s}$ bedeuten daher die allgemeinen Normalkoordinaten unseres konservativen Punktsystems. Vergl. Th. & Tait I, § 204, 337 ff. Die Schwingung der ganzen Saite findet also so statt, als existierte jede Rotation für sich unabhängig von der andern.

Beispiele: Zur Erläuterung der bisherigen allgemeinen Entwicklungen erscheint ein einfaches Beispiel geeignet. Die Gleichung $u = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} e^{\text{int}} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} e^{2\,\text{int}}$ liefert für jedes x eine Kardioide als Schwingungskurve. In der Mitte der Saite $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ erhalten wir einen Kreis. Gleich weit von diesem entfernte Punkte beschreiben dieselben Kardioiden, aber in umgekehrter Lage. Denn setzt man statt x $l - x$, so wird $u = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} e^{\text{int}} - A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} e^{2\,\text{int}}$. Die Saite windet sich aus der Anfangslage $A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l}$ mit der Geschwindigkeit

$\dot{u} = in(u_1 + 2u_2)$ auf dem Mittenkreis gleitend um die Ruhelage herum. Projiziert man die Bewegung eines beliebigen Punktes etwa in vertikaler Richtung, so erhält man die bekannte graphische Darstellung einer aus Grundton und Oktav zusammengesetzten harmonischen Schwingung $A \sin nt + b \sin 2nt$. Es ergiebt sich nach obigem weiter

$$T = \frac{\varrho}{2} n^2 (A_1^2 + 4A_2^2) = T_1 + T_2, \quad V = T_1 \frac{\pi^2}{4l^2} (A_1 + 4A_2^2) = V_1 + V_2.$$

So folgt auch hier die Koexistenz der Bewegungen und die Gültigkeit der Lagrangeschen Differentialgleichungen. Sie gilt demnach für alle cyklischen Punktkurven.

III.

Es erübrigt noch, auf die Spezialisierung der Koeffizienten A_s, welche willkürlich angenommen waren, einzugehen. Sie hängen von der Art der Tonerregung ab. Sowohl für geschlagene, gezupfte als gestrichene Saiten läfst sich nun ohne weiteres die Analyse von Helmholtz unter Zugrundelegung zirkulärer Komponenten durchführen. Doch klärt ihr allgemeiner Charakter nur im allgemeinen über die Abhängigkeit der Bewegung von der Erregungsart auf, ohne Aufschluſs über die Punktschwingungen im Einzelfalle zu geben.

Der Nachweis, daſs es drei ausgezeichnete Typen von Punktschwingungen einer Saite giebt, läfst sich experimentell führen*) oder theoretisch. Dieser besteht in folgender Überlegung:

Setzt man zur Vereinfachung $C_s = A_s \sin \frac{s\pi x}{l}$, also $u = \Sigma C_s e^{\text{inst}}$, so kann für gewisse Saitenkonfigurationen der Fall eintreten, daſs die Vektorgeschwindigkeit $\dot{u} > 0$ oder $= 0$, oder daſs die Vektorbeschleunigung $\ddot{u} = 0$ wird. Vergl. meine oben cit. Abh. § 2.

Erster Fall. Ist $\dot{u} = in\Sigma C_s \cdot s \cdot e^{\text{inst}} = 0$, so genügt man dieser Bedingung durch Gleichsetzung der Koeffizienten also

$$C_1 = 2C_2 = 3C_3 = \cdots \text{ und } \sum_1^k e^{\text{inst}} = 0, \text{ d. h. } e^{\text{int}} = \sqrt[k]{1}.$$

Oder es wird $C_1 = -2C_2 = +3C_3 = \cdots$, $e^{\text{int}} = \sqrt[k]{1}$. Beide Fälle liefern nichts Verschiedenes; sie bringen nur zum Ausdruck, daſs die durch $\dot{u} = 0$ ausgezeichneten Punkte momentaner Ruhe symmetrisch zur Anfangsrichtung liegen. Die Punktgleichung wird also:

$$u = C_1 \Sigma \frac{(\mp 1)^{s-1}}{s} e^{\text{inst}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

*) Mensel-Krigar u. Raps Wied. Ann. 44: Über Saitenschwingungen.

und liefert Epicykloiden mit $s-1$ Rückkehrpunkten (Spitzen). Die Einzelrotationen erfolgen in demselben Richtungssinne.

Zweiter Fall. Ist $\dot{u} > 0$ also $C_2 > \frac{C_1}{2}$, $C_3 > \frac{C_1}{3} \cdots$, so treten an Stelle der Rückkehrpunkte Schleifen, welche sich um dieselben herumwinden und deren Gröfse mit der Zunahme C_s wächst.

Dritter Fall. Ist $\ddot{u} = 0$, so $C_1 = \mp s^2 C_s$, wo $s = 2, 3, 4 \cdots$, ferner $e^{\text{int}} = \sqrt[s]{1}$. An die Stelle der Rückkehrpunkte treten schwache wellenförmige Ausbuchtungen, welche mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen werden. Die Kurvengleichung wird analog 1)

$$u = C_1 \Sigma \frac{(\mp 1)^{s-1}}{s^2} e^{\text{inst}}. \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Ich habe diese dritte Kurvengattung als „Wellenkurven“ (l. c.) bezeichnet.

Die Aufsuchung der angegebenen singulären Stellen ergiebt sich leicht durch Addition der Vektorkomponenten.

Die angegebene Charakterisierung dreier Grundformen, der Schleifen-, Spitzen- und Wellenkurven, erhält ihre Bedeutung durch die Übereinstimmung mit den Resultaten, welche die Herren Krigar-Menzel und Raps in einer wertvollen Experimentaluntersuchung über die Schwingungen gestrichener Saiten*) festgestellt haben.

Die von den Verfassern photographisch aufgenommenen Projektionsfiguren der Schwingungen, welche durch vertikalen Saitenstrich erzeugt wurden, zeigen drei Typen innerhalb jeder Periode:

1. solche mit wellenförmigen Erhebungen,
2. solche von treppenförmiger Gestalt,
3. Zickzackfiguren.

Diese drei Arten entsprechen genau den oben gefundenen. Projiziert man nämlich die Schleifenkurven vertikal, indem man wie bei einer Sinuslinie auf einer horizontalen (x-Achse) alle Winkel von 0 bis 2π und die zugehörigen Vertikalabstände für alle Punkte der Kurve als Y-Ordinaten aufträgt, so bilden sich die Schleifen als Wellenerhebungen ab. Die Spitzen der zweiten Art liefern kurze horizontale Strecken, also Treppenform, da der bewegte Punkt einen Augenblick in den Spitzenstellen in Ruhe verharrt.

Die dritte Art liefert Zickzackfiguren, in denen die sehr schwachen Oscillationen kaum zu erkennen sind.

---

*) Wied. Ann. 44 (1891).

2. Die Folgerungen, welche sich aus der Gröfse der Koeffizienten C_s auf die Stärke der einzelnen Rotationsimpulse ziehen lassen, geben uns eine Vorstellung von der mechanischen Wirkungsweise des Bogens in dem einen oder andern Falle. Sie ist derjenigen von Helmholtz und der von oben genannten Verfassern in ihrer Arbeit (pag. 639) ausführlich gegebenen analog, mit dem Unterschiede, dafs für rotierende Bewegung hier auch dem seitlich und periodisch wirkenden Druck des Bogens Rechnung getragen wird. Dafs unter der Voraussetzung stabiler Bewegung die Periodizität des Bogenstrichs mit der Periode der natürlichen Saitenschwingungen übereinstimmen mufs, ergiebt sich aus I, 3.

3. Was nun die besonderen, interessanten Formen der Punktschwingungen betrifft, so hängen diese bei konstanter Saitenspannung einmal von der Erregungsstelle (ξ), dann auch von der Lage (x) des schwingenden Punktes ab. Die von Krigar-Menzel und Raps angefertigte Tafel photographischer Projektionsbilder giebt neben der Übersicht (pag. 641) eine fundamentale Unterlage für ihre Analyse. Mit Hilfe Fourierscher Reihenentwicklung haben die Herren Verfasser den analytischen Ausdruck zunächst für die einzelnen Gruppen, dann für ihre Gesamtheit (l. c. Gleichung 6a) abgeleitet, gültig für jede Erregungsstelle, ob zusammenfallend mit einem Knotenpunkte oder in dessen Nähe liegend. Es mufs möglich sein, aus rein mechanischen Erwägungen einen solchen allgemeinen Ausdruck aufzufinden, etwa so wie es für den Fall, dafs die Erregung in einem Knoten erfolgt, bereits geschehen ist (Rayleigh l. c. § 138). Führt man eine solche Untersuchung mit Beibehaltung der Rotationsvorstellung durch, so wird man die Projektionsfiguren durch die äquivalenten cyklischen Kurven ersetzen und für diese die Gleichungsform aufstellen müssen, um an ihrer Hand weiter zu schliefsen. Dies ist mir für den gröfseren Teil der Figuren ohne Mühe gelungen, und es haben sich aus ihnen gewisse Gesetzmäfsigkeiten über die Abhängigkeit von der Erregungsstelle $\xi = \frac{l(1+\varepsilon)}{k}$ ergeben. Zu einem abschliefsenden Ergebnis hat die begonnene Untersuchung noch nicht geführt.

Zur Integration der Gleichungen des elastischen Kreiscylinders.

Von Paul Jaerisch in Hamburg.

In zwei Arbeiten beschäftigt sich J. Thomae (Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math. Physische Klasse 1884, S. 399 und 1886, S. 186) mit der Integration der Elastizitätsgleichungen für das Gleichgewicht des Kreiscylinders unter der besonderen Annahme, dafs sich die zur Cylinderachse senkrechten, ebenen Komponenten u und v einer Verrückung ausdrücken lassen durch

$$u = xs, \qquad v = ys.$$

Dann sind die dritte, der Cylinderachse parallele Komponente der Verrückung w sowie die Funktion s nur von z und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ abhängig.

Das zur Bestimmung von s und w, sowie von der Volumenänderung Θ erhaltene System partieller Differentialgleichungen löst Thomae nicht durch Zurückführung auf die partielle Differentialgleichung, die man mit $\Delta^2 \cdot = 0$ zu bezeichnen pflegt, sondern er macht die weitere Annahme, dafs sich die gesuchten Gröfsen in der Form $s = t \overset{\cos}{\sin} nz$ oder in der Form $s = zt \overset{\cos}{\sin} nz$ ausdrücken lassen, wo t von z nicht abhängen soll.

Dann läfst sich die Integration des simultanen Systems partieller Differentialgleichungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung zurückführen, von welcher Thomae durch Reihenentwickelung zeigt, dafs sie sich durch zwei Besselsche Funktionen integrieren läfst. Diese Differentialgleichung vierter Ordnung ist aber direkt, ohne Reihenentwickelung anzuwenden, auf Besselsche Funktionen zurückführbar.*) Und dann habe ich in meinen Arbeiten: „Allgemeine Integration der Elastizitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper" im Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 104 und in diesen Mitteilungen Bd. 1 gezeigt, dafs sich die Elastizitätsgleichungen für jeden Rotationskörper auf die Gleichung $\Delta^2 \cdot + m^2 \cdot = 0$ zurückführen lassen. Aus den dort gewonnenen allgemeinen Integralsystemen müssen diejenigen für den von Thomae behandelten Fall ableitbar sein. Doch gewinnt man oft durch Behandlung des spezielleren Systems noch besondere Integrale, welche für manche Probleme

*) S. Anhang.

wichtig, aber aus den allgemeinen Formeln nicht immer ohne weiteres zu gewinnen sind, und dann bietet oft gerade die Integration des spezielleren Systems infolge ihrer weniger symmetrischen Form Schwierigkeiten besonderer Art.

Ein Grund, das von Thomae gelöste Problem noch einmal zu behandeln, lag für mich auch darin, dafs dabei meine Methode, simultane Systeme partieller Differentialgleichungen zu integrieren, besser als bei dem allgemeineren Probleme erkennbar wird. Sie besteht im wesentlichen darin, die Gleichungen durch oft mehrfache, passende Substitutionen einfacher zu gestalten und auf bekannte Gleichungen zurückzuführen.

Die gesuchten Gröfsen s und w ergeben sich mir ohne besondere Annahme über die Art ihrer Abhängigkeit von r und s in einfacher, fertiger Form, und zwar sowohl s als auch w, während bei Thomae, um w zu erhalten, noch eine zweimalige Integration erforderlich ist; und dann lassen die für s und w gewonnenen Ausdrücke leicht erkennen, dafs durch sie den Differentialgleichungen genügt wird. Ferner treten in dem von Thomae gegebenen Ausdrucke für s (Verhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math. Phys. Klasse 1886, S. 197) neben den integrierenden Funktionen transcendenten Charakters ganze Funktionen ersten Grades in Beziehung auf s und zweiten Grades in r auf, während in meinen Formeln neben den transcendenten Funktionen ganze Funktionen vorkommen beliebig hohen Grades mit einer entsprechenden gröfseren Anzahl willkürlicher Konstanten.

Schliefslich bemerke ich noch, dafs alle gewonnenen Integralsysteme aus einheitlicher Quelle abgeleitet werden, und dafs die Anzahl derselben beliebig vermehrt werden kann nach einem von mir in diesen Mitteilungen Bd. II, 1890, S. 116 bewiesenen Satze, wonach zu jedem Integrale F der Gleichung

$$\Delta^2 F + m^2 F = 0$$

weitere Integrale gewonnen werden in einer der folgenden beiden Formen:

$$F_1 = a\frac{dF'}{dx} + b\frac{dF'}{dy} + c\frac{dF'}{dz} + m^2(ax + by + cz)F,$$

$$F_2 = \frac{dF}{dx}(\gamma y - \beta z) + \frac{dF}{dy}(\alpha z - \gamma x) + \frac{dF}{dz}(\beta x - \alpha y),$$

wo $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ willkürliche Konstanten sind, und wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$F' = x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz}.$$

Die Untersuchung Thomaes verallgemeinere ich insofern, als ich die Elastizitätsgleichungen zunächst für den Schwingungszustand integriere. Aus den so erhaltenen Integralsystemen lassen sich für das Gleichgewicht diejenigen direkt ableiten, welche von der Volumenänderung unabhängig sind. Die von der Volumenänderung abhängigen Integralsysteme werden dann für sich gewonnen.

---

§. 1. Bei Betrachtung des Schwingungszustandes eines Körpers kann von äufseren, von der Zeit unabhängigen Kräften abgesehen werden. Ich mache diese Voraussetzung auch für das Gleichgewicht. Dann ist zu den zu gewinnenden Integralsystemen noch dasjenige hinzuzufügen, welches von der Schwerkraft abhängt, die Thomae als äufsere Kraft wirken läfst. Dieses Integralsystem ist leicht zu bilden und bleibt im folgenden aufser acht.

Unter der genannten Voraussetzung sind die Elastizitätsgleichungen in bekannter Bezeichnungsweise:

$$\Delta^2 u + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\Theta}{dx} = \frac{\varrho}{\mu}\frac{d^2u}{dt^2},$$
$$\Delta^2 v + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\Theta}{dy} = \frac{\varrho}{\mu}\frac{d^2v}{dt^2},$$
$$\Delta^2 w + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\Theta}{dz} = \frac{\varrho}{\mu}\frac{d^2w}{dt^2},$$
$$\Theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Für

$$u = xse^{im\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}t}, \quad v = yse^{im\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}t}, \quad w = qe^{im\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}t},$$
$$\Theta = \sigma e^{im\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}t},$$

wo s, q und σ nur von r, z und t abhängen sollen, wenn

$$r^2 = x^2 + y^2$$

gesetzt wird, nehmen die Elastizitätsgleichungen die folgende Form an:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2s}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{ds}{dr} + \frac{d^2s}{dz^2} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr} = -m^2 s, \\ \frac{d^2q}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dq}{dr} + \frac{d^2q}{dz^2} + \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\sigma}{dz} = -m^2 q, \end{cases}$$

$$(1a) \quad \sigma = 2s + r\frac{ds}{dr} + \frac{dq}{dz}.$$

Sie gehen für $m = 0$ in die Gleichungen bei Thomae über, wenn der rechten Seite der zweiten Gleichung das von der Schwerkraft g abhängige Glied ϱg hinzugefügt wird.

Beachtet man die Identitäten

$$r^2\frac{d^2s}{dr^2}+3r\frac{ds}{dr}=r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2s}{dr},$$

$$2s+r\frac{ds}{dr}=\frac{1}{r}\frac{dr^2s}{dr},$$

$$\frac{d^2q}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dq}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dq}{dr},$$

so nehmen die Gleichungen (1) und (1a) die Form an:

$$(2)\quad \begin{cases} r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2s}{dr}+\frac{dr^2s}{dz^2}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}r\frac{d\sigma}{dr}=-m^2r^2s, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dq}{dr}+\frac{d^2q}{dz^2}+\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{d\sigma}{dz}=-m^2q; \end{cases}$$

$$(2a)\quad \sigma=\frac{1}{r}\frac{dr^2s}{dr}+\frac{dq}{dz}.$$

Aus den Gleichungen (2) folgt durch die Operationen:

$$\frac{1}{r}\frac{d\cdot}{dr}\quad\text{und}\quad\frac{d\cdot}{dz}$$

und durch Addition mit Rücksicht auf (2a):

$$(3)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\sigma}{dr}+\frac{d^2\sigma}{dz^2}+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}m^2\sigma=0.$$

Diese Gleichung hat die in der Einleitung erwähnte Form:

$$(3a)\quad \Delta^2\sigma+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}m^2\sigma=0.$$

Sie bestimmt σ als Funktion von r und z.

Die Gleichungen (2) nehmen eine einfachere und übersichtlichere Gestalt an, wenn für s und q zwei Funktionen S und Q durch die folgenden Substitutionen eingeführt werden:

$$(4)\quad s=\frac{1}{r}\frac{dS}{dr},\quad q=\frac{dQ}{dz}.$$

Dadurch wird die erste Gleichung (2) nach r, die zweite nach z integrierbar. Und bezeichnet man die den rechten Seiten der Gleichungen hinzuzufügenden, noch unbekannten Funktionen von z resp. r mit Z resp. R, so nehmen die Gleichungen (2) die folgende Form an:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dS}{dr}+\frac{d^2S}{dz^2}+m^2S=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\sigma+Z, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dQ}{dr}+\frac{d^2Q}{dz^2}+m^2Q=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\sigma+R. \end{cases}$$

Die eingeführten Funktionen S, Q, Z und R sind, wie noch besonders hervorgehoben werden mag, so zu bestimmen, dafs S und Q von r und z, Z nur von z, R nur von r abhängig werden.

§. 2. σ ist in den Gleichungen (5) eine gegebene, durch (3a) oder (3) definierte Funktion. Es werden daher, damit die Gleichungen (5) bestehen können, in den Ausdrücken für S und Q Glieder auftreten, welche von σ abhängig sind. Ebenso werden in S und Q Glieder vorhanden sein müssen, welche von den später zu definierenden Funktionen Z und R abhängig sind. Drittens aber können die linken Seiten der Gleichungen (5) für sich verschwinden. Wir haben daher zu setzen:

$$(6)\quad \cdots\cdots \begin{cases} S = \mathfrak{S} + S_\sigma + S_Z, \\ Q = \mathfrak{Q} + Q_\sigma + Q_R, \end{cases}$$

wo S_σ und Q_σ, S_Z und Q_R Funktionen bezeichnen, welche von σ resp. Z und R abhängen, und wo $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Q}$ diejenigen Werte von S und Q sind, für welche die linken Seiten der Gleichungen für sich erfüllt werden. Durch die letzteren Funktionen treten in die Ausdrücke (6) für S und Q je vier willkürliche Konstanten ein. Daher stellen diese Ausdrücke, falls die eingeführten Funktionen auf die angegebene Weise bestimmt werden können, die allgemeinen Integrale der Gleichungen (5) dar.

Diese Gleichungen erhalten jetzt folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\mathfrak{S}}{dr} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dz^2} + m^2\mathfrak{S} \\ +&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dS_\sigma}{dr} + \frac{d^2S_\sigma}{dz^2} + m^2S_\sigma \\ +&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dS_Z}{dr} + \frac{d^2S_Z}{dz^2} + m^2S_Z \end{aligned}\right\} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\sigma + Z,$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\mathfrak{Q}}{dr} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2} + m^2\mathfrak{Q} \\ +&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dQ_\sigma}{dr} + \frac{d^2Q_\sigma}{dz^2} + m^2Q_\sigma \\ +&\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dQ_R}{dr} + \frac{d^2Q_R}{dz^2} + m^2Q_R \end{aligned}\right\} = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\sigma + R.$$

Es verschwinden darin für sich zunächst diejenigen Glieder, welche $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Q}$ enthalten, nach der Definition dieser Funktionen; ferner enthält σ als allgemeine Lösung der Gleichung (3a) willkürliche Konstanten und daher verschwinden die von σ abhängigen Glieder für sich. Das Gleiche gilt für die von Z und R abhängigen Glieder. Es zerfallen die Gleichungen daher in folgende Systeme:

$$(7a)\quad \cdots \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\mathfrak{S}}{ds} + \frac{d^2\mathfrak{S}}{dz^2} + m^2\mathfrak{S} = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\mathfrak{Q}}{dq} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2} + m^2\mathfrak{Q} = 0; \end{cases}$$

$$(7b)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dS_\sigma}{dr} + \frac{d^2 S_\sigma}{dz^2} + m^2 S_\sigma = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\sigma, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dQ_\sigma}{dr} + \frac{d^2 Q_\sigma}{dz^2} + m^2 Q_\sigma = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\sigma; \end{cases}$$

$$(7c)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dS_Z}{dr} + \frac{d^2 S_Z}{dz^2} + m^2 S_Z = Z, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dQ_R}{dr} + \frac{d^2 Q_R}{dz^2} + m^2 Q_R = R, \end{cases}$$

Die Gleichungen (7a) haben die gewünschte Form. Hinsichtlich der Gleichungen (7b) und (7c) möge daran erinnert werden, dafs nur solche Integralwerte für S_σ, Q_σ, S_Z, S_R in Betracht kommen, welche von σ resp. Z und R abhängen. Es ergiebt sich demnach zunächst, wie mit Rücksicht auf die Gleichung (3) für σ zu erkennen ist:

$$(8)\quad S_\sigma = Q_\sigma = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu m^2}\sigma.$$

Durch diese Werte werden die Gleichungen (7b) identisch erfüllt. Denn beide Gleichungen (7b) nehmen durch (8) zunächst die folgende Form an:

$$-\frac{\lambda+2\mu}{\mu m^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\sigma}{dr} + \frac{d^2\sigma}{dz^2}\right) - \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\sigma = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\sigma.$$

Aus der Gleichung (3) folgt aber:

$$(8a)\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\sigma}{dr} + \frac{d^2\sigma}{dz^2} = -\frac{\mu}{\lambda+2\mu} m^2 \sigma.$$

Dadurch nimmt die linke Seite der vorletzten Gleichung den Wert $= -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\sigma$ an.

Für S_Z und Q_R in den Gleichungen (7c) kommen nur solche Werte in Betracht, welche von Z resp. von R abhängen. Diese Gleichungen werden daher erfüllt, wenn man

$$(9)\quad S_Z = \frac{r^2}{4} Z, \quad Q_R = \frac{z^2}{2} R$$

setzt und über Z und R, von denen nur verlangt ist, dafs sie Funktionen von z resp. von r sein sollen, so verfügt, dafs sie den Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d^2 Z}{dz^2} + m^2 Z = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + m^2 R = 0. \end{cases}$$

genügen.

§. 3. Jetzt ergiebt sich für S und Q in (6) durch (8) und (9):

$$S = \mathfrak{S} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\sigma + \frac{r^2}{4}Z,$$

$$Q = \mathfrak{Q} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\sigma + \frac{z^2}{2}R,$$

und hierdurch für s und q in (4):

$$(11) \quad \cdots \quad \begin{cases} s = \frac{1}{r}\frac{d\mathfrak{S}}{dr} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{2}Z, \\ q = \frac{d\mathfrak{Q}}{dz} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\frac{d\sigma}{dz} + zR. \end{cases}$$

Diese Werte für s und q sind aber nicht unabhängig von einander, sondern durch die Gleichung (2a) miteinander verbunden, welche durch (11) in die folgende übergeht:

$$\sigma = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathfrak{S}}{dr} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2} - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\sigma}{dr} + \frac{d^2\sigma}{dz^2}\right) + Z + R.$$

Und diese Gleichung wird mit Rücksicht auf (8a) identisch erfüllt, wenn die Funktionen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{Q}$, Z und R, welche durch (7a) und (10) definiert sind, der Bedingung:

$$(12) \quad \cdots \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathfrak{S}}{dr} + \frac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2} + Z + R = 0$$

genügen. Um diese Bedingungsgleichung zu vereinfachen, führe man zwei Funktionen $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{Q}'$ ein durch die Annahme

$$(13) \quad \cdots \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \frac{R}{m^2}, \qquad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}' + \frac{Z}{m^2}.$$

Die Werte (13) für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Q}$ genügen den für diese Funktionen aufgestellten Definitionsgleichungen (7a), wenn $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{Q}'$ Integrale derselben Gleichungen sind. Und die Bedingungsgleichung (12) geht durch (13) mit Rücksicht auf die Gleichungen (10), denen Z und R genügen, in folgende über:

$$(14) \quad \cdots \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathfrak{S}'}{dr} + \frac{d^2\mathfrak{Q}'}{dz^2} = 0.$$

Der Gleichung (14) kann in zweifacher Weise genügt werden. Erstens ersetze man

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\mathfrak{S}'}{dr} \quad \text{durch} \quad -\frac{d^2\mathfrak{S}'}{dz^2} - m^2\mathfrak{S}',$$

was gestattet ist, da $\mathfrak{S}'$ der Gleichung (7a) für $\mathfrak{S}$ genügen soll. Dadurch geht die Gleichung (14) über in:

$$-\frac{d^2\mathfrak{S}'}{dz^2} - m^2\mathfrak{S}' + \frac{d^2\mathfrak{Q}'}{dz^2} = 0,$$

und um die Integration ausführen zu können, führe man durch

$$(15) \quad \ldots \quad \mathfrak{S}' = \frac{d^2 L}{dz^2}$$

eine Funktion L ein, welche derselben Gleichung wie $\mathfrak{S}'$, also der Gleichung (7a) für $\mathfrak{S}$ genügt. Dann folgt aus der entstehenden Gleichung

$$-\frac{d^4 L}{dz^4} - m^2 \frac{d^2 L}{dz^2} + \frac{d^2 \mathfrak{Q}'}{dz^2} = 0$$

durch zweimalige Integration nach z:

$$(16) \quad \ldots \quad \mathfrak{Q}' = \frac{d^2 L}{dz^2} + m^2 L + \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_1 z,$$

wo $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}_1$ zwei Funktionen von r bezeichnen, welche, damit $\mathfrak{Q}'$ der Gleichung für $\mathfrak{Q}$ in (7a) genüge, Integrale der Gleichung

$$(17) \quad \ldots \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{R}}{dr} + m^2 \mathfrak{R} = 0$$

sein müssen.

Zweitens ersetze man in der Bedingungsgleichung (14):

$$\frac{d^2 \mathfrak{Q}'}{dz^2} \quad \text{durch} \quad -\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{Q}'}{dr} - m^2 \mathfrak{Q}',$$

was wieder gestattet ist, da $\mathfrak{Q}'$ ein Integral der Gleichung (7a) für $\mathfrak{Q}$ sein soll. Hierdurch erhält man aus Gleichung (14):

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{S}'}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{Q}'}{dr} - m^2 \mathfrak{Q}' = 0.$$

Führt man jetzt, um die Integration vollziehen zu können, für $\mathfrak{Q}'$ eine Funktion M ein, welche derselben Gleichung wie $\mathfrak{Q}'$ genügen soll, indem man setzt:

$$(18) \quad \ldots \quad \mathfrak{Q}' = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dM}{dr},$$

so geht die Bedingungsgleichung über in die Gleichung:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\mathfrak{S}'}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dM}{dr} - m^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dM}{dr} = 0,$$

aus welcher durch zweimalige Integration nach r

$$(19) \quad \ldots \quad \mathfrak{S}' = \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dM}{dr} + m^2 M + \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{Z}_1 \lg r$$

folgt, wo $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_1$, weil $\mathfrak{S}'$ der Gleichung (7a) für $\mathfrak{S}$ genügen soll, als Integrale der Gleichung

$$(20) \quad \ldots \quad \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dz^2} + m^2 \mathfrak{Z} = 0,$$

zu bestimmen sind.

Der Definitionsgleichung für M gemäfs kann in (19)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dM}{dr}+m^2M \quad \text{durch} \quad -\frac{d^2M}{dz^2}$$

ersetzt werden. Und formt man den Ausdruck (18) für $\mathfrak{Q}'$ in entsprechender Weise um, so ergiebt sich aus (19) und (18):

$$(21)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \mathfrak{S}' = -\frac{d^2M}{dz^2}+\mathfrak{Z}_0+\mathfrak{Z}_1 \lg r, \\ \mathfrak{Q}' = -\frac{d^2M}{dz^2}-m^2M. \end{cases}$$

§. 4. In (15), (16) und (21) haben sich für $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{Q}'$ je zwei Werte ergeben. Durch Kombination derselben erhält man jetzt:

$$\mathfrak{S}' = \frac{d^2L}{dz^2}-\frac{d^2M}{dz^2}+\mathfrak{Z}_0+\mathfrak{Z}_1\lg r,$$

$$\mathfrak{Q}' = \frac{d^2L}{dz^2}+m^2L-\frac{d^2M}{dz^2}-m^2M+\mathfrak{R}_0+\mathfrak{R}_1 z.$$

und dafür:

$$\mathfrak{S}' = \frac{d^2(L-M)}{dz^2}+\mathfrak{Z}_0+\mathfrak{Z}_1\lg r,$$

$$\mathfrak{Q}' = \frac{d^2(L-M)}{dz^2}+m^2(L-M)+\mathfrak{R}_0+\mathfrak{R}_1 z.$$

Hier setzen wir noch:

$$N = L - M,$$

und erhalten:

$$(22)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \mathfrak{S}' = \frac{d^2N}{dz^2}+\mathfrak{Z}_0+\mathfrak{Z}_1\lg r, \\ \mathfrak{Q}' = \frac{d^2N}{dz^2}+m^2N+\mathfrak{R}_0+\mathfrak{R}_1 z, \end{cases}$$

wo N, weil L und M Integrale der beiden identischen Gleichungen (7a) sind, zu bestimmen ist durch die Gleichung:

$$(23)\quad \cdots\cdots \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dN}{dr}+\frac{d^2N}{dz^2}+m^2N=0.$$

Aus (13) und (22) erhalten wir jetzt für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{Q}$ die Werte:

$$\mathfrak{S} = \frac{d^2N}{dz^2}+\mathfrak{Z}_0+\mathfrak{Z}_1\lg r+\frac{R}{m^2},$$

$$\mathfrak{Q} = \frac{d^2N}{dz^2}+m^2N+\mathfrak{R}_0+\mathfrak{R}_1 z+\frac{Z}{m^2},$$

und hieraus, sowie aus (11) für s und q:

$$s = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu m^2}\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dz}+\frac{1}{r}\frac{d^3N}{dr\,dz^2}+\frac{\mathfrak{Z}_1}{r^2}+\frac{1}{m^2}\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{2}Z,$$

$$q = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu m^2}\frac{d\sigma}{dz}+\frac{d^3N}{dz^3}+m^2\frac{dN}{dz}+\mathfrak{R}_1+\frac{1}{m^2}\frac{dZ}{dz}+zR.$$

Hier kann noch

$$\frac{dN}{dz} \quad \text{durch} \quad F$$

ersetzt werden, wenn F derselben Gleichung (23) wie N genügt. Man erhält dann:

$$(24)\quad \begin{cases} s = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu m^2}\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz} + \frac{\mathfrak{Z}_1}{r^2} + \frac{1}{m^2}\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{2}Z, \\ q = -\frac{\lambda+2\mu}{\mu m^2}\frac{d\sigma}{dz} + \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F + \mathfrak{R}_1 + \frac{1}{m^2}\frac{dZ}{dz} + zR. \end{cases}$$

Es sei daran erinnert, dafs σ der Gleichung (3), F der Gleichung (23), R und $\mathfrak{R}_1$ der zweiten Gleichung (10) [resp. (17)], Z und $\mathfrak{Z}_1$ der ersten Gleichung (10) [resp. (20)] zu genügen hat.

§. 5. Um weitere Vereinfachungen der im vorigen §. erhaltenen Ausdrücke für s und q zu erzielen, sowie zur späteren Benutzung betrachten wir die Gleichung:

$$(25)\quad \ldots\ldots \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr} + \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = 0.$$

Derselben kann erstens durch die bestimmt definierte, von zwei Variablen abhängige Cylinderfunktion genügt werden:

$$(25a)\quad \ldots\ldots\ldots F = \mathfrak{F}(r, z);$$

sie kann zweitens erfüllt werden dadurch, dafs sie in die Gleichungen

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = 0$$

zerfällt wird. Dann ergiebt sich:

$$(25b)\quad \ldots\ldots F = Z' + Z'' \lg r,$$

wo Z' und Z'' der Gleichung:

$$(25b')\quad \ldots\ldots\ldots \frac{d^2Z}{dz^2} + m^2Z = 0$$

genügen.

Der Gleichung (25) kann drittens durch ganze Funktionen in Beziehung auf r oder auf z genügt werden. Man erhält so für F die beiden Darstellungen:

$$(25c)\quad \begin{cases} F = F_r = r^{2l}Z_l + r^{2l-2}Z_{l-1} + r^{2l-4}Z_{l-2} + \cdots r^2Z_1 + Z_0, \\ F = F_z = z^kR_k + z^{k-1}R_{k-1} + z^{k-2}R_{k-2} + \cdots z^2R_2 + zR_1 + R_0, \end{cases}$$

wo $Z_l, Z_{l-1}, \ldots$ Funktionen von z und $R_k, R_{k-1} \ldots$ Funktionen von r sind, welche durch die folgenden Gleichungssysteme zu bestim[illegible]

$$(26a)\quad \begin{cases} \frac{d^2 Z_l}{dz^2} + m^2 Z_l = 0, \\ \frac{d^2 Z_{l-1}}{dz^2} + m^2 Z_{l-1} = -(2l)^2 Z_l, \\ \frac{d^2 Z_{l-2}}{dz^2} + m^2 Z_{l-2} = -(2l-2)^2 Z_{l-1} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{d^2 Z_1}{dz^2} + m^2 Z_1 = -4^2 Z_2, \\ \frac{d^2 Z_0}{dz^2} + m^2 Z_0 = -2^2 Z_1; \end{cases}$$

$$(26b)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_k}{dr} + m^2 R_k = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_{k-1}}{dr} + m^2 R_{k-1} = 0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_{k-2}}{dr} + m^2 R_{k-2} = -k(k-1) R_k, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_{k-3}}{dr} + m^2 R_{k-3} = -(k-1)(k-2) R_{k-1}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_2}{dr} + m^2 R_2 = -4 \cdot 3 R_4, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_1}{dr} + m^2 R_1 = -3 \cdot 2 R_3, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_0}{dr} + m^2 R_0 = -2 \cdot 1 R_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind allgemein auflösbar. F_r und F_s in (25 enthalten $2l+2$ resp. $2k+2$ willkürliche Konstanten. Für l und sind beliebige ganze Zahlen zu setzen.

Ein Integral der Gleichung (25) ergiebt sich jetzt durch (25a, b, c in der Form:

$$(27)\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ F = \Im(r, s) + Z' + Z'' \lg r + F_r + F_s,$$

und je nach der Art der zu erfüllenden Bedingungen ist von den einzelnen pertikularen Integralen in (27) Gebrauch zu machen.

§. 6. Durch die in (27) gewonnene Darstellung des allgemeinen Integrals der Gleichung (25) lassen sich die Ausdrücke, welche sich in (24) für s und q ergeben haben, wesentlich einfacher schreiben. Denn berücksichtigt man in (27) zunächst nur das dritte Glied, setzt also

$$F = Z'' \lg r,$$

so ergiebt sich:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz} = \frac{1}{r^2}\frac{dZ''}{dz},$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = \lg r\left(\frac{d^2Z''}{dz^2} + m^2Z''\right).$$

Hier ist einmal der Klammerausdruck $= 0$, weil Z'' der Gleichung (25 b′) genügen soll, und dann genügt $\frac{dZ''}{dz}$ auch dieser Gleichung. Und da dieselbe (cf. (20)) auch durch $\mathfrak{F}_1$ erfüllt werden soll, so ist das Glied $\frac{\mathfrak{F}_1}{r^2}$ in (24) in dem Gliede $\frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz}$ enthalten und kann weggelassen werden.

Betrachtet man ferner in (27) das Glied F_1 für $k = 1$, setzt also

$$F = \frac{1}{m^2}(\varepsilon R_1 + R_0),$$

so der Faktor $\frac{1}{m^2}$ zugefügt werden durfte, so folgt mit Rücksicht darauf, dafs R_1 und R_0 nur Funktionen von r sind:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz} = \frac{1}{m^2}\frac{1}{r}\frac{dR_1}{dr},$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = \varepsilon R_1 + R_0.$$

Nun treten in den Ausdrücken (24) für s und q die Glieder

$$\frac{1}{m^2}\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} \quad \text{resp.} \quad \varepsilon R + \mathfrak{R}_1$$

auf; und da R und $\mathfrak{R}_1$ denselben Gleichungen genügen, wie R_1 und R_0 (vgl. (10), (17) und (26 b) für $k = 1$), so kann für R und $\mathfrak{R}_1$ in (24) R_1 und R_0 geschrieben werden; dann aber sind die genannten Glieder in $\frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz}$ resp. in $\frac{d^2F}{dz^2} + m^2F$ enthalten.

Für s und q in (24) erhalten wir demnach die einfacheren Ausdrücke:

$$\text{(28)} \quad \begin{cases} s = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz} + \frac{1}{2}Z, \\ q = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\frac{d\sigma}{dz} + \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F + \frac{1}{m^2}\frac{dZ}{dz}. \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken sind die folgenden 3 Integralsysteme enthalten:

$$\text{(28a)} \quad \begin{cases} s_1 = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dr}, \\ q_1 = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu m^2}\frac{d\sigma}{dz}, \\ \sigma \gtrless 0; \end{cases} \qquad \text{(28b)} \quad \begin{cases} s_2 = \frac{1}{r}\frac{d^2F}{dr\,dz}, \\ q_2 = \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F, \\ \sigma = 0; \end{cases}$$

$$(28c)\quad \begin{cases} s_3 = \frac{1}{2} Z, \\ q_3 = \frac{1}{m^2} \frac{dZ}{dz}, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

Hier ist für F die in (27) gewonnene Darstellung des Inte
Gleichung (25) und für σ derselbe Ausdruck zu setzen, we
geschrieben wird

$$\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} m^2 \quad \text{für} \quad m^2.$$

Z genügt der Gleichung (25b').

Dafs jedes der drei Integralsysteme (28 a, b, c) für
Gleichungen (2) und (2a) genügt, ist mit Rücksicht auf (3) u
leicht zu übersehen.

§. 7. Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich
sprechenden für das Gleichgewicht des Cylinders für $m = 0$
sind diejenigen Formeln nicht brauchbar, welche den Fakto
Nenner enthalten. Und ersetzt man in (28b) $\frac{dF}{dz}$ durch G, s
sich für das Gleichgewicht des Cylinders das folgende We
das mit s_1 und q_1 bezeichnet werden möge:

$$(29)\quad \begin{cases} s_1 = -\frac{1}{r} \frac{dG}{dr}, \\ q_1 = \frac{dG}{dz}, \\ \sigma = 0. \end{cases}$$

s_1 und q_1 sind von der Volumenänderung σ unabhängig.
von σ unabhängigen Glieder in s und q zu erhalten, gehe
den Differentialgleichungen (2) und (2a) zurück. Für $m =$
dieselben:

$$(30)\quad \begin{cases} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{dr^2 s}{dr} + \frac{dr^2 s}{dz^2} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} r \frac{d\sigma}{dr}, \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dq}{dr} + \frac{d^2 q}{dz^2} = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{d\sigma}{dz}; \end{cases}$$

$$(30a)\quad \sigma = \frac{1}{r} \frac{dr^2 s}{dr} + \frac{dq}{dz}.$$

Hierzu kommt die Gleichung für σ:

$$(31)\quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\sigma}{dr} + \frac{d^2 \sigma}{dz^2} = 0.$$

Da die Gleichung für σ jetzt mit der linken Seite de
Gleichung (30) übereinstimmt, so kann man zur Integra
Identität

$$(32) \quad \ldots\ldots \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dz\sigma}{dr}+\frac{d^2z\sigma}{dz^2}=2\frac{d\sigma}{dz}$$

benutzen, welche leicht auf die Gleichung (31) zurückgeführt werden kann. Vergleicht man mit dieser identischen Gleichung die zweite Gleichung (30), so ergiebt sich

$$(33) \quad \ldots\ldots q=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\sigma+q'$$

wo q' der Gleichung (31) zu genügen hat und dem Ausdruck $-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\sigma$ hinzugefügt ist, um die Bedingungsgleichung (30a) erfüllen zu können.

Um die zweite Gleichung (30) in ähnlicher Weise behandeln zu können, setzen wir

$$(34) \quad \ldots\ldots s=\frac{1}{r}\frac{ds'}{dr} \quad \text{und} \quad \sigma=\frac{dH}{dz},$$

wo H derselben Gleichung wie σ genügen soll und s' eine neue zu bestimmende Funktion ist. Dadurch geht die zweite Gleichung (30) durch Integration nach r über in die Gleichung

$$(35) \quad \ldots\ldots \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds'}{dr}+\frac{d^2s'}{dz^2}=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{dH}{dz}.$$

Eine von z abhängige Funktion ist rechts nicht beigefügt, weil diese zu Gliedern in s und q führen würde, welche von σ unabhängig wären, während hier nur solche Werte für s und q in Betracht kommen, welche von σ abhängen.

Wie oben erhält man daher für s':

$$(36) \quad \ldots\ldots s'=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}zH+s'',$$

wo s'' der Gleichung (31) zu genügen hat.

Aus (33), (34) und (36) erhält man jetzt, wenn man σ auch in dem Ausdrucke (33) für q durch $\frac{dH}{dz}$ ersetzt:

$$(37) \quad \ldots\ldots \begin{cases} s=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\frac{z}{r}\frac{dH}{dr}+\frac{1}{r}\frac{ds''}{dr}, \\ q=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}z\frac{dH}{dz}+q', \\ \sigma=\frac{dH}{dz}. \end{cases}$$

Die Funktionen s'' und q' sind nun so zu bestimmen, dafs der Bedingungsgleichung (30a) genügt wird. Diese geht durch (37) in folgende Gleichung über:

$$\frac{dH}{dz}=-\frac{\lambda+\mu}{2\mu}\left(\frac{z}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dH}{dr}+z\frac{d^2H}{dz^2}+\frac{dH}{dz}\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds''}{dr}+\frac{dq'}{dz},$$

und weil H der Gleichung (31) genügt, so nimmt die Bedingu gleichung die einfachere Form an

$$(38) \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds''}{dr} + \frac{dq'}{dz} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu}\frac{dH}{dz}.$$

Da nur Werte für s'' und q' aufzusuchen sind, welche von H hängen, so kann der Bedingungsgleichung (38) dadurch genügt we dafs einmal s'', dann q' gleich Null gesetzt wird. Dann läfst die Integration ausführen. Dabei sind aus dem oben angefül Grunde Integrationskonstanten nicht zuzufügen.

Es sei zunächst $s'' = 0$, dann folgt aus (38)

$$(39) \quad q' = \frac{\lambda + 3\mu}{3\mu} H.$$

Es sei zweitens $q' = 0$, und es werde in (38) gesetzt

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds''}{dr} = -\frac{d^2s''}{dz^2},$$

was gestattet ist, da s'' der Gleichung (31) genügt, und es w für H eine Funktion S, welche derselben Differentialgleichung genügt, wie H, eingeführt durch

$$(40) \quad H = \frac{dS}{dz},$$

dann geht (38) über in die Gleichung

$$-\frac{d^2s''}{dz^2} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu}\frac{d^2S}{dz^2},$$

aus welcher (vergl. obige Bemerkung) folgt

$$(41) \quad s'' = -\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} S.$$

Somit ergeben sich aus (37) die folgenden beiden Wertsyst indem einmal $s'' = 0$ und für q' der Wert (39), dann $q' = 0$ für H und s'' die Werte (40) und (41) gesetzt werden:

$$(42a) \quad \begin{cases} s_2 = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu}\frac{z}{r}\frac{dH}{dr}, \\ q_2 = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} z\frac{dH}{dz} + \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} H, \\ \sigma = \frac{dH}{dz}; \end{cases}$$

$$(42b) \quad \begin{cases} s_3 = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu}\frac{z}{r}\frac{d^2S}{dr\,dz} - \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{dS}{dr}, \\ q_3 = -\frac{\lambda + \mu}{2\mu} z\frac{d^2S}{dz^2}, \\ \sigma = \frac{d^2S}{dz^2}. \end{cases}$$

Diese Wertsysteme genügen, wie man leicht übersieht, den Gleichungen (30) und (30a).

Es haben sich für das Gleichgewicht des Kreiscylinders die drei Integralsysteme (29), (42a) und (42b) ergeben. Die darin auftretenden Funktionen G, H und S genügen sämtlich der Gleichung (25), wo $m = 0$ zu setzen ist. Diese Gleichung hat die in der Einleitung erwähnte Form. Für jede der drei Funktionen G, H, S ist ein Ausdruck von der Form (27) zu setzen mit anderen, durch die Anfangs- und Grenzbedingungen zu bestimmenden Konstanten. Das Glied $J(r, s)$ in dem Ausdrucke (27) führt zu transcendenten Werten für die genannten Funktionen, welche den in dem Ausdrucke für s bei Thomae (Verhandl. der Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig. Math. Physische Klasse 1886 S. 197) auftretenden transcendenten Funktionen entsprechen. Die Glieder F_r und F_s in (27) führen zu ganzen Funktionen beliebig hohen Grades in Beziehung auf r und s.

Anhang.

Die in der Einleitung erwähnte, bei Thomae (a. a. O. S. 400) auftretende Differentialgleichung 4ter Ordnung ist

$$\frac{d^2\tau}{d\lg r^2} + 2\frac{d\tau}{d\lg r} - \varepsilon^2 r^2 \tau = 0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\tau = \frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2t}{d\lg r^2} + 2\frac{dt}{d\lg r}\right) - \varepsilon^2 t,$$

Mit Hilfe der ersten der im §. 1. genannten Identäten nimmt die Differentialgleichung die Form

$$(43) \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2\tau}{dr} - \varepsilon^2\tau = 0,$$

an, wo

$$(43a) \quad \tau = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2t}{dr} - \varepsilon^2 t = 0.$$

ε ist eine gegebene Konstante, t die zu bestimmende Funktion von r.

Es soll gezeigt werden, dafs sich die Gleichung (43) durch 2 Besselsche Funktionen integrieren läfst. Dazu werde gesetzt

$$(44) \quad \tau = \frac{1}{r}\frac{dJ}{dr},$$

dann geht die Gleichung (43) über in

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dJ}{dr} - \varepsilon^2\frac{dJ}{dr} = 0.$$

Durch Integration nach r folgt aus dieser Gleichung

$$(45) \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dJ}{dr} - \varepsilon^2 J = 0.$$

Eine Integrationskonstante ist nicht hinzugefügt, weil diese zu konstanten Gliede in dem für J zu gewinnenden Ausdrucke das aus dem Ausdrucke (44) für τ herausfällt.

J ist durch die Gleichung (45) als Besselsche Funktion d Nun führe ich für t zwei neue Funktionen G und H ein, ich setze

$$(46) \quad t = G + H;$$

und es möge H denjenigen Wert vorstellen, den t für $\tau = 0$ an Dann besteht zunächst für H die Gleichung

$$(47) \quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dr^2H}{dr} - \varepsilon^2 H = 0.$$

Die Gleichung (43a) aber geht durch (44), (46) und (47)

$$\frac{1}{r}\frac{dJ}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2G}{dr} - \varepsilon^2 G.$$

Setzt man hier

$$(47a) \quad G = \frac{1}{r}\frac{dG'}{dr},$$

so geht die Gleichung durch Integration nach r über in die f einfachere

$$J = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dG'}{dr} - \varepsilon^2 G'.$$

Eine Integrationskonstante brauchte aus dem genannten nicht hinzugefügt zu werden. Diese Gleichung hat das von hängige Integral

$$(48) \quad G' = \frac{1}{2\varepsilon^2}r\frac{dJ}{dr}.$$

Demnach ist G' durch eine Besselsche Funktion definier Gleichung (47) aber wird auf die Besselsche Differentialgleichu zurückgeführt, indem man eine Funktion Y einführt durch

$$(49) \quad H = \frac{1}{r}\frac{dY}{dr}.$$

Durch diesen Wert für H wird die Gleichung (47) erfüllt, w der Gleichung (45) genügt.

Aus (47a) erhält man durch (48)

$$G = \frac{1}{2\varepsilon^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dJ}{dr}$$

und hieraus wegen Gleichung (45)

$$G = \frac{J}{2}.$$

Durch diesen Wert für G und den in (49) für H erhaltenen nimmt jetzt der Ausdruck (46) für t die Form an

$$(50) \ldots\ldots\ldots\ldots t = \frac{J}{2} + \frac{1}{r}\frac{dY}{dr},$$

wo J und Y Besselsche Funktionen sind, welche der Gleichung (45) genügen.

Der für t gewonnene Ausdruck (50) ist das allgemeine Integral der obigen Differentialgleichung 4ter Ordnung, weil er 4 willkürliche Konstanten enthält, nämlich 2 in J und 2 in Y.

Verallgemeinerung eines Satzes über Teileranzahlen.

Von J. Schröder in Hamburg.

Sind $f(\varrho)$ und $F(\varrho)$ zwei durch die Beziehung:

$$(1) \ldots\ldots\ldots F(k) = \sum_{1}^{[k]}{}_{\varrho} f(\varrho)$$

verknüpfte zahlentheoretische Funktionen, so besteht bekanntlich die Dirichlet'sche Transformationsgleichung*):

$$(2) \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] f(\varrho) = -[\sqrt{n}]\cdot F([\sqrt{n}]) + \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right] f(\varrho) + \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho} F\left(\left[\frac{n}{\varrho}\right]\right).$$

Hierin möge n eine beliebig gewählte positive ganze Zahl sein und unter $\left[\frac{n}{\varrho}\right]$ die gröfste in $\frac{n}{\varrho}$ enthaltene positive ganze Zahl verstanden werden.

Für die beliebige Funktion $f(\varrho)$ wollen wir den Ausdruck:

$$(3) \ldots\ldots\ldots f(\varrho) = \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-1}$$

einführen, indem wir zunächst r als positiv und ganzzahlig voraussetzen wollen. Dann erhalten wir auf Grund der Gleichung (2), indem wir beachten, dafs

$$(4) \ldots\ldots\ldots F(k) = \sum_{1}^{[k]}{}_{\varrho'}\left[\frac{n}{\varrho'}\right]^{r-1}$$

ist, die folgende Gleichung:

$$(5) \quad \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r} = -[\sqrt{n}]\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-1} + \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r} + \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\sum_{1}^{\left[\frac{n}{\varrho}\right]}{}_{\varrho'}\left[\frac{n}{\varrho'}\right]^{r-1}.$$

*) Vgl. Bachmann, Analytische Zahlentheorie p. 406, Glg. 27.

Hierin läfst sich nun das dritte Glied der rechten Seite mit H genau derselben Überlegung, durch welche ich pag. 186 dieses Bar die Summe $\sum_1^n{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right]$ transformiert habe, passend umformen. S man zur Abkürzung:

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \sum_1^n{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right]^\alpha = T_\alpha(n),$$

so wird:

$$\sum_1^{\left[\frac{n}{\varrho}\right]}{}' \left[\frac{n}{\varrho'}\right]^{r-1} = T_{r-1}(n) - \sum_1^{\varrho-1}{}' \varrho'^{r-1} \left(\left[\frac{n}{\varrho'}\right] - \left[\frac{n}{\varrho'+1}\right]\right)$$

oder, wie sofort ersichtlich ist:

$$(7) \sum_1^{\left[\frac{n}{\varrho}\right]}{}' \left[\frac{n}{\varrho'}\right]^{r-1} = T_{r-1}(n) + \varrho^{r-1}\left[\frac{n}{\varrho}\right] - \sum_1^{\varrho}{}' (\varrho'^{r-1} - (\varrho'-1)^{r-1})\left[\right.$$

folglich geht (5) über in:

$$(8) \quad T_r(n) = -[\sqrt{n}] \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-1} + \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r + [\sqrt{n}]\, T_{r-1}(n)$$
$$- \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \sum_1^{\varrho}{}' (\varrho'^{r-1} - (\varrho'-1)^{r-1}) \left[\frac{n}{\varrho}\right] + \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \varrho^{r-1} \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Da nun:

$$(9) \quad \ldots\ldots \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \sum_1^{\varrho}{}' (\varrho'^{r-1} - (\varrho'-1)^{r-1}) \left[\frac{n}{\varrho}\right]$$
$$= \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' ([\sqrt{n}] - \varrho + 1)(\varrho^{r-1} - (\varrho-1)^{r-1}) \left[\frac{n}{\varrho}\right]$$

ist, so ergiebt sich:

$$(10) \quad T_r(n) - [\sqrt{n}]\, T_{r-1}(n) = -[\sqrt{n}] \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-1} + \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r$$
$$- \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \{[\sqrt{n}]\,(\varrho^{r-1} - (\varrho-1)^{r-1}) - (\varrho^r - (\varrho-1)^r)\} \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Denkt man sich nun die entsprechende Formel für $T_{r-1} - [\sqrt{n}]\, T_{r-2}$ $\ldots\ldots$, $T_2(n) - [\sqrt{n}]\, T_1(n)$ gebildet und endlich noch die bekannte For für $T_1(n)$, nämlich:

$$(11) \quad \ldots\ldots T_1(n) = -[\sqrt{n}]^2 + 2 \sum_1^{[\sqrt{n}]}{}' \left[\frac{n}{\varrho}\right],$$

hinzugezogen, der man auch folgende Form geben kann:

$$(11a)\quad \ldots\ldots T_1(n) = -[\sqrt{n}]^2 + \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right] - \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \{[\sqrt{n}](\varrho^0 - (\varrho-1)^0) - (\varrho^1 - (\varrho-1)^1)\}\left[\frac{n}{\varrho}\right],$$

so entsteht das folgende Gleichungssystem:

$$(12)\quad \begin{cases} T_r(n) - [\sqrt{n}]\, T_{r-1}(n) = -[\sqrt{n}] \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-1} + \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r \\ \qquad - \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \{[\sqrt{n}](\varrho^{r-1} - (\varrho-1)^{r-1}) - (\varrho^r - (\varrho-1)^r\}\left[\frac{n}{\varrho}\right], \\ T_{r-1}(n) - [\sqrt{n}]\, T_{r-2}(n) = -[\sqrt{n}] \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-2} + \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{r-1} \\ \qquad - \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \{[\sqrt{n}](\varrho^{r-2} - (\varrho-1)^{r-2}) - (\varrho^{r-1} - (\varrho-1)^{r-1})\}\left[\frac{n}{\varrho}\right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_2(n) - [\sqrt{n}]\, T_1(n) = -[\sqrt{n}] \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^1 + \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^2 \\ \qquad - \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \{[\sqrt{n}](\varrho^1 - (\varrho-1)^1) - (\varrho^2 - (\varrho-1)^2)\}\left[\frac{n}{\varrho}\right], \\ T_1(n) = -[\sqrt{n}]^2 + \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^1 \\ \qquad - \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \{[\sqrt{n}](\varrho^0 - (\varrho-1)^0) - (\varrho^1 - (\varrho-1)^1)\}\left[\frac{n}{\varrho}\right]. \end{cases}$$

Addiert man diese r Gleichungen, nachdem die zweite mit $[\sqrt{n}]$, die dritte mit $[\sqrt{n}]^2$, ..., die $r$te mit $[\sqrt{n}]^{r-1}$ multipliziert ist, so ergiebt sich die folgende Formel:

$$(13)\ldots T_r(n) = \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r + \sum_1^{[\sqrt{n}]} (\varrho^r - (\varrho-1)^r)\left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]^{r+1}.$$

Diese Formel ist die direkte Verallgemeinerung der für die Anzahl aller Teiler der ersten n positiven ganzen Zahlen bestehenden Relation:

$$T_1(n) = 2 \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right] - [\sqrt{n}]^2,$$

welche dem besonderen Falle: $r = 1$ entspricht.

Auch für negative Werte des Exponenten r kann man eine Gleichung (13) analoge Beziehung für $\sum_1^n \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{-r} = T_{-r}(n)$ herstel wenn man die Annahme macht:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots f(\varrho) = \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{-r},$$

wo jetzt r eine positive ganze Zahl bedeutet. Führt man die Re nung dann in ganz analoger Weise durch, so ergiebt sich zunäc die folgende Rekursionsformel:

$$(15) \quad T_{-r}(n) - \frac{1}{[\sqrt{n}]} T_{-(r-1)}(n) = \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{-r} - \frac{1}{[\sqrt{n}]} \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{-(r-}$$
$$+ \frac{n}{[\sqrt{n}]}([\sqrt{n}] - 1) + \frac{1}{[\sqrt{n}]} \sum_2^{[\sqrt{n}]} \{[\sqrt{n}](\varrho^{-r} - (\varrho - 1)$$
$$- (\varrho^{-(r-1)} - (\varrho - 1)^{-(r-1)})\} \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Das Endresultat für $T_{-r}(n)$ selbst lautet:

$$(16) \quad T_{-r}(n) = \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^{-r} + \sum_2^{[\sqrt{n}]} (\varrho^{-r} - (\varrho - 1)^{-r}) \left[\frac{n}{\varrho}\right] + n - [\sqrt{n}]^{-r}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem unter (13) aufgeführ Ergebnis, so scheinen beide der Form nach nicht übereinzustimm Sondert man indessen in (13) das erste Glied der zweiten Sum auf der rechten Seite, welches dem Werte $\varrho = 1$ entspricht, so wird:

$$(17) \quad T_r(n) = \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r + \sum_2^{[\sqrt{n}]} (\varrho^r - (\varrho - 1)^r) \left[\frac{n}{\varrho}\right] + n - [\sqrt{n}]^{r+1},$$

und jetzt erkennt man, dafs aus (17) in der That die Gleichung (durch Vertauschung von $(+ r)$ mit $(- r)$ entsteht.

Es ist also allgemein für jedes ganzzahlige, posit: oder negative r:

$$(I) \quad \sum_1^n \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r = \sum_1^{[\sqrt{n}]} \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right]^r + \sum_2^{[\sqrt{n}]} (\varrho^r - (\varrho - 1)^r) \left[\frac{n}{\varrho}\right] + n - [\sqrt{n}]^{r+1}$$

*) Wie mir Herr Busche mitteilt, kann das Theorem (I) auf kürzei Wege als Spezialfall einer in seiner Abhandlung „Über gröfste Ganze" (Cre Journal, Bd. 103, p. 118 ff.) abgeleiteten sehr allgemeinen Gleichung gewon werden. Die betr. Gleichung ist dort pag. 119 unter (a) angegeben.

Zum Schluſs will ich noch aus der Dirichlet'schen Formel eine Beziehung für die Summe der Teiler der ersten n positiven ganzen Zahlen herleiten, welche nicht bekannt sein dürfte. Die genannte Summe hat zunächst den Wert:

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad S(n) = \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\, \varrho \left[\frac{n}{\varrho}\right].$$

Setzen wir nun:

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} f(\varrho) = \varrho \quad \text{und dementsprechend:} \\ F(k) = \sum_{1}^{k}{}_{\varrho}\, f(\varrho) = \frac{k(k+1)}{2}, \end{cases}$$

so findet man ohne Mühe:

$$S(n) = -[\sqrt{n}]\frac{[\sqrt{n}]([\sqrt{n}]+1)}{2} + \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\, \varrho\left[\frac{n}{\varrho}\right] + \sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right]\frac{\left(\left[\frac{n}{\varrho}\right]+1\right)}{2}.$$

oder:

$$(II) \quad \sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\, \varrho\left[\frac{n}{\varrho}\right] = \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}\left[\frac{n}{\varrho}\right]^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{[\sqrt{n}]}{}_{\varrho}(2\varrho+1)\left[\frac{n}{\varrho}\right] - \tfrac{1}{2}[\sqrt{n}]([\sqrt{n}]+1).$$

Der Nutzen, den diese Formel bei der Berechnung der Summe der Teiler der ersten n positiven ganzen Zahlen gewährt, besteht darin, daſs die Summationen rechter Hand nur von 1 bis $[\sqrt{n}]$ laufen. Sie steht somit auf derselben Stufe wie die unter (11) genannte Formel für die Anzahl aller Teiler der ersten n positiven ganzen Zahlen.

Ein zahlentheoretischer Satz.

Von H. Schubert in Hamburg.

Gelegentlich der Behandlung gewisser Abzählungsfragen fand ich einen auf ganze Zahlen bezüglichen Satz, der neu sein dürfte, und dessen zahlentheoretischer Beweis mir nicht gelungen ist. Um diesen Satz kurz aussprechen zu können, schicke ich folgende Definitionen voran:

Ist a eine positive ganze Zahl, q eine positive ganze oder gebrochene Zahl, die gröſser als 1 ist, so bedeute das Symbol:

$$F(a \cdot q),$$

falls das Produkt $a \cdot q$ eine ganze Zahl wird, eben diese ganze Zahl, und falls das Produkt $a \cdot q$ eine gebrochene Zahl wird, die zu ihr nächst gröſsere ganze Zahl.

Ferner verstehe man unter „Oberreihe“ mit dem Anfan x_1 und dem konstanten Quotienten q diejenige Reihe von Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ad inf., welche der Bedingung

$$x_{i+1} = F(x_i \cdot q)$$

gehorcht. Beispielsweise heifst die Oberreihe mit dem A glied 1 und dem konstanten Quotienten $\frac{3}{2}$:

1, 2, 3, 5, 8, 12, 18, 27, 41, 62, 93, 150, ...,

ferner die Oberreihe mit dem Anfangsglied 19 und dem kon Quotienten $\frac{6}{5}$:

19, 23, 28, 34, 41, 50, 60, 72, 87, ...

Hiernach läfst sich mein Satz folgendermafsen aussprech

Nimmt man die sämtlichen Glieder einer arithmet Reihe mit dem Anfangsglied 1 und der konstanten Dif d zu Anfangsgliedern von Oberreihen, die sämtlic konstanten Quotienten $\frac{d}{d-1}$ haben, so kommt in d entstehenden Oberreihen jede ganze Zahl vor, jede auch nur einmal.

In den folgenden beiden Beispielen sind die Zahlen u wirklich geschrieben, die gröfseren durch Punkte vertreten.

1) $d = 4$, also $q = \frac{4}{3}$, ergiebt:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 15, 20, 27, 36, 48, ...
5, 7, 10, 14, 19, 26, 35, 47, ...
9, 12, 16, 22, 30, 40, 54, ...
13, 18, 24, 32, 43, 58, ...
17, 23, 31, 42, 56, ...
21, 28, 38, 51, ...
25, 34, 46, ...
29, 39, 52, ...
33, 44, 59, ...
37, 50, ...
41, 55, ...
45, ...
49, ...
53, ...
57, ...
. . . .
. . . .
. . . .

2) $d = 6$, also $q = \frac{6}{5}$, ergiebt:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 40, 48, 58, ...
7, 9, 11, 14, 17, 21, 26, 32, 39, 47, 57, ...
13, 16, 20, 24, 29, 35, 42, 51, ...
19, 23, 28, 34, 41, 50, ...
25, 30, 36, 44, 53, ...
31, 38, 46, 56, ...
37, 45, 54, ...
43, 52, ...
49, 59, ...
55, ...
. . . .
. . . .
. . . .

Beweis des vorstehenden Satzes von Herrn Schubert.

Von E. Busche in Bergedorf.

Bei dem Beweise des von Herrn Schubert aufgestellten Satzes benutze ich die folgende Bezeichnung. Mit dem Zeichen $[\alpha]$ möge die ganze Zahl bezeichnet werden, die durch die Ungleichheiten

$$\alpha \geqq [\alpha] < \alpha + 1$$

definiert ist.

Wenn dann a' und d ganze positive Zahlen sind und

(1) . . . . . $\left[a' \frac{d}{d-1}\right] = a$

gesetzt wird, so ist a von einer der Formen kd, $kd+2$, $kd+3$ . . . $kd+d-1$.

Denn setzt man

$$a' = k(d-1) + \lambda, \quad 0 \geqq \lambda < d-1,$$

so ist

$$a = \left[(k(d-1)+\lambda)\frac{d}{d-1}\right] = kd + \left[\frac{\lambda d}{d-1}\right] = kd + \lambda + \left[\frac{\lambda}{d-1}\right].$$

Ist nun $\lambda = 0$, so ist $a = kd$, ist $\lambda > 0$, so ist $a = kd + \lambda + 1$, so dafs a jeden Rest in Bezug auf den Modul d haben kann, ausgenommen den Rest 1.

Zu jeder ganzen positiven Zahl a' gehört hiernach eine eindeutig bestimmte ganze Zahl $a > a'$; zu jeder ganzen positiven Zahl a, die nicht $\equiv 1 \pmod{d}$ ist, giebt es eine eindeutig bestimmte ganze positive Zahl $a' < a$. Ist $a \equiv 1 \pmod{d}$, so ist dagegen eine zu a gehörige ganze Zahl a' nicht vorhanden.

Nun möge die Zahl, die aus der Zahl $kd + 1$ durch ϱ wiederholte Anwendung der in dem Schubertschen Satze geschriebenen Operation entsteht, durch (k, ϱ) bezeichnet wer Dann ist also zu zeigen, dafs eine beliebige ganze positive Zal gleich einer Zahl (k, ϱ) ist.

Ist $a = kd + 1$, so ist $a = (k, 0)$.

Ist a nicht $\equiv 1 \pmod{d}$, so bestimme man die nach Gleichung zu a gehörige Zahl a'. Ist dann $a' = kd + 1$, so ist $a = (k, 1$

Ist a' nicht $\equiv 1 \pmod{d}$, so bestimme man a'' so, dafs

$$\left[a'' \frac{d}{d-1}\right] = a'$$

ist. Ist dann $a'' = kd + 1$, so ist $a = (k, 2)$. Ist a'' nicht $\equiv 1$ (mo so fahre man in der angegebenen Weise fort, bis man zu e Zahl $a^{(\varrho)}$ gelangt, die gleich $kd + 1$ ist. Dann ist $a = (k, \varrho)$.

Da die Zahlen $a, a', a'', \ldots a^{(\varrho)}$ eine abnehmende Reihe von gar positiven Zahlen bilden, so mufs man endlich zu einer Zahl $a^{(\varrho)} \equiv 1$ (mc kommen, denn wenn die Reihe nicht schon vorher abbricht, so fi sie schliefslich auf die Zahl 1.

Damit ist bewiesen, dafs jede ganze positive Zahl in dem Herrn Schubert angegebenen Schema wirklich vorkommt und z an einer eindeutig bestimmten Stelle, also auch nur ein einziges

---

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1894/5.

Zusammengestellt vom Jahrverwalter Dr. A. Köpcke.

Versammlung am 13. Januar 1894.

(Nachtrag zum vorigen Jahresbericht.)

Herr Dr. Oppenheimer trägt über eine Kegelschnittkonfigura vor; Herr Dr. Busche spricht sodann über die Anzahl aller Te der Zahlen von 1 bis n. Der Inhalt beider Vorträge ist im vori Hefte der Mitteilungen der Gesellschaft (Band III, Heft 4) öffentlicht.

Hauptversammlung am 5. Februar 1894.

Der Jahrverwalter Herr Dr. P. Jaerisch berichtet über Thätigkeit der Gesellschaft im Laufe des 204. Jahres ihres Besteh sowie über den Kassenbestand. Die Gesellschaft besteht zur aus 12 Ehrenmitgliedern, 50 einheimischen und 18 auswärtigen

gliedern. Der erste „Nachtrag“ zum Katalog der auf Hamburger Bibliotheken vorhandenen mathematischen Litteratur ist im Laufe des Winters ausgearbeitet und vor kurzem an die Mitglieder und an Institute versandt.

Bei der statutenmäfsig vorzunehmenden Wahl eines Adjunkten wird Herr Prof. H. Ahlborn gewählt. Der Vorstand besteht demnach für die Dauer des folgenden Jahres aus den Herren Dr. A. Köpcke, Jahrverwalter, Ingenieur A. Hübner, Mitjahrverwalter, und Prof. H. Ahlborn, Adjunkt.

Nach der Versammlung findet unter Beteiligung einer gröfseren Anzahl von Gästen das übliche Festessen mit dem Snuten- und Poten-Gange statt.

Versammlung am 10. März 1894.

Der Jahrverwalter gedenkt in warmen Worten des am 11. Februar erfolgten Todes des Herrn Oberingenieurs a. D. Dr. C. W. Plath; der Verstorbene gehörte seit 1852 zu den eifrigsten Mitgliedern der Gesellschaft und bekundete seine Anhänglichkeit an dieselbe bis in die Zeiten seines langen Krankenlagers; die Anwesenden ehren sein Andenken durch Erheben von den Sitzen. — Herr Dr. Detels wird als Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Darauf hält Herr F. Bertheau einen Vortrag „Über die Fälle, in denen die Riccatische Differentialgleichung integrierbar ist“. Es wird gezeigt, dafs die Riccatische Gleichung ganz allgemein durch Besselsche Funktionen, für gewisse Exponenten aber nur darum durch elementare Funktionen integrierbar ist, weil für eben dieselben Exponenten die Besselschen Funktionen durch trigonometrische Funktionen ausdrückbar werden. — Hierauf hält Herr Prof. Ahlborn einen Vortrag „Zum Pellschen Problem“. Der Vortragende zeigt, dafs die Aufgabe, drei auf einander folgende ganze Zahlen zu finden, die als Seitenlängen eines Dreiecks gewählt einen rationalen Inhalt dieses Dreiecks ergeben, auf die Pellsche Gleichung führt, deren Konstante = 3 ist.

Versammlung am 14. April 1894.

Herr Geheimrat Prof. Dr. Neumayer trägt vor über den gegenwärtigen Stand der Schwerebestimmungen, sowie über Gravitations- und erdmagnetische Anomalien. Es wird darauf hingewiesen, dafs man in neuerer Zeit grofse Sorgfalt auf relative Bestimmungen der Länge des einfachen Sekundenpendels oder der Schwerkraftskonstanten verwandt hat. Sehr fruchtbringend haben sich in dieser Hinsicht die Bemühungen des k. k. Oberstlieutenants v. Sterneck vom militär-

geographischen Institut in Wien erwiesen. Erst durch die erstaunliche Einfachheit und den kompendiösen Charakter des Sterneckschen Pendelapparates wurde es überhaupt möglich, lokale Anomalien der Schwerkraft zu untersuchen. Zum Schlusse weist der Vortragende darauf hin, dafs man mit den jetzigen Mitteln auch in Paralleluntersuchungen über die Anomalien der erdmagnetischen und der Schwere-Konstanten eintreten könne. — Herr Prof. Ahlborn bespricht sodann die Behandlung einiger elementarer Gesetze und Aufgaben aus der Optik als Beispiele für den Unterricht in der Differentialrechnung. Herr Dr. Köpcke weist im Anschlufs hieran ein Drahtgestell vor, das direkt in das Wasser gehängt eine bequeme induktive Auffindung des Brechungsgesetzes gestattet. — Herr Prof. Ahlborn zeigt, dafs derjenige Punkt einer Geraden, von dem aus eine zu dieser Geraden senkrecht gerichtete Strecke unter dem gröfsten Winkel erscheint, bei einer Parallelverschiebung der Geraden eine gleichseitige Hyperbel durchläuft.

Versammlung am 12. Mai 1894.

Herr Dr. J. Schröder hält einen Vortrag über die Abhängigkeit des elliptischen Integrals erster Gattung und seiner Perioden von den Invarianten der Grundform. Für die homogene biquadratische Binärform werden drei kanonische Formen hergeleitet; bildet man dann mit den Quadratwurzeln aus diesen drei kanonischen Formen die elliptischen Integrale erster Gattung und macht deren Differentiale wieder unhomogen, so erhält man der Reihe nach die drei von Riemann, von Weierstrafs und von Legendre benutzten Normalformen. — Herr Dr. Oppenheimer zeigt hierauf in einer Mitteilung über die Konstruktion algebraischer Kurven aus der Maximalzahl ihrer von einander unabhängigen Doppelpunkte, wie eine früher von ihm für Kurven sechster Ordnung entwickelte Methode für Kurven höherer Ordnung verwendbar ist.

Versammlung am 9. Juni 1894.

Herr Prof. Dr. Schubert hält einen Vortrag über Verallgemeinerungen des Begriffs der projektiven Beziehung. Es wird zunächst die Möglichkeit angezeigt, welche die ursprüngliche Definition der projektiven Beziehung, derzufolge „auf zwei Grundgebilden erster Stufe die Punkte algebraisch ein- und eindeutig einander zugeordnet sein sollen", zu Spezialisierungen und Verallgemeinerungen bietet. Es ergeben sich eine Spezialisierungsrichtung, wenn man nämlich die Beziehung sich nur auf einem Grundgebilde abspielen läfst, und für

Verallgemeinerungsrichtungen. Es wird dann für eine Reihe von Methoden und Theoremen der modernen Geometrie ausführlich dargelegt, welcher dieser sechs Untersuchungsrichtungen, sei es einzeln, sei es zu mehreren verbunden, sie sich bedienen. — Herr Dr. Köpcke weist die Mitglieder der Gesellschaft auf die in den „Hamburger Nachrichten" erschienenen Artikel von Herrn Dr. Rüdiger über den Schreibmeister Tangermann hin, fordert zur Lösung der am Schlusse dieser Arbeit erwähnten Aufgabe auf und hält namentlich eine Nachforschung nach der Methode für erwünscht, die Tangermann selbst zur Lösung seiner Aufgabe angewandt haben könnte; eine Vermutung in letzterer Beziehung ist bereits schriftlich von Herrn Direktor Rümker eingegangen.

Versammlung am 8. September 1894.

Auf Anregung des Vorstandes wird beschlossen, die November-Sitzung mit einer Reihe von Vorträgen kleineren Umfanges auszufüllen. — Da der Mitjahrverwalter Herr Ingenieur Hübner nach Bielefeld übersiedelt, mufs Herr Prof. Ahlborn dessen Amt übernehmen, und es wird die Neuwahl eines Adjunkten nötig; gewählt wird Herr Ingenieur J. H. Sieveking. Bei Gelegenheit dieser Wahl wird eine von Herrn Prof. Dr. Schubert in der Hauptversammlung angeregte Neuordnung des Verfahrens bei der Vorstandswahl besprochen und ein Ausschufs zur Vorberatung dieser Frage gewählt; der Ausschufs besteht aus dem derzeitigen Vorstande und den Herren Prof. Dr. Schubert und Dr. Repsold. — Alsdann trägt Herr Dr. E. Busche über das Clebschsche Sechseck vor. Der Begriff und die Haupteigenschaften desselben werden hergeleitet und es wird gezeigt, dafs z. B das regelmäfsige Fünfeck mit seinem Mittelpunkte ein besonderes Clebschsches Sechseck ist. Zum Schlufs wird nachgewiesen, wie sich aus den 15 Seiten eines Clebschschen Sechsecks noch 75 andere Clebschsche Sechsecke ableiten lassen.

Versammlung am 13. Oktober 1894.

Herr Wasserbauinspektor Bubendey trägt vor über Flutstatistik durch Zählkarten. Um das reiche Beobachtungsmaterial über die Flutwelle der Elbe möglichst zu verwerten, hat sich das Zählkartensystem, wie es bei der Bevölkerungsstatistik längst im Gebrauch ist, sehr gut bewährt. Das Individuum der Flutstatistik ist die in die Elbe eintretende Flutwelle. Jeder Welle ist eine Karte zugeordnet, die für Cuxhaven, Hamburg, Bunthaus und für die Flutgrenze alle beobachteten Angaben einschliefslich der Notizen über Wind- und

Eisverhältnisse enthält. Durch einfache Ordnung der Zählkarte nach bestimmten Grundsätzen lassen sich alle Beziehungen, d zwischen den einzelnen beobachteten Gröfsen bestehen, aufs leichtes feststellen. Der Vortragende zeigt eine Reihe von Zusamme stellungen aus den Ergebnissen der bisher ausgeführten Zählunge — Herr Wasserbaudirektor Nehls hält dann einen Vortrag üb die Periodizität der goniometrischen Funktionen imaginärer Wink und der Hyperbelfunktionen; der Vortragende stützt seine Unte suchungen auf ein eigenes graphisches Verfahren und legt eine nac demselben ausgeführte Zeichnung vor.

Versammlung am 10. November 1894.

Herr J. Sieveking legt mehrere Zeichnungen zur Theorie de Zirkularfunktionen mit komplexem Argument vor und erläutert di selben durch Betrachtungen über die zu Grunde liegende Differentia gleichung; die Zeichnungen stellen in den Funktionsebenen diejenige Kurven dar, welche Geraden entsprechen, die in der Ebene der u abhängig Variablen parallel zu den Achsen verlaufen; für die Funktio sinus ε wird schliefslich ein sehr anschauliches Modell aus 6 d unendlich vielen in den Strecken von -1 bis $-\infty$ und von $+$ bis $+\infty$ zusammenhängenden Riemannschen Flächen vorgezeigt. - Sodann spricht Herr Dr. E. Herrmann über die allgemeinen welle förmigen Bewegungen der Atmosphäre. Es wird gezeigt, dafs i einer verschieden erwärmten Atmosphäre ein stationärer Zustand n bei ganz bestimmten Temperaturverteilungen eintreten kann. I allen andern Fällen müssen sich die Bewegungen der Atmosphä in stationäre zonale und in Wellenbewegungen auflösen. Durc Kreuzung der zwei Wellenzüge nach Richtung der Meridiane un der Breitenkreise bilden sich die Maxima und Minima. — He Dr. Jaerisch macht dann einige Bemerkungen zu den Arbeiten v J. Thomae über den elastischen Kreiscylinder, die in den Verhandlunge der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipz erschienen sind. Der Vortrag erscheint in weiterer Ausführung i vorliegenden Hefte der Mitteilungen der Gesellschaft.

Versammlung am 8. Dezember 1894.

Herr Dr. Köpcke trägt vor über die Theorie der Anschaulichke Es wird die Frage behandelt, welchen analytischen Bedingungen ei Funktion genügen müsse, damit ihr Abbild in einem Cartesische Koordinatensystem eine anschauliche Kurve ist. Es wird nac gewiesen, dafs eine stetige Funktion dann und nur dann eine a

schauliche Kurve darstellt, wenn sie sich von jedem Punkte aus als Potenzreihe der unabhängig Veränderlichen x oder als Potenzreihe von $x^{\frac{1}{n}}$ oder endlich als unendliche Doppelreihe darstellen läfst, nämlich als unendliche Reihe solcher Potenzreihen von $x^{\frac{1}{n}}$; für deren Bildung das n ins Unendliche wächst. — Herr Dr. Hoppe liefert dann einige „Bemerkungen zu dem van der Waalsschen Gesetze." Da der kritische Punkt der Kohlensäure 31° C. beträgt, ist es sehr fraglich, ob sich flüssige Kohlensäure gefahrlos in die Tropen versenden läfst. Zur Beantwortung dieser Frage steht die 1879 bekannt gewordene Zustandsgleichung zur Verfügung. Durch geeignete Annahme gelingt es, für bestimmte Temperatursteigerungen einen Proportionalitätsfaktor der Drucksteigerung zu berechnen. Es findet sich z. B. für eine Temperatursteigerung von 60° ein Faktor = 1,18673, d. h. wenn der ursprüngliche Druck 200 Atmosphären war, wird der neue 237,346 Atm., während das Boylesche Gesetz 243,92 Atm. giebt. Allgemein läfst sich eine derartige Aufgabe behandeln durch Betrachtung der Gesamtenergie des eingeschlossenen Gemisches von Flüssigkeit und Gas. Es gelingt das Potential der getrennten Massen zu berechnen und so Druck, Energie und Entropie als Funktionen von Masse, Volumen und Temperatur zu bestimmen. Immer ergiebt sich, dafs bei der Druckprüfung, der vorschriftsmäfsig die eisernen Flaschen unterworfen sein müssen, die erwähnte Versendung gefahrlos erfolgen kann. — Herr Dr. Jaerisch bespricht sodann die Integration einer von Herrn Sieveking in der vorigen Sitzung behandelten Differentialgleichung; die damals als durch Zufall gefunden hingestellte Lösung wird durch eine Methode hergeleitet, die im wesentlichen in einer Zurückführung der Differentialgleichung höheren Grades auf eine solche höherer Ordnung besteht.

Versammlung am 12. Januar 1895.

Herr F. C. Lukas in Wien wird als auswärtiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Von dem in der Sitzung am 8. September gewählten Ausschusse ist ein Entwurf für neue Statuten ausgearbeitet. Die wesentliche Änderung, dafs künftig jedes der drei Vorstandsmitglieder drei Jahre hindurch dasselbe Amt verwalten solle (anstatt in diesen drei Jahren durch die drei Ämter aufzurücken), wird von der Versammlung genehmigt; diese Genehmigung bedarf noch der schriftlich einzuholenden Bestätigung durch die in der Sitzung nicht anwesenden einheimischen Mitglieder. — Herr Ingenieur

A. C. Nagel hält dann einen Vortrag über eine „mathematische Bestimmungsmethode und Korrektur der bisher empirisch ermittelte Konstanten in der Physik". Der Redner entwickelt ein eigenes System verschieden dimensionaler Bewegungserscheinungen und sucht die Bedeutung dieses Systems auf den Gebieten der Hydraulik, der Wärmelehre und der Astronomie nachzuweisen durch die Übereinstimmung der von ihm ermittelten Werte mit den empirisch bestimmten Konstanten; manche der vorkommenden Abweichungen seien auf Anschauungsfehler zurückzuführen, durch deren Aufdeckung eine Korrektur der empirisch gefundenen Konstanten ermöglicht wird. Besonders eingehend wird die Schwerkraftskonstante behandelt.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt wertvolle Zuwendungen folgenden Herren:

G. Arnoux, P. Bergholz, E. Busche, M. Cantor, Th. Glaunes, H. Grassmann, E. Grimsehl, E. Hoppe, L. Kiepert, M. E. Lemoine, M. Lerch, O. E. Meyer und K. Mützel, M. M. d'Ocagne, F. Rudio, H. Schubert, W. Schur, G. D. E. Weyer, J. Woelfer, der Deutschen Seewarte, sowie allen Gesellschaften, mit denen die mathematische Gesellschaft im Schriftaustausch steht; zu diesen sind neu hinzugetreten die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und die Société physico-mathématique Kasan.

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 6. Ausgegeben im Februar. **1896.**

Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes.

Von E. Busche in Bergedorf.

Es seien p und q zwei verschiedene positive ungerade Primzahlen. Markiert man auf einer Geraden die Punkte, durch die die zwischen 0 und $\frac{1}{2}pq$ liegenden Vielfachen von $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}q$ dargestellt werden, so sind diese Punkte alle verschieden, und die Figur ist in Bezug auf den Punkt $\frac{1}{4}pq$ symmetrisch. Ein zwischen 2 auf einander folgenden Vielfachen von $\frac{1}{2}p$ liegendes Intervall möge ein gerades oder ungerades p-Intervall heifsen, je nachdem das kleinere Vielfache gerade oder ungerade ist, und ebenso unterscheide man gerade und ungerade q-Intervalle. Da der Punkt $\frac{1}{4}pq$ zugleich in der Mitte des mittelsten p- und q-Intervalles liegt, so entsprechen den ganzen Vielfachen von p auf der einen Hälfte der Figur ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}p$ auf der anderen Hälfte, und solche entsprechenden Punkte liegen in gleichartigen q-Intervallen. Bei der durch das Gaufssche Lemma gegebenen Bestimmung des quadratischen Restcharakters $\mu(p, q)$ kann man daher die Vielfachen von p, die gröfser als $\frac{1}{4}pq$ sind, durch ebenso viele ungerade Vielfache von $\frac{1}{2}p$, die kleiner sind als $\frac{1}{4}pq$, ersetzen; $\mu(p, q)$ ist also die Anzahl der Zahlen $\frac{p}{2}$, $2\cdot\frac{p}{2}$, $3\cdot\frac{p}{2}$, $\ldots$ $\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{2}$, die in einem ungeraden q-Intervall liegen. Ebenso ist $\mu(q, p)$ die Anzahl der Zahlen $\frac{q}{2}$, $2\cdot\frac{q}{2}$, $\ldots$ $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{2}$, die in einem ungeraden p-Intervall liegen.*)

*) Diese Umformung des Gaufsschen Lemmas hat für biquadratische Reste

Nun bleibt der Rest von $\mu(p, q) + \mu(q, p)$ (mod 2) unverändert, wenn man sich das erste nicht in dem mit 0 anfangenden q-Intervall liegende Vielfache von $\frac{1}{2}p$ aus dem q-Intervall, in dem es liegt, in das vorhergehende q-Intervall verschoben denkt, denn dadurch ändert sich nicht nur $\mu(p, q)$, sondern auch $\mu(q, p)$ um 1, weil das die beiden q-Intervalle trennende Vielfache von $\frac{1}{2}q$ aus dem p-Intervall, in dem es lag, in das folgende p-Intervall gekommen ist.

Nimmt man eine solche Verschiebung so oft vor, bis alle Vielfachen von $\frac{1}{2}p$ sich im ersten (geraden) q-Intervall befinden, so dafs das letzte, ursprünglich von $\frac{q-1}{2} \cdot \frac{p}{2}$ bis $\frac{1}{4}pq$ reichende p-Intervall alle $\frac{p-1}{2}$ Vielfachen von $\frac{1}{2}q$ aufgenommen hat, so tragen jetzt die Vielfachen von $\frac{1}{2}p$ zu dem Rest von $\mu(p, q) + \mu(q, p)$ nichts mehr bei, die $\frac{p-1}{2}$ Vielfachen von $\frac{1}{2}q$ aber liefern alle denselben Beitrag 0 oder 1, je nachdem das letzte p-Intervall, d. h. je nachdem $\frac{q-1}{2}$ gerade oder ungerade ist. Der gesuchte Rest ist also nur dann von Null verschieden, wenn $\frac{p-1}{2}$ und $\frac{q-1}{2}$ beide ungerade sind.

Über die Teiler der natürlichen Zahlenreihe.

Von E. Busche in Bergedorf.

§ 1.

Im 100. Bande des Crelleschen Journals habe ich in einer Arbeit „Über eine Formel des Herrn Hermite“ eine Formel mitgeteilt, die als eine ergiebige Quelle für gewisse zahlentheoretische Theoreme, insbesondere solche über die Teiler der natürlichen Zahlenreihe anzusehen ist. Bezeichnet man mit $f(\alpha, \beta)$ eine beliebige eindeutige Funktion ihrer beiden reellen Argumente, mit $\Phi(x)$ eine in dem in Betracht kommenden Bereiche beständig stetig zunehmende eindeutige positive Funktion, deren inverse Funktion $\varphi(y)$ also dieselben Eigenschaften hat, mit δ_m und δ'_m zwei komplementäre positive Teiler der Zahl m, mit a eine positive ganze Zahl, so lautet die erwähnte Formel folgendermafsen:

---

schon Gaufs selbst vorgenommen (Werke, Bd. 2, S. 335). Vergl. auch Crelles Journal, Bd. 103, S. 120.

$$\text{I.}\quad \sum_{x=1}^{a} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right) - \sum_{x=1}^{a} f(0, x) = \sum_{m} \Big\{ f(\delta'_m, \delta_m) - f(\delta'_m - 1, \delta_m) \Big\}.$$
$$\varphi(m) \leqq \delta_m \leqq a$$

Dabei bezeichne ich mit $[\alpha]$ die durch die Beziehungen

$$\alpha - 1 < [\alpha] \leqq \alpha$$

definierte gröfste in α enthaltene ganze Zahl, m durchläuft alle positiven ganzen Zahlen, und die Summe auf der rechten Seite ist über alle Teiler der natürlichen Zahlenreihe zu erstrecken, die die angegebene Bedingung erfüllen. Weil $\varphi(m)$ mit m beständig wächst, bricht die Summe ab, sobald $\varphi(m) > a$ geworden ist.

Die Formel I. soll hier nun zunächst dadurch ergänzt werden, dafs die Gleichung angegeben wird, die an ihre Stelle tritt, wenn $\Phi(x)$ eine beständig abnehmende Funktion ist. Die Herleitung dieser neuen Formel ist zwar der a. a. O. gegebenen Herleitung der Gleichung I. sehr ähnlich, einige nicht ganz unwesentliche Abweichungen rechtfertigen es jedoch, dafs ich die neue Formel hier beweise.

Es möge also $\varphi(y)$ eine beständig abnehmende positive Funktion sein, die für $y = 0$ einen endlichen Wert hat. Definiert man dann — abweichend von der Herleitung der Formel I. — das Zeichen $[\alpha]'$ durch die Beziehungen

$$\alpha < [\alpha]' \leqq \alpha + 1,$$

so ist $[\varphi(0)]'$ gleich einer positiven ganzen Zahl b und $[\varphi(n)]'$ hat einen positiven Wert a. Da nach einer schon von Herrn Hermite u. a. benutzten Bemerkung

$$\left[\frac{m}{x}\right] - \left[\frac{m-1}{x}\right] = 1 \text{ oder } = 0$$

ist, je nachdem x ein Teiler von m ist, oder nicht, so ist

$$\sum_{x=[\varphi(n)]'}^{b} f\left(\left[\frac{n}{x}\right], x\right) - \sum_{x=[\varphi(n)]'}^{b} f\left(\left[\frac{n-1}{x}\right], x\right) = \sum_{\delta_n} \Big\{ f(\delta'_n, \delta_n) - f(\delta'_n - 1, \delta_n) \Big\},$$
$$[\varphi(n)]' \leqq \delta_n \leqq b$$

denn alle Glieder auf der linken Seite, für die nicht x ein Teiler δ_n von n, also $\left[\frac{n}{x}\right] = \delta'_n$ und $\left[\frac{n-1}{x}\right] = \delta'_n - 1$ ist, heben sich weg. Ebenso ist

$$\sum_{x=[\varphi(n-1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{n-1}{x}\right], x\right) - \sum_{x=[\varphi(n-1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{n-2}{x}\right], x\right)$$
$$= \sum_{\delta_{n-1}} \Big\{ f(\delta'_{n-1}, \delta_{n-1}) - f(\delta'_{n-1} - 1, \delta_{n-1}) \Big\},$$
$$[\varphi(n-1)]' \leqq \delta_{n-1} \leqq b$$

1) . . . . . .

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
&\sum_{x=[\varphi(m+1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{m+1}{x}\right], x\right) - \sum_{x=[\varphi(m+1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{m}{x}\right], x\right) \\
&\qquad = \sum_{\delta_{m+1}} \left\{ f(\delta'_{m+1}, \delta_{m+1}) - f(\delta'_{m+1} - 1, \delta_{m+1}) \right\}, \quad [\varphi(m+1)]' \overline{\gtrless} \delta_{m+1} \overline{\gtrless} b \\
&\sum_{x=[\varphi(m)]'}^{b} f\left(\left[\frac{m}{x}\right], x\right) - \sum_{x=[\varphi(m)]'}^{b} f\left(\left[\frac{m-1}{x}\right], x\right) = \sum_{\delta_m} \left\{ f(\delta'_m, \delta_m) - f(\delta'_m - 1 \right. \quad [\varphi(m)]' \overline{\gtrless} \delta_m \overline{\gtrless} b \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\sum_{x=[\varphi(1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{1}{x}\right], x\right) - \sum_{x=[\varphi(1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{0}{x}\right], x\right) = \sum_{\delta_1} \left\{ f(\delta'_1, \delta_1) - f(\delta'_1 - 1 \right. \quad [\varphi(1)]' \overline{\gtrless} \delta_1 \overline{\gtrless} b
\end{aligned}
\right.
$$

Addiert man nun alle diese Gleichungen, so heben sich von den Summen

$$
(2) \qquad \sum_{x=[\varphi(m)]'}^{b} f\left(\left[\frac{m}{x}\right], x\right) - \sum_{x=[\varphi(m+1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{m}{x}\right], x\right),
$$

von denen die zweite im allgemeinen mehr Glieder haben w: die erste, diejenigen Glieder nicht fort, für die x zwischen $[\varphi(m$ (inkl.) und $[\varphi(m)]'$ (exkl.) liegt. Ist x eine dieser Zahlen, als

$$
[\varphi(m+1)]' \overline{\gtrless} x < [\varphi(m)]',
$$

so ist auch

$$
(3) \qquad \varphi(m+1) < x \overline{\gtrless} \varphi(m).
$$

Denn wenn $\varphi(m+1)$ und $\varphi(m)$ beide nicht ganzzahlig sind, nach der Definition des Zeichens $[\alpha]'$ $\varphi(m+1)$ sicher kleiner nächst höhere ganze Zahl $[\varphi(m+1)]'$, also auch kleiner als da $[\varphi(m)]' > \varphi(m)$ ist, so ist auch $x < \varphi(m)$. Ist $\varphi(m+1)$ zahlig, so ist

$$
[\varphi(m+1)]' = \varphi(m+1) + 1,
$$

also auch in diesem Falle ist $\varphi(m+1) < x$, selbst wenn $[\varphi(m+1$ ist; ist $\varphi(m)$ ganzzahlig, so ist

$$
[\varphi(m)]' = \varphi(m) + 1,
$$

und da $x = [\varphi(m)]' - 1$ sein kann, so kann in diesem Falle $x =$ werden. Bezeichnet man nun mit $\Phi(x)$ die inverse Funktio $\varphi(y)$, so ist (3) gleichbedeutend mit

$$
m + 1 > \Phi(x) \overline{\gtrless} m,
$$

d. h. es ist

$$
m = [\Phi(x)].
$$

Die Glieder, die sich aus (2) nicht wegheben, lassen sich demnach schreiben

$$(4) \quad \cdots\cdots \quad -\sum_{x=[\varphi(m+1)]'}^{[\varphi(m)]'-1} f\left(\left[\frac{[\Phi(x)]}{x}\right], x\right).$$

Wenn $[\varphi(m+1)]' = [\varphi(m)]'$ ist, so bedeutet das, dafs alle Glieder sich wegheben; wenn $[\varphi(m+1)]' < [\varphi(m)]'$ ist, so hat $[\Phi(x)]$ für alle in Betracht kommenden Werte von x denselben Wert m.

Da bekanntlich

$$\left[\frac{[\alpha]}{x}\right] = \left[\frac{\alpha}{x}\right]$$

ist, so kann man statt (4) auch schreiben

$$(5) \quad \cdots\cdots \quad -\sum_{x=[\varphi(m+1)]'}^{[\varphi(m)]'-1} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right).$$

Bei der Addition der Gleichungen (1) ergiebt sich hiernach

$$(6) \quad \cdots \quad \sum_{x=a}^{b} f\left(\left[\frac{n}{x}\right], x\right) - \sum_{x=a}^{b} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{\delta_m \\ [\varphi(m)]' \leqq \delta_m \leqq b}} \{f(\delta'_m, \delta_m) - f(\delta'_m - 1, \delta_m)\},$$

da $[\varphi(n)]' = a$ vorausgesetzt war. Die nicht mit einer anderen Summe zu vereinigende Summe

$$-\sum_{x=[\varphi(1)]'}^{b} f\left(\left[\frac{0}{x}\right], x\right)$$

schliefst sich der aus den verschiedenen Summen (5) gebildeten Summe, die bis $[\varphi(1)]' - 1$ reicht, ohne weiteres an.

Läfst man in dem Gleichungssystem (1) alle Summen auf der linken Seite sich von a bis b erstrecken und addiert dann alle Gleichungen, so ergiebt sich

$$(7) \quad \sum_{x=a}^{b} f\left(\left[\frac{n}{x}\right], x\right) - \sum_{x=a}^{b} f(0, x) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{\delta_m \\ a \leqq \delta_m \leqq b}} \{f(\delta'_m, \delta_m) - f(\delta'_m - 1, \delta_m)\}.$$

Subtrahiert man (6) von (7), so folgt

$$(8) \quad \sum_{x=a}^{b} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right) - \sum_{x=a}^{b} f(0, x) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{\delta_m \\ a \leqq \delta_m < [\varphi(m)]'}} \{f(\delta'_m, \delta_m) - f(\delta'_m - 1, \delta_m)\},$$

denn es ist

$$\sum_{\delta_m} \{f(\delta'_m,\ \delta_m) - f(\delta'_m - 1,\ \delta_m)\} - \sum_{\delta_m} \{f(\delta'_m,\ \delta_m) - f(\delta'_m - 1,\ \delta_m)\}$$
$$a \leqq \delta_m \leqq b \qquad [\varphi(m)]' \leqq \delta_m \leqq b$$
$$= \sum_{\delta_m} \{f(\delta'_m,\ \delta_m) - f(\delta'_m - 1,\ \delta_m)\}.$$
$$a \leqq \delta_m < [\varphi(m)]'$$

Die Bedingung

$$a \leqq \delta_m < [\varphi(m)]'$$

ist gleichbedeutend mit

$$a \leqq \delta_m \leqq \varphi(m),$$

denn weil $[\varphi(m)]'$ die ganze Zahl ist, die zunächst gröfser als $\varphi(m)$ ist, auch dann, wenn $\varphi(m)$ selbst ganzzahlig ist, so sind die Teiler, die $< [\varphi(m)]'$ sind, $\leqq \varphi(m)$. Die Summation auf der rechten Seite von (8) kann über alle ganzen Zahlen m erstreckt werden, da $\varphi(m) < a$ wird, wenn $m > n$ ist. Auf der linken Seite kann man von a bis ∞ summieren, da für eine Zahl, die gröfser als b ist, $[\Phi(x)] = 0$ wird. So erhält man die abzuleitende Formel

$$\text{II.} \quad \sum_{x=a}^{\infty} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right) - \sum_{x=a}^{\infty} f(0, x) = \sum_{m} \{f(\delta'_m,\ \delta_m) - f(\delta'_m - 1,\ \delta_m)\}.$$
$$a \leqq \delta_m \leqq \varphi(m)$$

Wenn $\Phi(x)$ weder, wie in I., beständig zunimmt, noch, wie in II., beständig abnimmt, sondern konstant gleich einer ganzen Zahl n ist, so tritt an die Stelle von I. und II. die Gleichung (7), die ich für $a = 1$ und $b = n$ mit III. bezeichnen will:

$$\text{III.} \quad \sum_{x=1}^{n} f\left(\left[\frac{n}{x}\right], x\right) - \sum_{x=1}^{n} f(0, x) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{\delta_m} \{f(\delta'_m,\ \delta_m) - f(\delta'_m - 1,\ \delta_m)\}.$$
$$1 \leqq \delta_m \leqq n$$

Die rechte Seite ist hier also über alle Teiler der Zahlen von 1 bis n zu erstrecken.

§ 2.

Es sollen jetzt aus den Gleichungen I., II., III. diejenigen allgemeinen Gleichungen abgeleitet werden, die besonders dazu geeignet sind, durch Spezialisierung der Funktionen f und Φ Lehrsätze über die Teiler der Zahlenreihe und durch geeignete Kombination solcher Sätze auch andere Theoreme zu liefern.

1. Über die Funktion f möge die Voraussetzung gemacht werden, dafs sie gleich Null gesetzt werde, wenn das erste Argument $\leqq$ ist. Dann kann man das folgende endliche System von Gleichungen aufstellen:

$$\sum_x f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right) = \sum_m f(\delta'_m, \delta_m) - \sum_m f(\delta'_m - 1, \delta_m),$$

$$\sum_x f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] - 1, x\right) = \sum_m f(\delta'_m - 1, \delta_m) - \sum_m f(\delta'_m - 2, \delta_m),$$

. . . . . .

$$\sum_x f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] - y, x\right) = \sum_m f(\delta'_m - y, \delta_m) - \sum_m f(\delta'_m - y - 1, \delta_m),$$

$$\sum_x f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] - y - 1, x\right) = \sum_m f(\delta'_m - y - 1, \delta_m) - \sum_m f(\delta'_m - y - 2, \delta_m),$$

. . . . . .

Dabei habe ich — und das soll auch im Folgenden geschehen — die Grenzen der Summen und die Bedingung, die die Teiler erfüllen sollen, weggelassen, weil die Gleichungen gelten, zu welcher der 3 Arten auch die Φ-Funktion gehört. Das System werde so lange fortgesetzt, bis alle in einer Gleichung vorkommenden Glieder gleich Null geworden sind. Addiert man dann alle Gleichungen, so erhält man

$$(9) \quad \cdots \quad \sum_x \sum_{y=0}^{\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]-1} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] - y, x\right) = \sum_m f(\delta'_m, \delta_m).$$

Bei der Allgemeinheit der Funktion f kann diese Gleichung nur bestehen, wenn die sämtlichen Argumentenpaare, die links und rechts auftreten, identisch sind, da, wenn etwa rechts ein Paar von Argumenten vorhanden wäre, das links nicht vorkommt, die Funktion f dahin spezialisiert werden könnte, daſs sie gleich Null ist, ausgenommen für das eine erwähnte Paar von Argumenten, und so ergäbe sich ein Widerspruch. Die Gleichung (9) sagt also nichts anderes aus, als daſs folgender Lehrsatz gilt:

Die Teiler der natürlichen Zahlenreihe, die die Bedingung

$$\varphi(m) \lessgtr \delta_m \lessgtr a \quad \text{oder} \quad a \lessgtr \delta_m \lessgtr \varphi(m)$$

erfüllen, jenachdem $\varphi(m)$ eine wachsende oder eine abnehmende Funktion ist, sind in dem ersten Falle die Zahlen x von 1 bis a, jede $\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]$ mal, in dem zweiten Falle die Zahlen x von a bis ∞, jede $\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]$ mal; die komplementären Teiler, mit denen x multipliziert vorkommt, sind die Zahlen von

1 bis $\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]$. Dabei bezeichnet $\Phi(x)$ die inverse Funktion von $\varphi(m)$.

Z. B. $\Phi(x) = \sqrt[30]{x}$, $\varphi(m) = \frac{900}{m^2}$, $a = 3$.

Es ist $\left[\frac{30}{3\sqrt{3}}\right] = 5$, $\left[\frac{30}{4\sqrt{4}}\right] = 3$, $\left[\frac{30}{5\sqrt{5}}\right] = 2$, $\left[\frac{30}{6\sqrt{6}}\right] = 2$, $\left[\frac{30}{7\sqrt{7}}\right] = 1$, $\left[\frac{30}{8\sqrt{8}}\right] = 1$, $\left[\frac{30}{9\sqrt{9}}\right] = 1$, und für $x \geqq 10$ wird $\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] = 0$. Die Teiler, die die Bedingung

$$3 \leqq \delta_m \leqq \frac{900}{m^2}$$

erfüllen, sind unter den Teilern der Zahlen von 3 bis 17 zu suchen, da $\frac{900}{18^2} < 3$ ist. Die Zahl 3 kommt 5-mal vor, als Teiler der Zahlen 3, 6, 9, 12, 15, die Zahl 4 3-mal, als Teiler von 4, 8, 12, aber nicht als Teiler von 16, da $\frac{900}{256} < 4$ ist; man überzeugt sich ferner leicht davon, dafs 5 als Teiler von 5 und 10, 6 als Teiler von 6 und 12, 7 als Teiler von 7, 8 als Teiler von 8, 9 als Teiler von 9 vorkommt. Alle Aussagen des Lehrsatzes, auch die über die komplementären Teiler, sind damit bestätigt.

Für $\Phi(x) = n$, $a = 1$ erhält man den bekannten Satz, dafs unter den Teilern der Zahlen 1 bis n jede Zahl x gerade $\left[\frac{n}{x}\right]$ mal vorkommt. Da in diesem Falle die komplementären Teiler mit den Teilern selbst übereinstimmen, so kann der letzte Teil des allgemeinen Satzes hier auch so ausgesprochen werden: Die Teiler der Zahlen von 1 bis n sind die Zahlen $1, 2, \cdots n$; $1, 2, \cdots \left[\frac{n}{2}\right]$; $1, 2, \cdots \left[\frac{n}{3}\right]$, u. s. w.

Hieraus folgt z. B. ohne weiteres, dafs die Summe aller Teiler der Zahlen von 1 bis n

$$\text{entweder } = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \left[\frac{n}{x}\right] \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{n} \left\{\left[\frac{n}{x}\right]^2 + \left[\frac{n}{x}\right]\right\},^*)$$

das Produkt aller Teiler

$$\text{entweder } = \prod_{x=1}^{n} x^{\left[\frac{n}{x}\right]} \quad \text{oder} \quad = \prod_{x=1}^{n} \left[\frac{n}{x}\right]!$$

gesetzt werden kann.

*) Vergl. Bachmann, Analytische Zahlentheorie, S. 402.

Weil für $\Phi(x) = n$ und $a = 1$ die rechte Seite von (9) unverändert bleibt, wenn die Reihenfolge der Argumente umgekehrt wird, so mufs das auch von der linken Seite gelten. Das führt zu der Reciprocitätsgleichung

$$\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n}{x}\right]-1} f\left(\left[\frac{n}{x}\right]-y,\ x\right) = \sum_{x=1}^{n}\sum_{y=0}^{\left[\frac{n}{x}\right]-1} f\left(x,\ \left[\frac{n}{x}\right]-y\right).$$

So ist z. B.

$$\sum_{x=1}^{n}\left(x^{\left[\frac{n}{x}\right]} + x^{\left[\frac{n}{x}\right]-1} + x^{\left[\frac{n}{x}\right]-2} + \cdots + x^{1}\right)$$

$$= \sum_{x=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{x}\right]^{x} + \left(\left[\frac{n}{x}\right]-1\right)^{x} + \left(\left[\frac{n}{x}\right]-2\right)^{x} + \cdots + 1^{x}\right).$$

2. Setzt man $f(\alpha, \beta) = \alpha \cdot f_1(\beta)$ und dann für f_1 wieder f, so folgt aus jeder der 3 allgemeinen Gleichungen des § 1:

$$\sum_{x}\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] \cdot f(x) = \sum_{m} f(\delta_m) \cdot (\delta'_m - \delta'_m + 1),$$

oder

$$\sum_{x}\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] \cdot f(x) = \sum_{m} f(\delta_m). \tag{10}$$

Wenn man hierin $\Phi(x) = x^{\nu+1}$ und $f(x) = \frac{1}{x^{\nu}} f_1(x)$ und für f_1 wieder f setzt, so erhält man

$$\sum_{x=1}^{a} f(x) = \sum_{m} \frac{1}{\delta_m^{\nu}} f(\delta_m), \qquad \sqrt[\nu+1]{m} \leqq \delta_m \leqq a, \tag{11}$$

wo nun, weil $\Phi(x)$ spezialisiert ist, die Grenzen und die Bedingung hinzugefügt sind.

So ergiebt sich, z. B., wenn

$$f(x) = \frac{(-1)^x}{2x+1}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \sum_{m} \frac{1}{\delta_m^{\nu}} \cdot \frac{(-1)^{\delta_m}}{2\delta_m + 1}, \qquad \sqrt[\nu+1]{m} \leqq \delta_m.$$

Die Bedingung $\delta_m \leqq a$ ist weggelassen, weil $a = \infty$ angenommen ist. Diese Reihe ist nicht nur eine Umformung, sondern zugleich eine Verallgemeinerung der Leibnizschen Reihe, da sie in diese

dadurch übergeht, dafs man $\nu = 0$ setzt; für $\nu = 0$ genügt nur $\delta_m = m$ der Bedingung.

Die Reihe konvergiert, weil jeder endliche Teil von ihr, der durch einen beliebigen Wert der Zahl a bestimmt ist, gleich der endlichen Summe

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} \cdot \cdots \cdot + \frac{(-1)^a}{2a+1}$$

ist.

3. Wenn $f(\alpha, \beta) = f(\alpha)$ gesetzt wird, so ist

$$(12) \qquad \sum_x f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]\right) - \sum_x f(0) = \sum_m (f(\delta'_m) - f(\delta'_m - 1)),$$

wo das zweite Glied links die Bedeutung hat, dafs $f(0)$ mit der Anzahl der Werte, die man dem Summationsbuchstaben x beilegt, zu multiplizieren ist.

Setzt man nach dem Vorgange von Dirichlet*)

$$F(\alpha) = f(1) + f(2) + \cdots + f(\alpha), \qquad F(0) = 0,$$

so folgt aus (12)

$$(13) \qquad \sum_x F\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]\right) = \sum_m f(\delta'_m),$$

weil

$$F(\delta'_m) - F(\delta'_m - 1) = f(\delta'_m)$$

ist.

Wenn z. B. $f(\alpha) = 1$ angenommen wird, so erhält man aus (10)

$$(14) \qquad \sum_x \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right] = \text{der Anzahl der Teiler } \delta_m, \text{ die der Bedingung genügen,}$$

und ebenso grofs ergiebt sich naturgemäfs die Anzahl der konjugierten Teiler nach (13), da $F(\alpha) = \alpha$ ist für $f(\alpha) = 1$.

Die Summe der ersten Potenz und der höheren Potenzen von δ_m und δ'_m aus (10) und (13) abzuleiten, überlasse ich dem Leser. Die Formeln (10), (13) und (14) lassen sich, wie leicht zu sehen ist, auch aus dem in dem ersten Artikel dieses Paragraphen enthaltenen Satze ableiten.

4. Es möge ferner

$$f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right) = \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\alpha \cdot \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\beta = \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\nu$$

angenommen werden, so dafs $\alpha + \beta = \nu$ ist; α soll > 0 sein. B

*) Vergl. auch Bachmann, Analyt. Zahlentheorie, z. B. S. 403.

trachtet man dann $\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\alpha$ als von dem ersten, $\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\beta$ als von dem zweiten Argument der Funktion f abhängig, so erhält man

$$(15) \qquad \sum_x \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\nu = \sum_m (\delta'^\alpha_m - (\delta'_m - 1)^\alpha) \cdot \left[\frac{\Phi(\delta_m)}{\delta_m}\right]^\beta,$$

insbesondere für $\alpha = 1$

$$\sum_x \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\nu = \sum_m \left[\frac{\Phi(\delta_m)}{\delta_m}\right]^{\nu-1}$$

und für $\alpha = 2$

$$\sum_x \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^\nu = \sum_m (2\delta'_m - 1) \cdot \left[\frac{\Phi(\delta_m)}{\delta_m}\right]^{\nu-2}.$$

5. Aus (12) folgt

$$(16) \qquad \sum_x \int_0^{\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]} \chi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sum_m \int_{\delta'_m - 1}^{\delta'_m} \chi(\varepsilon)\, d\varepsilon,$$

wo $\chi(\varepsilon)$ eine beliebige integrierbare Funktion ist.

6. Setzt man $\log f$ statt f, so erhält man

$$(17) \qquad \frac{\prod_x f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right)}{\prod_x f(0, x)} = \frac{\prod_m f(\delta'_m, \delta_m)}{\prod_m f(\delta'_m - 1, \delta_m)},$$

z. B. für $f(\alpha, \beta) = \alpha + 1$, $\Phi(x) = x^2$, $\varphi(m) = \sqrt{m}$

$$(a+1)! = \frac{\prod_m (\delta'_m + 1)}{\prod_m (\delta'_m)} = \prod_m \left(1 + \frac{1}{\delta'_m}\right), \qquad \sqrt{m} \leqq \delta_m \leqq a.$$

§ 3.

Es mögen nun noch einige spezielle Anwendungen der Formeln I, II., III. und der allgemeinen Formeln des vorigen Paragraphen gemacht werden. Dabei werde ich mich zunächst auf die Formel III. beschränken, weil in ihr alle Teiler der Zahlen von 1 bis n auftreten.

1. Setzt man $f(\alpha, \beta) = (-1)^\alpha \cdot \beta$, so folgt aus III.:

$$\sum_{x=1}^{n} (-1)^{\left[\frac{n}{x}\right]} \cdot x - \sum_{x=1}^{n} x = 2 \cdot \sum_{m=1}^{n} (-1)^{\delta'_m} \cdot \delta_m, \qquad \delta_m \leqq n$$

oder

$$\sum_{x=1}^{n}(-1)^{\left[\frac{n}{x}\right]}\cdot x=\frac{n\cdot(n+1)}{2}+2\sum_{m=1}^{n}(-1)^{\delta'_m}\cdot\delta_m,\qquad \delta_m\leqq n.$$

2. Wenn $f(\alpha,\beta)=1$ oder $=0$ gesetzt wird, je nachdem α ungerade oder gerade ist, so wird die rechte Seite von III. gleich ± 1, je nachdem δ'_m ungerade oder gerade ist. Also ist, da δ'_m ebenso wie δ_m alle Teiler der Zahlen von 1 bis n durchläuft, die Anzahl der ungeraden Glieder $\left[\frac{n}{x}\right]$ oder

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{1-(-1)^{\left[\frac{n}{x}\right]}}{2}=$$ dem Überschufs der Anzahl der ungeraden Teiler der Zahlen von 1 bis n über die Anzahl der geraden Teiler.

3. Setzt man $f(\alpha,\beta)=(-1)^{\beta}\cdot\alpha$, so folgt

$$\sum_{x=1}^{n}(-1)^{x}\cdot\left[\frac{n}{x}\right]=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{\delta_m}\cdot(\delta'_m-\delta'_m+1)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{\delta_m},\qquad \delta_m\leqq n.$$

Die rechte Seite ist gleich dem negativ genommenen Überschufs der Anzahl der ungeraden Teiler über die der geraden. Es ist also nach dem vorigen Resultat auch

$$\sum_{x=1}^{n}(-1)^{x}\cdot\left[\frac{n}{x}\right]=-\sum_{x=1}^{n}\frac{1-(-1)^{\left[\frac{n}{x}\right]}}{2}.$$

4. Nimmt man $f(\alpha,\beta)=1$ oder $=0$, je nachdem α eine Primzahl ist oder nicht, so ergiebt sich: Die Anzahl der Primzahlen unter den Zahlen n, $\left[\frac{n}{2}\right]$, $\left[\frac{n}{3}\right]$, $\cdots\left[\frac{n}{n}\right]$ ist ebenso grofs wie die Anzahl solcher Teiler der Zahlen von 1 bis n, die Primzahlen sind, vermindert um die Anzahl der Teiler, die um 1 gröfser als eine Primzahl sind.

5. Setzt man $f(\alpha,\beta)=\varphi(\alpha)$, d. h. gleich der Anzahl der zu α teilerfremden positiven Zahlen, die $<\alpha$ sind, so ist nach (12)

$$(18)\qquad \sum_{1}^{n}\varphi\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)=\sum_{m=1}^{n}\varphi(\delta_m)-\sum_{m}\varphi(\delta_m-1),\qquad \delta_m\leqq n$$

da man hier statt δ'_m auch δ_m setzen kann, oder, da $\Sigma\varphi(\delta_m)$ über die Teiler α einer bestimmten Zahl m erstreckt, bekanntlich $=m$ ist, so ist

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi(\delta_m - 1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} - \sum_{x=1}^{n} \varphi\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right).$$

Wenn man $f(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha - 1)$, dann $= \varphi(\alpha - 2)$ u. s. w. setzt und die entstehenden Gleichungen zu (18) addiert, so folgt die von Dirichlet gefundene Gleichung

$$\sum_{x=1}^{n} \sum_{y=0}^{\left[\frac{n}{x}\right]-1} \varphi\left(\left[\frac{n}{x}\right] - y\right) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.^{*})$$

6. Nimmt man $f(\alpha, \beta) = 1$ oder $= 0$ an, je nachdem $\alpha \equiv r \pmod{s}$ ist oder nicht, so folgt aus (12), wenn $r > 0$ angenommen wird:

Die Anzahl der Zahlen $\left[\frac{n}{x}\right]$ für $x = 1, 2, \cdots n$, die $\equiv r \pmod{s}$ sind, ist gleich der Anzahl solcher Teiler der Zahlen von 1 bis n, die $\equiv r \pmod{s}$ sind, vermindert um die Anzahl der Teiler, die $\equiv r + 1 \pmod{s}$ sind.

Setzt man ferner $f(\alpha, \beta) = 1$ oder $= 0$, je nachdem $\alpha \equiv r + 1 \pmod{s}$ ist oder nicht, so folgt:

Die Anzahl der Zahlen $\left[\frac{n}{x}\right]$, die $\equiv r + 1$ sind, ist gleich der Anzahl solcher Teiler, die $\equiv r + 1$ sind, vermindert um die Anzahl der Teiler, die $\equiv r + 2$ sind.

Fährt man in derselben Weise fort, bis man zu dem Satz kommt:

Die Anzahl der Zahlen $\left[\frac{n}{x}\right]$, die $\equiv s - 1$ sind, ist gleich der Anzahl solcher Teiler, die $\equiv s - 1$ sind, vermindert um die Anzahl der Teiler, die durch s teilbar sind, d. h. um die Summe

$$\left[\frac{n}{s}\right] + \left[\frac{n}{2s}\right] + \cdots,$$

oder um die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis $\left[\frac{n}{s}\right]$, so führt die Addition aller eben erwähnten Anzahlen zu dem Satz:

Die Anzahl aller solcher Teiler der Zahlen von 1 bis n, die $\equiv r \pmod{s}$ sind, ist gleich der Anzahl der Zahlen $\left[\frac{n}{x}\right]$ für $x = 1, 2, \cdots n$, die $\pmod{s}$ einen der Reste r, $r + 1$, $r + 2, \cdots s - 1$ haben, vermehrt um die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis $\left[\frac{n}{s}\right]$.

*) Vergl. Bachmann, Analytische Zahlentheorie, S. 424.

7. Eine Methode, um Beziehungen zwischen Teileranzahlen zu finden, beruht darauf, dafs man einen Ausdruck $[\psi(x)]$ auf verschiedene Arten aus $f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right)$ entstehen läfst. So ist z. B. $\left[\frac{n}{x}\right]$ dadurch abzuleiten, dafs man $f(\alpha, \beta) = \alpha$ und $\Phi(x) = n$ setzt. Hiernach ist $\sum_{x=1}^{n}\left[\frac{n}{x}\right]$ die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis n.

Man kann aber auch $f(\alpha, \beta) = \left[\frac{\alpha}{\beta^{\nu}}\right]$ und $\Phi(x) = n \cdot x^{\nu}$ setzen, um $\left[\frac{n}{x}\right]$ zu erhalten. Dann ist nach (12)

$$\sum_{x=1}^{n}\left[\frac{n}{x}\right] = \sum_{m}\left(\left[\frac{\delta'_m}{\delta^{\nu}_m}\right] - \left[\frac{\delta'_m - 1}{\delta^{\nu}_m}\right]\right), \qquad \sqrt[\nu]{\frac{m}{n}} \lessgtr \delta_m \lessgtr n.$$

Nun ist aber

$$\left[\frac{\delta'_m}{\delta^{\nu}_m}\right] - \left[\frac{\delta'_m - 1}{\delta^{\nu}_m}\right]$$

nur dann von Null verschieden, und zwar $= 1$, wenn δ'_m durch δ^{ν}_m teilbar ist. Also: Die Anzahl der Teiler, die der Bedingung

$$\sqrt[\nu]{\frac{m}{n}} \lessgtr \delta_m \lessgtr n$$

genügen, und deren νte Potenz in ihrem konjugierten Teiler aufgeht, ist ebenso grofs wie die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis n.

8. Wenn p eine Primzahl von der Form $4k + 1$ ist, so ist die Summe der positiven quadratischen Reste von p, die kleiner als p sind, nämlich

$$\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}}\left(x^2 - \left[\frac{x^2}{p}\right] \cdot p\right) = p \cdot \frac{p-1}{4},$$

da von den $\frac{p-1}{2}$ Resten sich je zwei zu p ergänzen. Daraus folgt, da

$$\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}} x^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot p$$

ist,

$$\sum_{x=1}^{\frac{p-1}{2}}\left[\frac{x^2}{p}\right] = \frac{(p-1)(p-5)}{24}.$$

Also gilt nach (14) der folgende Lehrsatz: Ist p eine Primzahl von der Form $4k+1$, so ist die Anzahl derjenigen Teiler der natürlichen Zahlenreihe, die der Bedingung

$$\sqrt[3]{mp} \leqq \delta_m \leqq \frac{p-1}{2}$$

genügen, gleich $\frac{(p-1)(p-5)}{24}$.

§ 4.

Setzt man in (12) $\Phi(x) = x^2$ und $f(\alpha) = \left[\frac{p\alpha}{q}\right]$, wo p und q teilerfremd sind und q ungerade ist, so ergiebt sich

$$(19) \qquad \sum_{x=1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right] = \sum_m \left(\left[\frac{p\delta'_m}{q}\right] - \left[\frac{p\delta'_m - p}{q}\right]\right), \qquad \sqrt{m} \leqq \delta_m \leqq \frac{q-1}{2}.$$

Wird die linke Seite dieser Gleichung mit μ bezeichnet, so ist bekanntlich das Jacobische Symbol

$$(20) \qquad \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\mu + (p-1)\cdot\frac{q^2-1}{8}}.$$

Des kürzeren Ausdrucks wegen möge q als Primzahl angenommen werden. Das allgemeine Glied auf der rechten Seite von (19) ist nun offenbar entweder $= \left[\frac{p}{q}\right]$ oder $= \left[\frac{p}{q}\right] + 1$, je nachdem der Rest von $p\delta'_m \pmod q$ $>$ oder $<$ als der von p ist. Nimmt man noch der Einfachheit wegen $p < q$, also $\left[\frac{p}{q}\right] = 0$, und p ungerade an, so enthält (19) den folgenden Satz: Die ungerade positive Zahl p, die kleiner ist als die ungerade Primzahl q, ist quadratischer Rest oder Nichtrest von q, je nachdem die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahlenreihe, deren konjugierte Teiler die Bedingung

$$\sqrt{m} \leqq \delta_m \leqq \frac{q-1}{2}$$

erfüllen, und die mit p multipliziert (mod q) einen Rest haben, der kleiner als p ist, gerade oder ungerade ist.

Dieser Satz kann nun so umgeformt werden, dafs die Teiler nicht mehr darin vorkommen. Da $\delta_m = \frac{m}{\delta'_m}$ ist, so erfüllen die in (19) auftretenden Teiler δ'_m die Bedingung

$$\frac{m}{\frac{q-1}{2}} \leqq \delta'_m < \sqrt{m}.$$

Die Zahl 1 tritt hiernach offenbar $\frac{q-1}{2}$-mal als ein solcher Teiler auf, da erst für $m \gtreqless \frac{q+1}{2}$ die linke Seite gröfser als 1 wird. Die Zahl $\delta'_m = 2$ erfüllt für $m = 2, 4. \cdots 2 \cdot \frac{q-1}{2}$ die linke Seite der Bedingung, aber damit auch die rechte Seite erfüllt werde, mufs $m \gtreqless 4$ sein, so dafs 2 nur $\left(\frac{q-1}{2} - 1\right)$-mal als Teiler auftritt. So sieht man leicht, dafs die Zahl $y < \frac{q-1}{2}$ als Teiler von y^2, $y(y+1)$, $y(y+2), \cdots y \cdot \frac{q-1}{2}$ der Bedingung genügt, also $\left(\frac{q-1}{2} - y + 1\right)$-mal als Teiler vorkommt; $\frac{q-1}{2}$ kommt nur einmal als Teiler vor, und eine Zahl, die $> \frac{q-1}{2}$ ist, erfüllt die Teilerbedingung überhaupt nicht mehr.

Da es nun in dem oben angegebenen Satze nur darauf ankommt, ob die zu bestimmende Anzahl gerade oder ungerade ist, so braucht man solche Teiler, die in gerader Anzahl vorkommen, überhaupt nicht, und solche, die in ungerader Anzahl auftreten, nur einmal zu berücksichtigen. Wenn $\left[\frac{p}{q}\right] > 0$ ist, so tritt auf der rechten Seite von (19) der Summand $\left[\frac{p}{q}\right]$ so oft auf, wie es Teiler giebt, die der Bedingung genügen, also $1 + 2 + 3 + \cdots \frac{q-1}{2} = \frac{q^2-1}{8}$-mal. So erhält man, wenn man, um auch den Fall eines geraden p mit in Betracht zu ziehen, die Gleichung (20) berücksichtigt, den folgenden Satz:

Der quadratische Restcharakter der positiven Zahl p in Bezug auf die in p nicht aufgehende ungerade Primzahl q ist gleich $\left(\left[\frac{p}{q}\right] + p - 1\right) \cdot \frac{q^2-1}{8}$, vermehrt um die Anzahl der Zahlen $1 \cdot p$, $3 \cdot p, \cdots \frac{q-1}{2} \cdot p$, deren Rest (mod q) kleiner als der von p ist, wenn $\frac{q-1}{2}$ ungerade ist, und gleich $\left(\left[\frac{p}{q}\right] + p - 1\right) \cdot \frac{q^2-1}{8}$, vermehrt um die Anzahl der Zahlen $2 \cdot p$, $4 \cdot p$, $\cdots \frac{q-1}{2} p$, deren Rest (mod q) kleiner als der von p ist, wenn $\frac{q-1}{2}$ gerade ist.

Ich will noch bemerken, dafs dieser Satz sich auch ohne Benutzung der Teilerfunktion aus den identischen Gleichungen

$$\sum_{x=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{px}{q}\right] = -\left(\left[\frac{p\cdot 2}{q}\right]-\left[\frac{p\cdot 1}{q}\right]\right)-2\left(\left[\frac{p\cdot 3}{q}\right]-\left[\frac{p\cdot 2}{q}\right]\right)-\cdots$$

$$-\frac{q-3}{2}\left(\left[\frac{p\cdot\frac{q-1}{2}}{q}\right]-\left[\frac{p\cdot\frac{q-3}{2}}{q}\right]\right)+\frac{q-1}{2}\cdot\left[\frac{p\cdot\frac{q-1}{2}}{q}\right]$$

und

$$\sum_{x=1}^{\frac{q-1}{2}}\left[\frac{px}{q}\right] = -\left[\frac{p\cdot 1}{q}\right]-2\left(\left[\frac{p\cdot 2}{q}\right]-\left[\frac{p\cdot 1}{q}\right]\right)-\cdots$$

$$-\frac{q-1}{2}\cdot\left(\left[\frac{p\cdot\frac{q-1}{2}}{q}\right]-\left[\frac{p\cdot\frac{q-3}{2}}{q}\right]\right)+\frac{q+1}{2}\cdot\left[\frac{p\cdot\frac{q-1}{2}}{q}\right]$$

ableiten läfst.

Bei den Betrachtungen dieses Paragraphen hat es sich an einem Beispiel gezeigt, dafs man die Teiler, die der Teilerbedingung genügen, auch direkt berechnen kann. Man kann nun auch bei den allgemeinen Formeln ähnliche Überlegungen anstellen wie bei dem letzten Beispiel, aber man erhält dadurch nichts Neues, sondern nur wieder auf einem Umwege die allgemeine Transformationsformel, die ich im 103. Bande des Crelleschen Journals, S. 118 abgeleitet habe.

Zur Integration der Elastizitätsgleichungen isotroper Rotationskörper.

Von Paul Jaerisch in Hamburg.

In der Arbeit: „Allgemeine Integration der Elastizitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper“*) sowie in einer früheren Arbeit, die sich auf die Kugel bezog*), habe ich die Integration der Elastizitätsgleichungen ausgeführt, indem ich zunächst nachgewiesen habe, dafs sich die Komponenten einer Verrückung in longitudinale und transversale Teile zerlegen lassen. Es giebt aber noch einen andern allgemeineren Weg, der diesen Nachweis nicht zur Voraussetzung hat, den ich hier soweit verfolgen will, um zu zeigen, dafs sich auf diesem Wege die gleichen Resultate wie früher ergeben.

Hinsichtlich der Wahl der zur Integration einzuführenden Funktionen, durch welche ich die Komponenten einer Verrückung aus-

*) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 104 und 88.

drücke, schliefse ich mich an die erste Arbeit an und verweise die nähere Begründung auf diese Arbeit sowie auch hinsicht der im folgenden nicht genannten Transformationsformeln.

§ 1. In den allgemeinen orthogonalen Koordinaten

$$\varrho = F(x, y, z), \quad \varrho_1 = F_1(x, y, z), \quad \varrho_2 = F_2(x, y, z)$$

nehmen die Elastizitätsgleichungen die folgende Form an

$$(1) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho_2} - \frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho_1} &= \frac{\lambda+2\mu}{\mu} g \frac{d\Theta}{d\varrho} - \frac{\delta}{\mu}\frac{g}{h}\frac{d^2R}{dt^2}, \\ \frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho} - \frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_2} &= \frac{\lambda+2\mu}{\mu} g_1 \frac{d\Theta}{d\varrho_1} - \frac{\delta}{\mu}\frac{g_1}{h_1}\frac{d^2R_1}{dt^2}, \\ \frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_1} - \frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho} &= \frac{\lambda+2\mu}{\mu} g_2 \frac{d\Theta}{d\varrho_2} - \frac{\delta}{\mu}\frac{g_2}{h_2}\frac{d^2R_2}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

Mit λ und μ sind die beiden Elastizitätskonstanten, mit δ Dichtigkeit, mit R, R_1, R_2 die Komponenten der Verrückung zeichnet. Die g und h sind gewisse Funktionen der ϱ und von y, z.*) Θ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind zur Abkürzung gesetzt für:

$$(2a) \quad \Theta = \frac{1}{g g_1 g_2}\left\{\frac{d\frac{g}{h}R}{d\varrho} + \frac{d\frac{g_1}{h_1}R_1}{d\varrho_1} + \frac{d\frac{g_2}{h_2}R_2}{d\varrho_2}\right\};$$

$$(2b) \quad \left\{\begin{aligned} g\mathfrak{A} &= \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\varrho_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\varrho_1}, \\ g_1\mathfrak{B} &= \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\varrho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\varrho_2}, \\ g_2\mathfrak{C} &= \frac{d\frac{R}{h}}{d\varrho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\varrho}. \end{aligned}\right.$$

Von äufseren Kräften ist abgesehen, da die denselben entsprech den Glieder den schliefslich erhaltenen Integralsystemen leicht hin gefügt werden können.

Es giebt nun zwei Wege, um die Integration der obigen G chungen in der bezeichneten Weise durchzuführen. Zunächst las sich aus (1), (2a und b) folgende Gleichungen ableiten (a. a. S. 181 und 182):

$$(3a) \quad \frac{d}{d\varrho} g \frac{d\Theta}{d\varrho} + \frac{d}{d\varrho_1} g_1 \frac{d\Theta}{d\varrho_1} + \frac{d}{d\varrho_2} g_2 \frac{d\Theta}{d\varrho_2} + \frac{\delta}{\lambda+2\mu} g g_1 g_2 \frac{d^2\Theta}{dt^2};$$

*) a. a. O. S. 181.

$$(3b)\quad \begin{cases} \frac{d}{d\varrho_2}\frac{1}{g_1}\left(\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho}-\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_2}\right)-\frac{d}{d\varrho_1}\frac{1}{g_2}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_1}-\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho}\right)=-\frac{\delta}{\mu}g\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2}, \\ \frac{d}{d\varrho}\frac{1}{g_2}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_1}-\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho}\right)-\frac{d}{d\varrho_2}\frac{1}{g}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho_2}-\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho_1}\right)=-\frac{\delta}{\mu}g_1\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2}, \\ \frac{d}{d\varrho_1}\frac{1}{g}\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\varrho_2}-\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho_1}\right)-\frac{d}{d\varrho}\frac{1}{g_1}\left(\frac{d\mathfrak{C}}{d\varrho}-\frac{d\mathfrak{A}}{d\varrho_2}\right)=-\frac{\delta}{\mu}g_2\frac{d^2\mathfrak{C}}{dt^2}. \end{cases}$$

Werden durch diese Gleichungen θ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, wo θ die Volumenänderung, $\frac{h}{2}\mathfrak{A}$, $\frac{h_1}{2}\mathfrak{B}$, $\frac{h_2}{2}\mathfrak{C}$ die Komponenten einer Elementarrotation bezeichnen, bestimmt, so ergeben die Gleichungen (1) die Komponenten der Verrückung R, R_1, R_2 nach zweimaliger Integration nach t. Diesen Weg habe ich in meiner Arbeit „Zur Theorie der elastischen Kugelwellen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichts. 1893. Progr. Nr. 735" eingeschlagen. Hier wähle ich den zweiten Weg, der darin besteht, dafs die Gleichungen (1) durch passende Transformation auf eine Form übergeführt werden, in der sich das System simultaner partieller Differentialgleichungen, durch Gleichungen, die nur eine abhängige Variable enthalten, ersetzen läfst.

Dieser zweite Weg ist deshalb vorzuziehen, weil er sich enger an die Integrationsmethode in der genannten Arbeit anschliefst, und weil aus diesem Grunde hier die Rechnung nicht vollständig durchgeführt zu werden braucht.

§ 2. Für ϱ, ϱ_1, ϱ_2 werden jetzt die Variablen ξ, η, φ eingeführt durch folgende Festsetzung:

$$(4)\quad \ldots\ldots\ldots\quad x+ir=f(\xi+i\eta);$$

$$(4a)\quad \ldots\ldots\quad y=r\cos\varphi,\qquad z=r\sin\varphi,$$

wo i für $\sqrt{-1}$ gesetzt ist. Dann ergeben sich mir in der genannten Arbeit S. 185 folgende Transformationsformeln, die im folgenden Anwendung finden:

$$(4b)\quad \ldots\ldots\quad \begin{cases} \frac{dx}{d\xi}=\frac{dr}{d\eta}, & \frac{dx}{d\eta}=-\frac{dr}{d\xi}; \\ \frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{d^2x}{d\eta^2}=0, & \frac{d^2r}{d\xi^2}+\frac{d^2r}{d\eta^2}=0; \end{cases}$$

$$(4c)\quad \ldots\ldots\quad \begin{cases} \frac{1}{h^2}=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2=\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2, \\ h_1=h, \quad h_2=\frac{1}{r}, \\ g=g_1=r, \quad g_2=\frac{1}{rh^2}. \end{cases}$$

Ferner bestehen für irgend zwei Funktionen F und f folgende Be-
ie[illegible]

$$(4d)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{d\xi}\dfrac{dr}{d\xi} + \dfrac{dF}{d\eta}\dfrac{dr}{d\eta} = \dfrac{1}{h^2}\dfrac{dF}{dr}, \\ \dfrac{dF}{d\xi}\dfrac{dr}{d\eta} - \dfrac{dF}{d\eta}\dfrac{dr}{d\xi} = \dfrac{1}{h^2}\dfrac{dF}{dx}, \end{cases}$$

$$(4c)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{d\xi}\dfrac{df}{d\xi} + \dfrac{dF}{d\eta}\dfrac{df}{d\eta} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{dF}{dr}\dfrac{df}{dr} + \dfrac{dF}{dx}\dfrac{df}{dx}\right), \\ \dfrac{dF}{d\xi}\dfrac{df}{d\eta} - \dfrac{dF}{d\eta}\dfrac{df}{d\xi} = -\dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{dF}{dr}\dfrac{df}{dx} - \dfrac{dF}{dx}\dfrac{df}{dr}\right), \\ \dfrac{d}{d\xi}f\dfrac{dF}{d\xi} + \dfrac{d}{d\eta}f\dfrac{dF}{d\eta} = \dfrac{1}{h^2}\left(\dfrac{d}{dr}f\dfrac{dF}{dr} + \dfrac{d}{dx}f\dfrac{dF}{dx}\right). \end{cases}$$

Durch (4) und (4a) sind für die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z einmal die Cylinderkoordinaten x, r, φ eingeführt, und dann ist durch die Funktion f, welche für jeden Rotationskörper passend zu bestimmen ist, ein drittes Koordinatensystem festgelegt, durch welches man jeden Punkt des Rotationskörpers als Schnittpunkt dreier orthogonalen Flächen der Flächenscharen mit den Parametern φ, ξ, η definiert; diese sind einmal die Meridianebenen und zweitens Flächen, welche durch Rotation derjenigen Kurven um die Achsen des Körpers hervorgehen, welche aus (4) durch Trennung des Reellen vom Imaginären erhalten werden.

§ 3. In den Koordinaten φ, ξ, η nehmen die Elastizitätsgleichungen folgende Form an:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{B}}{d\varphi} - \dfrac{d\mathfrak{C}}{d\eta} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\, r\, \dfrac{d\Theta}{d\xi} - \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{r}{h}\dfrac{d^2R}{dt^2}, \\ \dfrac{d\mathfrak{C}}{d\xi} - \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\varphi} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\, r\, \dfrac{d\Theta}{d\eta} - \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{r}{h}\dfrac{d^2R_1}{dt^2}, \\ \dfrac{d\mathfrak{A}}{d\eta} - \dfrac{d\mathfrak{B}}{d\xi} = \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\dfrac{1}{rh^2}\dfrac{d\Theta}{d\varphi} - \dfrac{\delta}{\mu}\dfrac{1}{h^2}\dfrac{d^2R_2}{dt^2}, \end{cases}$$

mit den Abkürzungen:

$$(5a)\quad \Theta = \frac{h^2}{r}\left(d\frac{rR}{h}{}_{d\xi} + d\frac{rR_1}{h}{}_{d\eta} + d\frac{R_2}{h^2}{}_{d\varphi}\right);$$

$$(5b)\quad \begin{cases} r\mathfrak{A} = d\dfrac{R_1}{h}{}_{d\varphi} - \dfrac{drR_2}{d\eta}, \\ r\mathfrak{B} = \dfrac{drR_2}{d\xi} - d\dfrac{R}{h}{}_{d\varphi}, \\ \dfrac{r}{h^2}\mathfrak{C} = d\dfrac{R}{h}{}_{d\eta} - d\dfrac{R_1}{h}{}_{d\xi}. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung der Rechnung möge die Annahme gemacht werden, dafs die Verrückungen periodische Funktionen der Zeit sind. Diese Annahme ist für elastische Schwingungen berechtigt, aber für das Folgende, worauf insbesondere hingewiesen werde, nicht notwendig, während sich die Formeln dadurch einfacher gestalten.

Wir setzen also

$$(6)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \frac{R}{h} = u \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt, \\ \frac{R_1}{h} = v \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt, \\ r R_2 = w \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt. \end{cases}$$

Dadurch gehen zunächst die Ausdrücke (5a) und (5b) in folgende über

$$(7)\quad \cdots\cdots \Theta = \frac{\sigma}{\omega^2} \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt,$$

$$(7a)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' \overset{\cos}{\sin} \sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\, kt, \end{cases}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(7b)\quad \cdots\cdots \begin{cases} r\mathfrak{A}' = \frac{dv}{d\varphi} - \frac{dw}{d\eta}, \\ r\mathfrak{B}' = \frac{dw}{d\xi} - \frac{du}{d\varphi}, \\ \frac{\mathfrak{C}'}{rh^2} = \frac{du}{d\eta} - \frac{dv}{d\xi}; \end{cases}$$

$$(7c)\quad \cdots\cdots \frac{\sigma}{\omega^2} = \frac{h^2}{r}\left(\frac{dru}{d\xi} + \frac{drv}{d\eta} + \frac{1}{rh^2}\frac{dw}{d\varphi}\right),$$

$$(7d)\quad \cdots\cdots \omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}.$$

Die Gleichungen (3) nehmen folgende Form an:

$$(7e)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \frac{d\mathfrak{B}'}{d\varphi} - \frac{d\mathfrak{C}'}{d\eta} = r\frac{d\sigma}{d\xi} + k^2 ru, \\ \frac{d\mathfrak{C}'}{d\xi} - \frac{d\mathfrak{A}'}{d\varphi} = r\frac{d\sigma}{d\eta} + k^2 rv, \\ \frac{d\mathfrak{A}'}{d\eta} - \frac{d\mathfrak{B}'}{d\xi} = \frac{1}{rh^2}\frac{d\sigma}{d\varphi} + k^2\frac{w}{rh^2}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen und (7b) erhält man zur Bestimmung von σ die Gleichung

$$(8) \quad \cdot \cdot \quad \frac{1}{r}\frac{d}{d\xi} r \frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{1}{r}\frac{d}{d\eta} r \frac{d\sigma}{d\eta} + \frac{1}{r^2 h^2}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\sigma}{h^2} = 0.$$

§. 4. Statt u, v, w, werden drei andere Unbekannte, die ich hier s, p, q nenne, durch die folgenden Festsetzungen

$$(9) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \begin{cases} u = \left(\frac{ds}{d\xi} - p\frac{dr}{d\eta} + q\frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ v = \left(\frac{ds}{d\eta} + p\frac{dr}{d\xi} + q\frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \\ w = s\frac{d\Phi}{d\varphi} \end{cases}$$

eingeführt, wo Φ nur von φ, und s, p, q nur von ξ und η abhängig sein sollen.

In Übereinstimmung mit den Formeln (23) der genannten Arbeit ist in den Ausdrücken (9) für u, v, w, ein von φ abhängiger Faktor abgetrennt. Dadurch wird die folgende Rechnung einfacher und übersichtlicher. Aber sie würde sich doch ohne diese besondere Annahme über die Abhängigkeit der eingeführten Funktionen s, p, q von φ in gleicher Weise durchführen lassen.

Auch hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von den eingeführten Gröfsen s, p, q sind die Ausdrücke (9) nach Analogie derjenigen (23) jener Arbeit gebildet. Sie stellen den allgemeinsten Ausdruck für ein partikuläres Integralsystem dar, weil für u, v, w drei andere durch die Differentialgleichungen zu bestimmende Funktionen s, p, q eingeführt sind.

In Beziehung auf φ können nur periodische Funktionen mit der Periode 2π auftreten. Denn nach einer Änderung des Winkels φ um 2π müssen die Komponenten einer Verrückung und daher auch u, v, w wieder dieselben Werte annehmen. Wir setzen daher

$$(10) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \Phi = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \nu\varphi,$$

wo ν eine zu bestimmende Konstante ist.

Durch die Ausdrücke (9) nehmen zunächst die Werte (7b) für $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die folgende Form an:

$$(11) \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \begin{cases} \mathfrak{A}' = \left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\xi} + \frac{q}{r}\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ \mathfrak{B}' = \left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\eta} - \frac{q}{r}\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ \mathfrak{C}' = -r\left(\frac{dp}{dr} + \frac{dp}{dx}\right)\Phi. \end{cases}$$

Zur näheren Begründung verweise ich auf §. 6 der genannten Arbeit. Es entsprechen sich die folgenden Systeme von Gleichungen: hier (7b) und (11), dort (23) und (23b).

Setzt man ferner

$$(11a) \quad \cdots\cdots\cdots \quad \sigma = \sigma' \Phi,$$

wo σ', wie oben s, p, q, nur noch von ξ und η abhängig sein soll, und weil nach (10)

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\nu^2\Phi$$

ist, so gehen die Gleichungen (7e) und (7c) in folgende über:

$$(12)\begin{cases} -\nu^2\left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\eta} - \frac{q}{r}\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{d}{d\eta}\left(r\frac{dp}{dr} + r\frac{dq}{dx}\right) = r\frac{d\sigma'}{d\xi} + k^2 r\left(\frac{ds}{d\xi} - p\frac{dr}{d\eta} + q\frac{dr}{d\xi}\right), \\ -\frac{d}{d\xi}\left(r\frac{dp}{dr} + r\frac{dq}{dx}\right) + \nu^2\left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\xi} + \frac{q}{r}\frac{dr}{d\eta}\right) = r\frac{d\sigma'}{d\eta} + k^2 r\left(\frac{ds}{d\eta} + p\frac{dr}{d\xi} + q\frac{dr}{d\eta}\right), \\ \frac{d}{d\eta}\left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\xi} + \frac{q}{r}\frac{dr}{d\eta}\right) - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\eta} + \frac{q}{r}\frac{dr}{d\xi}\right) = \frac{\sigma'}{rh^2} + k^2\frac{s}{rh^2}, \\ \frac{\sigma'}{\omega^2} = \frac{h^2}{r}\left\{\frac{d}{d\xi}r\frac{ds}{d\xi} + \frac{d}{d\eta}r\frac{ds}{d\eta} - \frac{\nu^2}{rh^2}s + \frac{d}{d\xi}r\left(-p\frac{dr}{d\eta} + q\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{d}{d\eta}r\left(p\frac{dr}{d\xi} + q\frac{dr}{d\eta}\right)\right\}. \end{cases}$$

§ 5. In dieser Form sind die Elastizitätsgleichungen leicht in Cylinderkoordinaten transformierbar, in denen sie sich auf die bekannte partielle Differentialgleichung

$$\Delta^2 F + m^2 F = 0$$

zurückführen lassen, wo Δ^2 hier die Bedeutung

$$\Delta^2 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr} + \frac{d^2F}{dx^2} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)F = 0 \qquad \text{hat.}$$

Dazu sind die Transformationsformeln § 2, sowie die folgenden

$$(13) \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} \frac{dF}{d\xi} = \frac{dF}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\xi}, \\ \frac{dF}{d\eta} = \frac{dF}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{dF}{dx}\frac{dr}{d\xi} \end{cases}$$

zu beachten, von denen die zweite mit Rücksicht auf (4b) gebildet ist.

Hierdurch gehen zunächst die ersten beiden Gleichungen (12) in folgende über:

$$\begin{aligned} &-\nu^2\left(\frac{p}{r}\frac{dx}{d\xi} - \frac{q}{r}\frac{dr}{d\xi}\right) + \frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr} + r\frac{dq}{dx}\right)\frac{dx}{d\xi} - \frac{d}{dx}\left(r\frac{dp}{dr} + r\frac{dq}{dx}\right)\frac{dr}{d\xi} \\ &= r\left(\frac{d\sigma'}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{d\sigma'}{dx}\frac{dx}{d\xi}\right) + k^2 r\left(\frac{ds}{dr}\frac{dr}{d\xi} + \frac{ds}{dx}\frac{dx}{d\xi} + p\frac{dx}{d\xi} + q\frac{dr}{d\xi}\right), \\ &-\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr} + r\frac{dq}{dx}\right)\frac{dr}{d\xi} - \frac{d}{dx}\left(r\frac{dp}{dr} + r\frac{dq}{dx}\right)\frac{dx}{d\xi} + \nu^2\left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\xi} + \frac{q}{r}\frac{dx}{d\xi}\right) \\ &= r\left(\frac{d\sigma'}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{d\sigma'}{dx}\frac{dr}{d\xi}\right) + k^2 r\left(\frac{ds}{dr}\frac{dx}{d\xi} - \frac{ds}{dx}\frac{dr}{d\xi} + p\frac{dr}{d\xi} + q\frac{dx}{d\xi}\right) \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen gehen, wenn man sie $d\xi$ multipliziert und die Faktoren der von einander unabhängigen Differentiale dr und dx für sich verschwinden läfst, in die folgenden einfacheren über:

$$(14)\quad \begin{cases} -\nu^2\frac{p}{r}+\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}+r\frac{dq}{dx}\right)=r\frac{d\sigma'}{dx}+k^2r\left(\frac{ds}{dx}-p\right), \\ \nu^2\frac{q}{r}-\frac{d}{dx}\left(r\frac{dp}{dr}+r\frac{dq}{dx}\right)=r\frac{d\sigma'}{dr}+k^2r\left(\frac{ds}{dr}+q\right). \end{cases}$$

Die dritte Gleichung (12) giebt zunächst durch Ausführung der Differentiationen

$$\frac{dr}{d\xi}\frac{d\frac{p}{r}}{d\eta}-\frac{dr}{d\eta}\frac{d\frac{p}{r}}{d\xi}+\frac{dr}{d\eta}\frac{d\frac{q}{r}}{d\eta}+\frac{dr}{d\xi}\frac{d\frac{q}{r}}{d\xi}=\frac{\sigma'}{rh^2}+k^2\frac{s}{rh^2}$$

und durch Anwendung der Formeln (13) und mit Rücksicht auf (4b und c):

$$(15)\quad \cdots\cdots\quad -\frac{d\frac{p}{r}}{dx}+\frac{d\frac{q}{r}}{dr}=\frac{\sigma'}{r}+k^2\frac{s}{r}.$$

Die letzte Gleichung (12) geht durch Anwendung der dritten Gleichung (4c) sowie durch Ausführung der Differentation in den letzten Gliedern über in

$$\frac{\sigma'}{\omega^2}=\frac{h^2}{r}\left\{\frac{1}{h^2}\left(\frac{d}{dr}r\frac{ds}{dr}+\frac{d}{dx}r\frac{ds}{dx}\right)-\nu^2\frac{s}{rh^2}-\frac{dx}{d\xi}\frac{drp}{d\xi}+\frac{dr}{d\xi}\frac{drq}{d\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{dr}{d\xi}\frac{drp}{d\eta}+\frac{dr}{d\eta}\frac{drq}{d\eta}\right\}$$

und dann mit Anwendung der Formeln (13) sowie mit Rücksicht auf den Wert für h in (4c) in die folgende

$$(16)\quad \frac{\sigma'}{\omega^2}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds}{dr}+\frac{d^2s}{dx^2}-\nu^2\frac{s}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{drp}{dx}+\frac{1}{r}\frac{drq}{dr}.$$

Es ist noch die Gleichung (8) zu transformieren. Sie geht mit Rücksicht auf (11a) und durch die dritte Gleichung (4c) über in

$$(17)\quad \cdots\cdots\quad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\sigma'}{dr}+\frac{d^2\sigma'}{dx^2}+\left(\frac{k^2}{\omega^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\sigma'=0.$$

§ 6. Es hat sich ergeben, dafs das Gleichungssystem (12) durch die Gleichungen (14), (15) und (16) ersetzt werden kann. Und fügen wir die Gleichung (17) hinzu, so ist demnach folgendes System simultaner partieller Differentialgleichungen zu integrieren:

$$(18)\cdot\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dp}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^2rq}{dr\,dx}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)p=\frac{d\sigma'}{dx}+k^2\frac{ds}{dx},\\ \frac{d^2q}{dx}r+\frac{d^2p}{dr\,dx}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)q=-\frac{d\sigma'}{dr}-k^2\frac{ds}{dr},\\ \frac{dp}{dx}-r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}=-\sigma'-k^2s,\\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds}{dr}+\frac{d^2s}{dx^2}-\frac{\nu^2}{r^2}s=\frac{\sigma'}{\omega^2}+\frac{dp}{dx}-\frac{1}{r}\frac{drq}{dr},\\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\sigma'}{dr}+\frac{d^2\sigma'}{dx^2}+\left(\frac{k^2}{\omega^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\sigma'=0.\end{cases}$$

Die ersten beiden Gleichungen sowie die vierte Gleichung dieses Systems nehmen durch die dritte die einfacheren Formen an:

$$(19)\cdot\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dp}{dr}+\frac{d^2p}{dx^2}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)p=-2\frac{d\frac{q}{r}}{dx},\\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}+\frac{d^2\frac{q}{r}}{dx^2}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\frac{q}{r}=0,\end{cases}$$

$$(19a)\cdot\quad\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{ds}{dr}+\frac{d^2s}{dx^2}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)s=-2\frac{q}{r}+\sigma'\frac{1-\omega^2}{\omega^2}.$$

Da die Gleichung (8) aus den Gleichungen (7c) abgeleitet worden ist, so mufs eine der vorliegenden Gleichungen durch die übrigen identisch erfüllt sein. Das möge für die Gleichung (19a) erwiesen werden. Zugleich kann dieser Nachweis zur Bestätigung der Richtigkeit der ausgeführten Rechnung dienen.

Durch die dritte Gleichung (18) geht (19a) zunächst über in

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left(-\frac{dp}{dx}+r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}-\sigma'\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{dp}{dx}+r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}-\sigma'\right)$$
$$+\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\left(-\frac{dp}{d}+r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}-\sigma'\right)=-2k^2\frac{q}{r}+k^2\sigma'\frac{1-\omega^2}{\omega^2}$$

und ferner durch die Gleichungen (19) in

$$2\frac{d^2\frac{q}{r}}{dx^2}-2\frac{d^2\frac{q}{r}}{dx^2}-2k^2\frac{q}{r}+\left(\frac{k^2}{\omega^2}-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\sigma'-\left(k^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\sigma'$$
$$=-2k^2\frac{q}{r}+k^2\sigma'\frac{1-\omega^2}{\omega^2}.$$

Diese Gleichung ist identisch erfüllt.

Es bleiben durch die vier Unbekannten p, q, s, σ' vier Gleichungen zu erfüllen übrig, nämlich die beiden Gleichungen (19),

wie die dritte und fünfte Gleichung (18). Diese Gleichungen zeigen, dafs jedenfalls Wertsysteme p, q, s existieren, welche die Gleichungen für $\sigma' = 0$ erfüllen; für diese mufs nach (11a) die Volumenänderung $\theta = 0$ sein. Daher liefern diese Wertsysteme transversale Teile der Komponenten einer Verrückung.

Aber die für $\sigma' = 0$ entstehenden Gleichungen sind identisch mit denjenigen, welche sich mir in der genannten Arbeit unter (21) S. 190 für p, q, ϑ ergeben haben, wenn über die Konstante k passend verfügt wird. ϑ hat dort die gleiche Bedeutung wie hier s für den Fall, dafs $\sigma' = 0$ ist. Und da für $\sigma' = 0$ also auch für $\sigma = 0$ hier die Zeichen u, v, w die gleiche Bedeutung haben wie in jener Arbeit, wie der Vergleich der Formeln hier (6), dort (10) zeigt, so ergeben die Ausdrücke (9) die gleichen Werte für die transversalen Teile der Komponenten einer Verrückung, wie diejenigen (23) jener Arbeit.

Wird $\sigma' \gtrless 0$ vorausgesetzt, so hat man ein von σ' abhängiges und mit σ' zugleich verschwindendes Wertsystem s, p, q aufzusuchen, welches obigen Gleichungen genügt. Da aber p und q der Gleichungen (19) wegen von σ' unabhängig sind, so ist für das von σ abhängige Wertsystem

$$p = q = 0$$

zu setzen. Dann aber ergiebt sich aus der dritten Gleichung (13)

$$s = -\frac{\sigma'}{k^2}.$$

Setzt man diese Werte für p, q und s in (9) ein, so folgt mit Rücksicht auf (7) und (6), dafs auch die longitudinalen Teile dieselben Werte, wie früher, bis auf einen konstanten Faktor erhalten, wobei wieder über k passend zu verfügen ist.

Wir haben demnach gezeigt, dafs man auf anderem Wege, ohne die Zerlegbarkeit der Komponenten der elastischen Verrückungen vorauszusetzen, zu den gleichen Resultaten gelangen kann.

Eine Funktion mit Symmetrieen in jedem Intervall.

Von Alfred Köpcke in Ottensen.

Im folgenden soll eine stetige Funktion $\Omega(x)$ besprochen werden, die in jedem beliebigen Intervall unendlich viele Punkte x_n besitzt, zu deren beiden Seiten sie auf einer endlichen Strecke δ_n symmetrisch verläuft, so dafs für alle $\delta \lessgtr \delta_n$ die Beziehung gilt:

$$\Omega(x_n + \delta) = \Omega(x_n - \delta),$$

und zwar ohne dafs $\Omega(x)$ in dem Intervall von $x_n - \delta_n$ bis $x_n + \delta_n$ konstant ist. Die Funktion mufs dann in jedem Intervall unendlich viele Maxima haben; denn es mufs entweder in x_n selbst ein Maximum oder Minimum eintreten, oder es müssen unendlich viele Oszillationen zu beiden Seiten von x_n symmetrisch verteilt sein. Als Beispiel für eine Funktion mit Maximis in jedem Intervall habe ich sie mir schon im Jahre 1875 gebildet, bisher aber mit Ausnahme einer kurzen Notiz in einer der autographierten Mitteilungen der Gesellschaft nichts über sie veröffentlicht, weil sie allerdings nicht geeignet ist, irgend eine Frage von prinzipieller Bedeutung zu entscheiden. Da sie indessen auch heute noch das einzige Beispiel bildet für die geschilderte Eigenschaft, überall Symmetrieen zu besitzen, und da vielleicht auch ihr Aufbau interessieren kann, der hervorgegangen ist aus demjenigen der bekannten Riemannschen Funktion mit Unstetigkeiten in jedem Intervall, mag hier in möglichster Kürze die Definition und der Beweis für die Eigenschaften der Funktion gegeben werden.

Es soll mit $[x]$ der positiv genommene Unterschied zwischen x und der zunächst gelegenen ganzen Zahl, für ein $x = m + \frac{1}{2}$ aber der Wert $\frac{1}{2}$ bezeichnet werden, so dafs $[x]$ eine stetige Funktion von zickzackförmigem Verlaufe ist. Dann hat

$$\Omega(x) = [x] + \frac{\left[2x + \frac{1}{2}\right]}{2} + \sum_0^\infty r \left\{ \sum_{2^{2r+1}+1}^{2^{2r+2}} \frac{[n!x]}{n!} + \sum_{2^{2r+2}+1}^{2^{2r+3}} \frac{\left[n!x + \frac{1}{2}\right]}{n!} \right\}$$

in jedem Intervall Symmetriepunkte, ohne in einem noch so kleinen Intervalle konstant zu sein.

$\Omega(x)$ ist, wenn es ohne Anwendung von Summenzeichen hingeschrieben wird, eine einfach unendliche Reihe von Gliedern der zwei Formen $\frac{[n!x]}{n!}$ und $\frac{\left[n!x + \frac{1}{2}\right]}{n!}$, und zwar folgen sich stets gerade so viele Glieder von gleicher Form, wie die Reihe vor Eintritt dieser Form bereits Glieder besitzt. Im Beweise soll die Summe der q ersten Glieder der einfach unendlichen Reihe für $\Omega(x)$ mit $\Omega_q(x)$ bezeichnet werden.

Da die Zähler aller Glieder immer $\leqq \frac{1}{2}$ sind, ist für jedes x der Wert der Reihe $< \frac{1}{2} \sum_1^\infty \frac{1}{n!} = \frac{1}{2}(e - 1)$, die Reihe also überall unbedingt und gleichmäfsig konvergent und die Funktion $\Omega(x)$ stetig. Dafs $\Omega(x)$ nicht etwa überall konstant ist, geht aus der Beziehung $\Omega\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \Omega(0)$ hervor.

Man wähle nun eine beliebige ganze Zahl R, dann eine ganze Zahl $c \leqq 2^{2R+1}$ und eine beliebige ganze Zahl Q; damit bilde man erstens die ganze Zahl $N-1 = 2^{2R+1} + c$ und dann zweitens den Bruch $\frac{Q}{N!}$.

Hierauf bilde man für alle $k < N$ die Differenzen α_k zwischen $\frac{k!\,Q}{N!}$ und der nächst gröfseren Zahl von der Form $\frac{M_k}{2}$ (für ganzzahlige M_k) und bezeichne das kleinste dieser α_k mit α.

Dann ist in der Summe $\Omega_{N-1}(x)$ für $x = \frac{Q}{N!} + \xi = \bar{x}$, so lange ξ von 0 bis $\frac{\alpha}{N!}$ wächst, jedes Glied fortwährend entweder im Wachsen oder im Abnehmen. Es seien a wachsende, $a+b$ abnehmende Glieder vorhanden, so gilt:

$$a + a + b = N - 1$$

und

$$0 \leqq a \leqq N-1$$

$$-(N-1) \leqq b \leqq +(N-1).$$

Nun ist aber die Änderung jedes einzelnen Gliedes, wenn x um ξ wächst, einfach $+\xi$ oder $-\xi$, je nach der Form des betreffenden Gliedes; darum gilt

$$\Omega_{N-1}\left(\frac{Q}{N!} + \xi\right) = \Omega_{N-1}\left(\frac{Q}{N!}\right) - b \cdot \xi$$

und

$$\Omega_{N-1}(\bar{x} \pm \delta) = \Omega_{N-1}(\bar{x}) \mp b \cdot \delta,$$

wenn δ den beiden Ungleichheiten genügt:

$$\xi + \delta < \frac{\alpha}{N!} \quad \text{und} \quad \xi - \delta > 0.$$

Da $N-1$ zwischen 2^{2R+1} und 2^{2R+2} liegt, folgen auf das $(N-1)$te Glied der Reihe für $\Omega(x)$ zunächst Glieder von der Form $\frac{[k!\,x]}{k!}$, u. zw. $2^{2R+1} - c$ solcher Glieder. Dann folgen 2^{2R+2} Glieder der Form $\frac{\left[k!\,x + \frac{1}{2}\right]}{k!}$. Wählt man $\xi < \frac{\alpha}{(2^{2R+3})!}$, so ist für alle diese Glieder $\frac{k!\,Q}{N!} \gtreqless Q$ eine ganze Zahl und $k!\,\xi \leqq \frac{1}{2}$; darum sind für ein δ, das den Ungleichheiten

$$\xi + \delta < \frac{\alpha}{2^{2R+3}!} \quad \text{und} \quad \xi - \delta > 0$$

genügt, die Glieder der ersten Form für positive δ im Wachsen, für negative δ im Abnehmen, und umgekehrt verhalten sich die Glieder der zweiten Form. Beachtet man dann noch die Beziehung

$$2^{2R+1} - c - 2^{2R+2} = -(N-1),$$

so folgt:

$$\Omega_{2^{2R+3}}(\bar{x} \pm \delta) = \Omega_{2^{2R+3}}(\bar{x}) \mp (b + N - 1)\delta.$$

Da $b + N - 1 \leqq 2^{2R+3}$, kann man von den jetzt folgenden 2^{2R+3} Gliedern der ersten Form die ersten $b + N - 1$ Glieder wählen und die Zahl $P_0 - 1 = 2^{2R+3} + b + N - 1$ bilden; dann gilt für alle ξ und δ, die den drei Ungleichheiten

$$\xi < \frac{\alpha}{(P_0 - 1)!} = \beta_0, \quad \xi + \delta < \beta_0, \quad \xi - \delta > 0$$

genügen, die Beziehung:

$$\Omega_{P_0-1}(\bar{x} \pm \delta) = \Omega_{P_0-1}(\bar{x}),$$

d. h. die Funktion $\Omega_{P_0-1}(x)$ ist von $\bar{x} - \delta$ bis $\bar{x} + \delta$ konstant.

Dann liegt $2^{2R+3} + b + N - 1 = P_0 - 1$ zwischen 2^{2R+3} und 2^{2R+4}, und wenn man die Zahl

$$P_1 - 1 = 2^{2R+5} + 2^{2R+3} + b + N - 1$$

bildet, folgt, dafs für alle ξ und δ, die den drei Ungleichheiten

$$\xi < \frac{\alpha}{(P_1 - 1)!} = \beta_1, \quad \xi + \delta < \beta_1, \quad \xi - \delta > 0$$

genügen, die Beziehung gilt:

$$\Omega_{P_1-1}(\bar{x} \pm \delta) = \Omega_{P_1-1}(\bar{x}),$$

dafs also auch $\Omega_{P_1-1}(x)$ in einem gewissen Bereiche konstant ist.

Bildet man weiter die Zahl

$$P_2 - 1 = 2^{2R+7} + 2^{2R+5} + 2^{2R+3} + b + N - 1,$$

so folgt, dafs auch $\Omega_{P_2-1}(x)$ in einem gewissen Bereiche konstant ist.

Bildet man endlich allgemein für $n = 1, 2, 3, \ldots$ die Zahlen

$$P_n - 1 = 2^{2R+3+2n} + 2^{2R+3}(2^{2n-2} + 2^{2n-4} + \cdots + 2^2 + 1) + b + N - 1,$$

und wählt man die ganze Zahl p so grofs, dafs für alle $n \geqq p$ gilt

$$\frac{1}{P_n} < \alpha,$$

so ist für alle ξ und δ, die den drei Ungleichheiten

$$\xi < \frac{\alpha}{(P_n - 1)!} = \beta_n, \quad \xi + \delta < \beta_n, \quad \xi - \delta > 0$$

genügen, die Funktion $\Omega_{P_n-1}(x)$ konstant.

Der Ungleichheit für ξ genügt nun aber bei $n \geqq p$ der Wert $\xi = \frac{1}{P_n!}$, womit dann entsteht:

$$x = \frac{Q}{N!} + \frac{1}{P_n!} = x_n.$$

Für dieses x_n ist aber $k!x_n$, wenn $k \geq P_n$ ist, eine ganze Zahl; darum gilt für jedes beliebige Δ:

$$\Omega(x_n + \Delta) - \Omega_{P_n-1}(x_n + \Delta) = \Omega(x_n - \Delta) - \Omega_{P_n-1}(x_n - \Delta).$$

Wird hierin $\Delta = \delta$ gesetzt, so folgt:

$$\Omega(x_n + \delta) = \Omega(x_n - \delta),$$

d. h. in $\Omega(x)$ ist x_n ein Symmetriepunkt für die Strecke von $x_n - \delta_n$ bis $x_n + \delta_n$, wenn δ_n der gröfste Wert von δ ist, der bei $\xi = \frac{1}{P_n!}$ den beiden Ungleichheiten $\xi + \delta \leqq \beta_n$ und $\xi - \delta \geqq 0$ genügt, also der kleinere der beiden Werte $\frac{\alpha}{(P_n-1)!} - \frac{1}{P_n!}$ und $\frac{1}{P_n!}$.

Nun ist für jedes $n \geqq p$

$$x_n = \frac{Q}{N!} + \frac{1}{P_n!} < \frac{Q+1}{N!},$$

also liegen zwischen $\frac{Q}{N!}$ und $\frac{Q+1}{N!}$ unendlich viele solcher Symmetriepunkte. Ist dann beliebig ein Intervall von $x = e$ bis $x = e + \eta$ gegeben, so lassen sich N und Q stets so bestimmen, dafs $\frac{Q}{N!}$ und $\frac{Q+1}{N!}$ beide, damit also auch die unendlich vielen Symmetriepunkte zwischen ihnen im gegebenen Intervalle liegen.

Dafs trotzdem in demselben beliebig gegebenen Intervalle $\Omega(x)$ nicht konstant ist, läfst sich jetzt leicht nachweisen. Man bilde die Zahl

$$S_n - 1 = P_n - 1 - (b + N - 1) + 2^{2R+3+2n},$$

so ist $\frac{1}{S_n} < \alpha$. Setzt man dann $\frac{Q}{N!} + \frac{1}{S_n!} = x_s$, so folgt

$$\Omega_{S_n-1}(x_s) = \Omega_{S_n-1}\left(\frac{Q}{N!}\right) + (2^{2R+3+2n} - b - N + 1) \cdot \frac{1}{S_n!}.$$

Wenn nun $k \geqq S_n$ ist, wird sowohl $k!x_s$, wie auch $k!\frac{Q}{N!}$ eine ganze Zahl; darum gilt:

$$\Omega(x_s) - \Omega_{S_n-1}(x_s) = \Omega\left(\frac{Q}{N!}\right) - \Omega_{S_n-1}\left(\frac{Q}{N!}\right),$$

und hiermit folgt durch Addition zur vorigen Gleichung:

$$\mathfrak{Q}(x_s) = \mathfrak{Q}\left(\frac{Q}{N!}\right) + (2^{2R+3+2s} - b - N + 1) \cdot \frac{1}{S_n!},$$

d. h. $\mathfrak{Q}(x)$ ist in dem gegebenen Intervalle nicht konstant.

Natürlich kann man zu denselben Resultaten gelangen, wenn man von einer Zahl $N-1$ ausgeht, die zwischen 2^{2R+2} und 2^{2R+3} liegt.

Eine Entwickelung der Funktion $\mathfrak{Q}(x)$ in eine Fouriersche Reihe bietet keine Schwierigkeit; der Anfang der Kosinus-Reihe für $\mathfrak{Q}\left(\frac{x}{\pi}\right)$ lautet:

$$\mathfrak{Q}\left(\frac{x}{\pi}\right) = \tfrac{1}{4}(e-1) - \frac{2}{\pi^2}\left\{\cos 2x - \frac{\cos 4x}{2!} + \frac{\cos 6x}{9} + \frac{\cos 10x}{25}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!\,9}\right)\cos 12x + \frac{\cos 14x}{49} + \frac{\cos 18x}{81} - \frac{\cos 20x}{2!\,25} \cdots\cdots\right\}.$$

Der Koefficient von $\cos 2mx$ ist im allgemeinen einfach $-\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{m^2}$. Davon sind aber alle diejenigen Fälle ausgenommen, in denen sich m aufser als $m \cdot 1!$ noch in anderer Weise als Produkt einer Zahl r mit einer Fakultät $n!$ darstellen läfst; dann hat der Koefficient den Wert der Summe

$$\sum_r \pm \frac{1}{n!\,r^2} \cdot \frac{(-1)^r - 1}{\pi^2},$$

die über alle möglichen r auszudehnen ist, und in der das Zeichen $\pm$ zu wählen ist, je nachdem in $\mathfrak{Q}(x)$ das Glied $\frac{[n!\,x]}{n!}$ oder $\frac{\left[n!\,x + \frac{1}{2}\right]}{n!}$ vorkommt. Diese Regel liefert z. B. für die Koefficienten von $\cos 4x$, $\cos 12x$ und $\cos 20x$ die oben hingeschriebenen Werte, und giebt auch für den Fall, dafs nur $r = m$, also $n = 1$, möglich ist, den Wert $-\frac{1}{m^2} \cdot \frac{2}{\pi^2}$.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1895/96.

Zusammengestellt vom Jahrverwalter Prof. H. Ahlborn.

Versammlung am 9. Februar 1895.

(Nachtrag zum vorigen Jahresbericht.)

Die in der Januarsitzung unterbliebene Diskussion über den Vortrag des Herrn Ingenieur A. C. Nagel findet in dieser Sitzung statt. Die neuen Satzungen der Gesellschaft sind nach einer Umfrage bei den einheimischen Mitgliedern jetzt endgültig genehmigt. — Herr

Dr. Schäffer hat seinen Austritt aus der Gesellschaft erklärt. — Herr Professor Schubert hält einen Vortrag über ein aus dem bekannten Problem der 15 Christen und 15 Türken und anderen ähnlichen Problemen sich ergebendes zahlentheoretisches Problem. Zu einem dabei sich ergebenden Satze liefert Herr Dr. Busche den zahlentheoretischen Beweis. Beides ist im letzten Hefte unserer Mitteilungen veröffentlicht. Zum Schlusse trägt Herr Dr. Busche vor über die Anzahl der Teiler einer Zahl und über die Anzahl der Primzahlen zwischen zwei beliebigen Zahlen.

Hauptversammlung am 25. Februar 1895.

Der Jahrverwalter, Herr Dr. Köpcke, teilt mit, dafs unser Mitglied, Herr Wasserbauinspektor I. F. Bubendey, der einem Rufe als Professor an die technische Hochschule in Charlottenburg folgt, in Anerkennung seiner Verdienste um das Gedeihen der Gesellschaft, vor allem auch als Erforscher der Geschichte der Gesellschaft, durch Umfrage bei den einheimischen Mitgliedern zum Ehrenmitglied gewählt ist.

Der Jahrverwalter berichtet über die Thätigkeit der Gesellschaft im Laufe des 205. Jahres ihres Bestehens, sowie über den Kassenbestand. Die Gesellschaft besteht zur Zeit aus 12 Ehrenmitgliedern, 44 einheimischen und 18 auswärtigen Mitgliedern.

Bei der satzungsmäfsig vorzunehmenden Wahl eines Adjunkten wird Herr Dr. J. Schröder auf 3 Jahre gewählt. Der Vorstand besteht demnach für die Dauer des folgenden Jahres aus den Herren Prof. H. Ahlborn, Jahrverwalter, Ingenieur J. H. Sieveking, Mitjahrverwalter, und Dr. J. Schröder, Adjunkt. Zum Bibliothekar wird für den ausscheidenden Professor Bubendey Herr Dr. Jaerisch gewählt, zum Mitgliede der Redaktionskommission Herr Dr. J. Schröder. Nach Schlufs der Versammlung findet unter Beteiligung einer Anzahl von Gästen das übliche Festessen statt.

Versammlung am 9. März 1895.

Herr Dr. Bolte hält einen Vortrag über Methoden der Ortsbestimmung auf See. Von den an Land angewandten Methoden der Ortsbestimmung kommen auf See für die Breite drei Methoden in betracht: Die Meridianbreiten, die Nebenmeridianbreiten und die Breite aus zwei Höhen und dem Unterschiede der Stundenwinkel. Für die Längenbestimmung sind die Chronometerlängen von Wichtigkeit, bei welchen der Einfluss der Breiten- und Höhenwinkel auf den Stundenwinkel zu berücksichtigen ist. Zur Kontrole des Chron-

meters dient auf See besonders die Interpolation der Zeit des ersten Meridians aus beobachteten Distanzen des Mondes von den in der Nähe der Mondbahn liegenden Gestirnen. Zum Schlusse gab der Vortragende die Möglichkeit an, durch Kombination von ab- und zunehmenden Distanzen des Mondes von der Sonne den Einfluſs der konstanten Fehler auf den Chronometerstand unschädlich zu machen. — Darauf sprach Herr Dr. Schröder über die Verallgemeinerung eines Satzes über Teileranzahlen. (Vergl. Heft 5 vom Band 3 der Mitteilungen der Gesellschaft.) Nach Behandlung einer von Dirichlet aufgestellten allgemeinen zahlentheoretischen Transformationsgleichung wurde durch besondere Verfügung über die darin enthaltene willkürliche Funktion ein Satz gewonnen, dessen einfachster Fall die von Hermite u. a. behandelte Formel für die Anzahl der Teiler der ersten n ganzen Zahlen ist. Durch eine andere Spezialisierung der Grundgleichung ergab sich eine analoge Formel für die Summe aller Teiler der ersten n ganzen Zahlen. — Schlieſslich machte Herr Dr. Schorr auf die in den Morgenstunden des 11. März stattfindende totale Mondfinsternis aufmerksam im Anschluſs an eine den Verlauf darstellende Skizze. Im Anschluſs hieran zeigte er drei photographische Mondaufnahmen, die auf dem Lick-Observatory erhalten sind und sich durch auſserordentlich reiches Detail auszeichnen.

Versammlung am 20. April 1895.

Herr F. Bertheau hält einen Vortrag über die räumliche Lagerung der Atome in organischen Molekeln. Einleitend wurde eine Übersicht über die historische Entwickelung der Stereochemie gegeben. Sodann wurde die Stereochemie des Kohlenstoffs erörtert unter Hinweis auf die Analogie zwischen der Asymmetrie von Krystallen und der Molekularasymmetrie. Während bei enantiomorphen Quarzkrystallen die optische Aktivität eine Folge der Form des Stoffes, nicht des Stoffes selbst ist, muſs dieselbe bei organischen Kohlenstoffverbindungen durch molekulare Asymmetrie bedingt sein. Die beiden Gruppen der „relativen Stereoisomeren“ und der „absoluten Stereoisomeren“ werden ckarakterisiert und die wichtigsten Sätze für gesättigte und ungesättigte Kohlenstoffverbindungen aufgestellt und an Beispielen erläutert. — Darauf entwickelte Herr Dr. Keferstein eine elementar-geometrische Herleitung der Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ für das regelmäſsige Siebenzehneck.

Versammlung am 11. Mai 1895.

Herr Ingenieur J. H. Sieveking hält einen Vortrag über „Erläuterung zur Differentialgleichung $dw = awds$ und noch einmal der

Drehkoeffizient". Es wurden die konformen Abbildungen erläutert, welche durch die logarithmische und durch die Exponentialfunktion vermittelt werden. Dabei wurde z. B. gezeigt, wie sich das System der um den Anfangspunkt der Ebene des Arguments gelegten konzentrischen Kreise auf ein System von Geraden abbildet, die parallel sind zur Achse des Rein-Imaginären. Zum Schlusse wurde das Verhalten der Abbildungen im Unendlichfernen erläutert. Grofse Handzeichnungen veranschaulichten die Darlegungen des Vortragenden.

Versammlung am 15. Juni 1895.

Herr Dr. F. Detels spricht über „stigmatische Brechung bei schiefem Einfall". Es wurde gezeigt, dafs die gewöhnliche, bei schiefem Einfall eines Strahlenbündels stattfindende, astigmatische Brechung in stigmatische übergeht, wenn der Einfallswinkel in einer gewissen Beziehung zu den Krümmungsradien steht. Darauf wurde der für Rotationsflächen zweiter Ordnung gültige Satz bewiesen, dafs die Hauptstrahlen der Bündel durch die Brennpunkte der Flächen hindurchgehen. Dieser Satz ermöglicht eine einfache Bestimmung der Richtung der stigmatisch gebrochenen Bündel. Zum Schlusse wurde die Gestalt der zu den Flächen 2. O. gehörigen Brennflächen der stigmatischen Brechung erörtert. — Darauf berichtete Herr Dr. R. Schorr über „die Veränderungen der Lage der Rotationsachse der Erde". Die Anwendungen der Grundgleichungen für die Rotation fester Körper auf die Verhältnisse der Erde, bei welcher zwei Trägheitsmomente als gleich angenommen wurden, führte Euler auf die Entdeckung einer Bewegung der Momenten-Drehachse um die Hauptträgheitsachse mit einer Periode von zehn Monaten; jedoch ist ein Nachweis dieser Bewegung, welche eine periodische Polhöhenschwankung hervorbringen mufs, durch astronomische Beobachtungen bis Anfang der achtziger Jahre nicht geglückt. Erst die nach der Horrebow-Talcottschen Methode angestellten Beobachtungen Kästners aus 1881—82 und 84—85 ergaben eine deutliche periodische Polhöhenänderung und veranlafsten zahlreiche ähnliche Beobachtungsreihen auf europäischen und amerikanischen Sternwarten. Durch gleichzeitige Beobachtungen in Deutschland und Honolulu wurde festgestellt, dafs die beobachteten Polhöhenänderungen wirklich durch Lageänderung der Rotationsachse im Erdkörper hervorgerufen wurden. Die Diskussion der Polhöhenbeobachtungen von 1837—94 durch Chandler ergab, dafs die beobachteten Änderungen durch Superposition einer 14monatlichen Bewegung der Momentanachse um Hauptträgheitsachse und einer 12monatlichen Bewegung der Hau[illegible]

trägheitsachse entstehen. Zur Erklärung dieser Bewegungen, von denen die erste der Eulerschen entspricht, jedoch mit veränderter Periode, können nach Woodward wesentlich nur periodisch wirkende Vorgänge, wie z. B. die durch die meteorologischen Prozesse bewirkten Massenverschiebungen, in Frage kommen. Indessen bedarf es noch weiterer, während längerer Zeit auf verschiedenen Sternwarten angestellter Beobachtungen, damit die wahren Ursachen dieser Schwankungen ermittelt werden können. — Am Schlusse trug Herr Prof. Dr. Hoppe vor „über die Bedeutung des Potentials in der Elektrizitätslehre" und zeigte, dafs sowohl nach der mathematischen Methode der Einführung des Potentials durch Laplace und dessen Nachfolger, als auch nach der auf Bernoullis Gleichung zurückgehenden Methode von Helmholtz Potential gleich Arbeit sei, dafs die heutzutage häufige Verwechslung zwischen Spannung, Potential, Dichte und Elektrizitätsmenge auf der geringen Beachtung der physikalischen Dimensionsbestimmung beruhe.

Versammlung am 14. September 1895.

Der Jahrverwalter gedenkt der Verdienste des am 12. August d. J. verstorbenen Ehrenmitgliedes der Gesellschaft, des Herrn Prof. Dr. Biereus de Haan, der die alten Beziehungen unserer Gesellschaft zu den holländischen Mathematikern wieder angeknüpft hat, und dem die Gesellschaft wichtige Aufschlüsse über ihre älteste Geschichte verdankt. Die Anwesenden erheben sich zu Ehren des Verstorbenen von den Sitzen. — Herr Dr. W. Bock hält einen Vortrag „über den Begriff der Gleichheit in der Geometrie". Er führt darin etwa Folgendes aus: Alles Denken, jede Anschauung, jede Begriffs- und Urteilsbildung setzt ein Identifizieren voraus. Die Summe aller Beziehungen ist in den beiden Kategorien der Identität und Kausalität enthalten. Eine Definition des Identitätsbegriffs ist ebenso unnötig wie unmöglich. Die Gleichheit zweier Dinge besteht in der Identität ihrer Wirkungen nach aufsen, also in ihrer Vertauschbarkeit. Bei der Anwendung dieser Begriffsbestimmung auf das Gebiet des Räumlichen werden zunächst die beweglichen, begrenzten Körper von dem unbeweglichen, unbegrenzten Raum unserer Vorstellungen unterschieden. Dazu kommt eine weitere Unterscheidung der Raumgebilde nach ihren Dimensionen und ihrer Gröfsenordnung. Das erste euklidische Axiom ist, so wie es lautet, widersprechend. Bei den Anwendungen dieses Grundsatzes in der Planimetrie wird im Verlauf der Entwicklung nur die Thatsache benutzt, dafs ein Raumgebilde in verschiedenen Lagen zwischen dieselben Grenzen fallen kann. Die

geometrischen Entwicklungen müssen mit dem Begriffe der Fläche, der Ebene, beginnen. Aus der Fundamentaleigenschaft des Raumes ergaben sich die Thatsachen, die das erste euklidische Axiom ausdrücken sollte. Da die euklidischen Axiome arithmetischer Natur sind, so müfsten sie schon aus diesem Grunde aus der Geometrie entfernt werden, zumal sie durch die Grundeigenschaften der Stetigkeit und Homogeneität des Raumes überflüssig geworden sind. — Zum Schlusse sprach Herr Professor Dr. Hoppe über simultane Entladung langer, auf hohes Potential gebrachter Leitungsdrähte durch Querleitungen und zeigte den Einfluſs der Stromstärke zur Erhaltung der Spannung. Unter Vorlegung einer Reihe von Spannungsdiagrammen eines an der Strafsenbahn liegenden, selbstregistrierenden Voltmeters zeigte derselbe die Abnahme der Spannungsschwankungen bei Zunahme der Stromstärke und Zunahme der Schliefsungsbrücken. Aus den bisherigen Erfahrungen glaubt Vortragender schliefsen zu dürfen, dafs bei weiterer Ausdehnung des Leitungsnetzes unter Annahme völliger Rückleitung und bei Vermehrung der auf das gemeinschaftliche Leitungsnetz arbeitenden Stromzuführungspunkte der oberirdische Stromleiter nicht in dem Sinne als Stromleiter zu behandeln ist, dafs nach den Gesetzen der Spannungsabnahme die Spannungsschwankung an den einzelnen Punkten berechnet werden könne, sondern dafs die Oberleitung resp. Unterleitung als Reservoire zu betrachten sind, deren Spannungsdifferenz konstant ist, ob Wagen darüber fahren oder nicht. Auf diese Weise werde der Strafsenbahnbetrieb mit wachsender Ausdehnung eine immer geringer werdende Störungsursache sowohl für das Telephon wie für Messungen.

Versammlung am 12. Oktober 1895.

Der Jahrverwalter gedenkt in teilnehmenden Worten des Hinscheidens des Herrn Theodor Sinram, eines früheren, langjährigen Mitglieds der Gesellschaft. Zu Ehren des Verstorbenen erheben sich die Anwesenden von den Sitzen. Herr Prof. Dr. Hoppe spricht über „das Metermafs“. An der Hand der geschichtlichen Entwicklung der Festlegung des Meters wurde gezeigt, dafs das Meter auf der Toise du Pérou basiert und nicht etwa auf der Definition als der zehnmillionste Teil des Meridianquadranten. Es folgte der Hinweis darauf, dafs vom wissenschaftlichen Standpunkte aus eine Aufbauung der Mafse auf einer Gradmessung überhaupt unmöglich sei. Nach Besprechung der Besselschen Arbeiten zur Festlegung des preufsischen Urmafses und nach Charakterisierung des gegenwärtigen Zustandes der Meterfrage und der darauf bezüglichen Arbeiten wurde dargelegt

wie man die Länge des Meters durch Angabe der Verhältniszahl zwischen Meter und Wellenlänge des Lichtes dauernd sicher zu stellen beabsichtigt. — Sodann teilte Herr Dr. Busche einen neuen Beweis des quadratrischen Reciprocitätsgesetzes mit, dessen Inhalt auf Seite 233 dieses Heftes mitgeteilt ist. — Zum Schlusse berichtete Herr Dr. J. Schröder über die bedeutenden mathematischen Leistungen des vor kurzem in der Blüte der Jahre dahingerafften Ernst Ritter, dessen besonderes Verdienst es ist, für die schon früher von Poincaré vermittelst Reihenentwicklungen erforschten automorphen Funktionen mit Hilfe der Prinzipien der geometrischen Funktionentheorie eine allgemeine, zugleich von sonst üblichen Beschränkungen freie Theorie und in Verbindung damit eine Lehre von den sogenannten multiplikativen Formen auf algebraischen Gebilden beliebigen Geschlechts geschaffen zu haben.

Versammlung am 9. November 1895.

Der Jahrverwalter berichtet über „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie von Felix Klein". Es wird ausführlich referiert über die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises. Der Nachweis, dafs die Quadratur des Kreises mit Hilfe algebraischer Kurven unausführbar ist, ist zuerst im Jahre 1882 von Lindemann gegeben, und zwar im engen Anschlufs an eine Arbeit von Hermite über die Exponentialfunktion. Die sehr komplizierten Hermiteschen und Lindemannschen Entwicklungen sind später wesentlich vereinfacht. An der Hand der Gordanschen Beweisführung, die Klein in seine Vorträge aufgenommen hat, entwickelte der Vortragende den Beweis für die Transscendenz von e und π. — Darauf teilte Herr Dr. Jaerisch einige Resultate seiner Untersuchungen „über die Reflexion und Brechung des Lichtes mit, die er im Anschlufs an seine veröffentlichte Arbeit: Zur Theorie der Kugelschwingungen mit Anwendung auf die Reflexion und Brechung des Lichts" gewonnen hat. Das genannte Problem konnte bisher unter der Annahme, dafs das Licht in Schwingungen eines elastischen Mediums, des Äthers, besteht, nicht strenge gelöst werden. Der Vortragende hat den Nachweis geführt, dafs die strenge Lösung möglich ist, wenn nicht, wie bisher, ebene Lichtschwingungen angenommen werden, sondern die naturgemäfsere Voraussetzung kugelförmiger Lichtschwingungen gemacht wird. Die dadurch schwierigere Rechnung führt doch zu einfachen Resultaten und ergiebt z. B. die Fresnelschen Formeln. Jedenfalls ist die Annahme ebener Lichtschwingungen gestattet, da man jede Kugelwelle theoretisch durch 3 ebene Wellen ersetzen kann.

Aber es wird, wie der Vortragende zeigt, bei der Aufstellung der einen Bedingungsgleichung, nämlich des Gesetzes der Erhaltung der lebendigen Kraft, eine nicht statthafte Vernachlässigung vorgenommen. Bei Annahme kugelförmiger Schwingungen ist die Vernachlässigung leicht zu vermeiden.

Versammlung am 14. Dezember 1895.

Herr Dr. J. Classen erstattet einen ausführlichen Bericht über „Die Prinzipien der Mechanik von Hertz". In seinem Werke wollte Hertz die Unklarheiten und die oft nicht genügende Schärfe in den grundlegenden Begriffsbestimmungen bei den verschiedenen Darstellungsweisen der Mechanik beseitigen und die Mechanik von Grund auf einheitlich und logisch klar gestalten, mit genauer Feststellung dessen, was sie für ihre Anwendbarkeit auf die Naturerscheinungen aus der Erfahrung als Thatsachen in sich aufnehmen muſs und was sie aus sich selbst herleiten kann. Der Kunstgriff, durch den er alle in der Einleitung scharf kritisierten Schwierigkeiten vermeidet, besteht darin, daſs er von Anfang an ganze Punktsysteme betrachtet. Verschiebung eines Punktsystemes ist der quadratische Mittelwert aller Verschiebungen der einzelnen Punkte. Die Summation erfolgt geometrisch. Mit Hilfe dieser Meſsgröſse für die Systemverschiebung ergeben sich von selbst nach Analogie die Definition des Richtungsunterschiedes zweier Verschiebungen, der Summation derselben, der Bewegung, der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der Bahn eines Systems. Die Entwickelung und Darstellung dieser Grundbegriffe und ihrer mathematischen Beziehungen umfaſst der erste Teil des Buches, der rein mathematische Wahrheiten enthält, gleichgültig, ob die so gewonnenen Sätze in dem Sinne verwendbar sind, wie es der zweite Teil lehrt. Von Bedeutung wird dann der Begriff des Zusammenhanges zwischen den Punkten eines Systems dadurch definiert, daſs durch mathematische Gleichungen zwischen den Koordinaten von allen denkbaren Verschiebungen gewisse ausgeschlossen sind. Diese Bedingungsgleichungen können, wenn stets völlige Stetigkeit im Laufe der Bewegungen herrschen soll, nur lineare Differentialgleichungen erster Ordnung sein. Ferner existiert unter den dann noch möglichen Bahnen mindestens eine, die als Bahn geringster Gesamtkrümmung die „geradeste" ist. Bei Ableitung dieser Minimumsbedingung werden nach Art der Lagrangeschen Methode unbestimmte Multiplikatoren eingeführt, deren praktischer Wert im zweiten Teile bei der Anwendung auf die Naturvorgänge hervortritt. Der zweite Teil ruht auf der Annahme, daſs alle Körper in der Natur solche

materielle Punktsysteme der vorhin behandelten Art sind. Als Erfahrungsgrundsatz wird der Satz benutzt, dafs alle freien Systeme stets von allen denkbaren Bewegungen diejenige auf der geradesten Bahn mit gleichbleibender Geschwindigkeit ausführen. Daraus entspringt sofort die Form der Gleichungen für die natürliche Bewegung. Man erhält die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen, wenn die unbestimmten Multiplikatoren mit den Lagrangeschen Kräften in Parallele gestellt werden. Für die Behandlung unfreier Systeme werden drei Fälle unterschieden, wobei stets das unfreie System als Teil eines gröfseren freien aufgefafst wird. Sind für das Ergänzungssystem die Lagen festgegeben, so heifst das unfreie System ein „geleitetes". Haben beide Systeme einige Koordinaten gemeinsam, so heifsen sie „gekoppelt". Ist von einem Ergänzungssystem aus der Erfahrung nichts bekannt, so hilft die Annahme aus, dafs sich ein System verborgener Massen als Ergänzungssystem so konstruieren läfst, dafs das Ganze sich als freies System behandeln läfst. Das geschieht durch Einführung cyklischer Koordinaten. Für alle unfreien Systeme wird endlich der Gültigkeitsbereich der verschiedenen Integralsätze bestimmt und dadurch eine Übersicht und Unterscheidung der verschiedenen Prinzipien der Mechanik gegeben, wie sie vorher in der Vollständigkeit und Klarheit noch niemals gegeben ist. — Darauf trug Herr F. Bertheau vor über das Thema: „Zur Theorie der Hauptreihe der Blattstellungsdivergenzen". Nach einem historischen Überblick über die wichtigsten Perioden der mathematischen Botanik (nach Günther) wurde die Braun-Schimpersche Spiraltheorie eingehend besprochen, die die Blattanordnung in ein mathematisches Gesetz einzuzwängen bemüht war. Im Anschlufs an Simons Programmarbeit wurde die „Hauptreihe" der Blattdivergenzen aufgestellt und eine Übersicht über deren reinmathematische Eigenschaften gegeben, woran sich eine Besprechung von Schwendeners mechanischer Theorie der Blattstellungen schlofs.

Versammlung am 11. Januar 1896.

Herr Dr. W. Bock hält einen Vortrag „über Reform und Erweiterung des geometrischen Unterrichts". Er führt darin etwa folgendes aus: Die nach euklidischer Methode bearbeiteten Bücher halten weniger streng auf den logischen Inhalt als auf die logische Form. Gegenüber der schönen Übersichtlichkeit der synthetischen Geometrie sind sie ziemlich systemlos. Leitende Grundsätze sind dem Vortragenden: 1) Die Eigenschaften der in Betracht kommenden Gebilde sind Verhaltungsweisen bei Bewegungen, daher sollen die

Figuren als durch Bewegung entstanden eingeführt werden. 2) Der Stoff soll um wenige Grundgebilde gruppiert werden, entsprechend den beiden Hauptbewegungsarten, dem „Umlegen“ und dem „Umdrehen“. 3) Die synthetische Methode soll bevorzugt werden. 4) Die Ableitungen geschehen möglichst unmittelbar und rein geometrisch anschaulich. 5) Den Beziehungen auf Erfahrungen und Vorkommnisse in der täglichen Umgebung ist Raum zu gewähren. 6) Im Anfange ist möglichst viel zu zeichnen. — Es wird ein vollständiger Lehrgang nach den Grundsätzen vorgetragen.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt wertvolle Zusendungen folgenden Herren: Bohnert, Busche, Cantor, Crivetz, Eneström, Herrmann, Briochi, Garavito, Hurwitz, Klein, Kiepert, König, Lemoine, Lerch, Liebmann, Lukas, von Mangoldt, Meldau, d'Ocagne, Riessen, Rudio, Schilling, Schouten, Schwafsmann, Weyer, sowie allen Gesellschaften, mit denen die mathematische Gesellschaft im Schriftenaustausch steht.

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 7. Ausgegeben im Februar. 1897.

Transformation der hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung.

Von P. Jaerisch in Hamburg.

Ohne Berücksichtigung der Reibung hat Hankel in seiner Preisschrift: „Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten“ die Transformation der hydrodynamischen Gleichungen auf allgemeine orthogonale Koordinaten durchgeführt. Er geht dabei den von Jacobi gewiesenen Weg, die Transformation von partiellen Differentialgleichungen nicht an diesen selbst, sondern an einem mehrfachen Integrale auszuführen, aus dessen Variation die Gleichungen hervorgehen.

Wenn man aber in den hydrodynamischen Gleichungen die Glieder berücksichtigen will, welche von der Reibung abhängen, so reicht die Jacobi'sche Methode nicht aus; man mufs dazu den Gleichungen eine Form geben, ähnlich derjenigen, welche Lamé den Elastizitätsgleichungen fester isotroper Körper gegeben hat.

Lamé hat nämlich gezeigt, dafs sich die Differentialgleichungen solcher Körper durch die drei Komponenten der Elementar-Rotation, sowie durch die Volumen-Dilatation ausdrücken lassen, und dass diese charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen auch für krummlinige Koordinaten bestehen bleibt. Das Gleiche gilt aber von den von der Reibung abhängigen Gliedern der hydrodynamischen Gleichungen. Und da man nun hinsichtlich dieser Glieder, welche dieselbe Form erhalten, wie die von den Elementar-Rotationen abhängigen Glieder der Elastizitätsgleichungen, das von Lamé bei der Transformation der Elastizitätsgleichungen erhaltene Resultat benutzen kann, so erscheint jetzt der direkte Weg zur Transformation

der hydrodynamischen Gleichungen als der einfachere. — Die erhaltenen Gleichungen gehen, wenn die Reibungskonstanten gleich Null gesetzt werden, in die von Hankel auf anderem Wege erhaltenen Gleichungen über.

§ 1.

Die hydrodynamischen Gleichungen sind:

$$(1)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \delta \frac{du}{dt} = \delta X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1 \Delta u + \mu_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \delta \frac{dv}{dt} = \delta Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_1 \Delta v + \mu_2 \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \delta \frac{dw}{dt} = \delta Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_1 \Delta w + \mu_2 \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(1a)\quad \cdots\cdots\cdots \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt} + \Theta = 0.$$

Hier ist zur Abkürzung

$$(2)\quad \cdots\cdots\cdots \Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

gesetzt. X, Y, Z sind die Komponenten der äufseren Kräfte, p der Druck, δ die Dichtigkeit, μ_1 und μ_2 zwei Reibungskoëffizienten; u, v, w sind die Komponenten der Geschwindigkeit, also die folgenden vollständigen Differentialquotienten

$$(3)\quad \cdots\cdots\cdots u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Demnach ist in (1) zu setzen:

$$(3a)\quad \cdots \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Zu den vier Gleichungen (1) und (1a) tritt noch eine fünfte Gleichung hinzu, deren Transformation ohne Schwierigkeit ist.

Durch Einführung der doppelten Komponenten der Elementar-Rotation

$$(4)\quad \cdots\cdots\cdots \begin{cases} U = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}, \\ V = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}, \\ W = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

nehmen die Gleichungen (3) die folgende Form an

$$(4a)\quad \begin{cases} \delta\frac{du}{dt} = \delta X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_1\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \delta\frac{dv}{dt} = \delta Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \delta\frac{dw}{dt} = \delta Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_1\left(\frac{\partial V}{dx} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) + (\mu_1+\mu_2)\frac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{cases}$$

Hier sei noch zur Abkürzung gesetzt

$$(5)\quad \ldots\ldots\ldots A = (\mu_1+\mu_2)\Theta - p,$$

so ergiebt sich

$$(5a)\quad \ldots \begin{cases} \delta\frac{du}{dt} = \delta X + \frac{\partial A}{\partial x} + \mu_1\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{dz}\right), \\ \delta\frac{dv}{dt} = \delta Y + \frac{\partial A}{\partial y} + \mu_1\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{dW}{\partial x}\right), \\ \delta\frac{dw}{dt} = \delta Z + \frac{\partial A}{\partial z} + \mu_1\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Der zur Integration der Gleichungen (5a) einzuschlagende Weg ist nun folgender: Nach Einführung der Variablen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ an Stelle von x, y, z werden die Gleichungen (5a) der Reihe nach mit $\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}, \frac{\partial \varrho_i}{\partial y}, \frac{\partial \varrho_i}{\partial z}$ multipliziert und addiert, so entstehen für $i = 1, 2, 3$ die gesuchten transformierten Gleichungen.

Man erhält also zunächst die Gleichung

$$(5b)\quad \delta\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right) = \delta\left(X\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + Y\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + Z\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z} + \mu_1\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right\}.$$

Zur leichteren Übersicht des Folgenden möge noch zur Abkürzung gesetzt werden:

$$(5c)\quad \begin{cases} A_i = \frac{du}{dt}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}, \\ B_i = X\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + Y\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + Z\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}, \\ \Gamma_i = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}, \\ \Delta_i = \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}, \end{cases}$$

so dafs die Gleichung (5b) die Form erhält:

$$(5d)\quad \ldots\ldots\ldots \delta A_i = \delta B_i + \Gamma_i + \mu_1 \Delta_i.$$

§ 2.

Einige wichtige Transformationsformeln.

Seien

(6) $$\varrho_1 = f_1(x, y, z), \quad \varrho_2 = f_2(x, y, z), \quad \varrho_3 = f_3(x, y, z)$$

die Gleichungen dreier Systeme orthogonaler Flächen mit den Parametern ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, aus denen durch Umkehrung

(6a) $$x = F_1(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad y = F_2(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad z = F_3(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$$

folgt, dann bildet die Normale der Fläche ϱ_i mit den Achsen x, y, z Winkel, deren Cosinus gegeben sind durch

(7) $$\frac{1}{h_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}, \quad \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}, \quad \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z} \qquad \text{für } i = 1, 2, 3$$

wo

(8) $$h_i^2 = \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_i}\right)^2}$$

gesetzt ist.

Aus der Bedeutung der Ausdrücke (7) folgen die Formeln:

(9) $$\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\frac{\partial \varrho_j}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\frac{\partial \varrho_j}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\frac{\partial \varrho_j}{\partial z} = 0 \qquad \begin{matrix} i \text{ u. } j = 1, 2, 3 \\ j \gtrless i; \end{matrix}$$

(9a) $$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)^2 = 1, \\ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right)^2 = 1, \\ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\right)^2 = 1; \end{cases}$$

(9b) $$\begin{cases} \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} + \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x} = 0, \\ \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Ferner ergeben sich aus den von Betti[1]) beuntzten, aus (6a) folgenden Gleichungen

---

1) *Betti*, Lehrbuch der Potentialtheorie, Zusätze S. 410.

$$(10)\quad \cdots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial x} = 1 = \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial z} = 0 = \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial z} + \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial z} + \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial z} \end{cases}$$

nach Multiplikation mit $\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}, \frac{\partial \varrho_i}{\partial y}, \frac{\partial \varrho_i}{\partial z}$ und Addition, sowie aus entsprechenden Gleichungen für y und z die wichtigen, von Lamé[1]) in anderer Weise abgeleiteten Gleichungen:

$$(11)\quad \cdots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial x} = h_i^2 \dfrac{\partial x}{\partial \varrho_i}, \\ \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial y} = h_i^2 \dfrac{\partial y}{\partial \varrho_i}, \\ \dfrac{\partial \varrho_i}{\partial z} = h_i^2 \dfrac{\partial z}{\partial \varrho_i}. \end{cases}$$

Es bezeichne ferner ds_i das Element der Normale auf der Fläche ϱ_i, dann folgt aus (7)

$$(12)\quad \cdots \quad ds_i = dx \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial x} + dy \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial y} + dz \frac{1}{h_i}\frac{\partial \varrho_i}{\partial z},$$

und weil nach (6)

$$(13)\quad \cdots \quad d\varrho_i = \frac{\partial \varrho_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \varrho_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \varrho_i}{\partial z} dz$$

ist, so ergiebt sich aus (12)

$$(14)\quad \cdots \quad ds_i = \frac{d\varrho_i}{h_i}$$

als Ausdruck für die Komponenten einer Verrückung in der Zeit dt und zwar nach den Normalen der Flächen ϱ_i.

Noch folgende Formeln sind wichtig. Für irgend eine Funktion F der Koordinaten ist nach (11)

$$(14a)\quad \cdots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial z} = h_i^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_i}; \\ h_1^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial x}{\partial \varrho_1} + h_2^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial x}{\partial \varrho_2} + h_3^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial x}{\partial \varrho_3} = \dfrac{\partial F}{\partial x}, \\ h_1^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial y}{\partial \varrho_1} + h_2^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial y}{\partial \varrho_2} + h_3^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial y}{\partial \varrho_3} = \dfrac{\partial F}{\partial y}, \\ h_1^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial z}{\partial \varrho_1} + h_2^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial z}{\partial \varrho_2} + h_3^2 \dfrac{\partial F}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial z}{\partial \varrho_3} = \dfrac{\partial F}{\partial z}; \end{cases}$$

1) Lamé, Leçons sur les coordinées curvilignes S. 12.

ferner (Lamé a. a. O. S. 22)

$$(14b)\quad \Delta F = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial F}{\partial \varrho_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial F}{\partial \varrho_2}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial F}{\partial \varrho_3}\right)\right\}.$$

§ 3.

Es sollen nun die Ausdrücke A_i, B_i, Γ_i, Δ_i in (5c) gebildet werden. Aus (12) und (7) in Verbindung mit (14) oder direkt aus (6a) und (14) ergeben sich zunächst die Werte

$$(15)\quad \cdots \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x}\dfrac{d\varrho_1}{dt} + \dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x}\dfrac{d\varrho_2}{dt} + \dfrac{1}{h_3^2}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial x}\dfrac{d\varrho_3}{dt}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y}\dfrac{d\varrho_1}{dt} + \dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y}\dfrac{d\varrho_2}{dt} + \dfrac{1}{h_3^2}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial y}\dfrac{d\varrho_3}{dt}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{h_1^2}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial z}\dfrac{d\varrho_1}{dt} + \dfrac{1}{h_2^2}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial z}\dfrac{d\varrho_2}{dt} + \dfrac{1}{h_3^2}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial z}\dfrac{d\varrho_3}{dt}, \end{cases}$$

und hieraus

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right)\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)$$

und entsprechende Ausdrücke für $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Durch Ausführung der Differentiation in den letzten drei Gliedern erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right)\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt}\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_2^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_2}{dt} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt}\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_3^2}\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt} + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\right\} -$$

Dieser Ausdruck vereinfacht sich wesentlich durch folgende aus (11) und (14a) hervorgehende Formeln (cf. Lamé a. a. O. S. 13, Nr. 1

$$(16)\quad \cdots \begin{cases} \dfrac{1}{h_j^2}\dfrac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\dfrac{\partial \varrho_j}{\partial x}\right) + \dfrac{1}{h_i^2}\dfrac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{1}{h_j^2}\dfrac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\dfrac{\partial \varrho_j}{\partial y}\right) + \dfrac{1}{h_i^2}\dfrac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right) = 0, \\ \dfrac{1}{h_j^2}\dfrac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\dfrac{\partial \varrho_j}{\partial z}\right) + \dfrac{1}{h_i^2}\dfrac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\dfrac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Man erhält, wenn zugleich die in gleicher Weise zu bildenden Ausdrücke für $\frac{d^2y}{dt^2}$ und $\frac{d^2z}{dt^2}$ hinzugefügt werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{dq_1}{dt}\right)\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{dq_2}{dt}\right)\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{dq_3}{dt}\right)\frac{\partial q_3}{\partial x}$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{dq_1}{dt}\right)\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{dq_2}{dt}\right)\frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{dq_3}{dt}\right)\frac{\partial q_3}{\partial y}$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial y}\right) + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial y}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{dq_1}{dt}\right)\frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{dq_2}{dt}\right)\frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{dq_3}{dt}\right)\frac{\partial q_3}{\partial z}$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right) + \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial z}\right) + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial z}\right).$$

Hieraus ist jetzt nach (5 c) der Ausdruck für A_i im ersten Gliede der Gleichung (5 d) zu bilden. Man erhält zugleich mit Rücksicht auf (8) und (9)

$$(17)\quad A_1 = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial q_1}{\partial z}$$
$$+ h_1^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{dq_1}{dt}\right) + \frac{1}{h_1^2}\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2\left\{\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial q_1}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_2^2}\left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2\left\{\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial q_2}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\left\{\frac{\partial q_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial q_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{\partial q_3}{\partial z}\right)\right\}$$

Die drei geschweiften Klammern lassen sich einfacher gestalten durch folgende aus (8) und (14 a) abzuleitende Formeln (cf. Lamé a. a. O. S. 14, No. 14):

$$(18)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial h_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial x} + \frac{\partial h_i}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial h_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial y} + \frac{\partial h_i}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right) = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial h_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial z} + \frac{\partial h_i}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial z} + \frac{\partial h_i}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}$, $\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}$ und addiert und setzt erstens $i = 1$, zweitens $i = 2$, drittens $i = 3$, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (8), (9) und (9 a):

$$(18\,a)\quad \begin{cases} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right) = h_1\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right) = \frac{h_1^2}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_1} \\ \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\right) = \frac{h_1^2}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_1} \end{cases}$$

Die rechten Seiten können ersetzt werden durch

$$-\frac{h_1^4}{2}\frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_1},\quad -\frac{h_1^2 h_2^2}{2}\frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_1},\quad -\frac{h_1^2 h_3^2}{2}\frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_1}.$$

Demnach ergiebt sich für A_1 in (17) der folgende einfachere Ausdruck, und werden gleichzeitig die in gleicher Weise entstehenden Ausdrücke für A_2 und A_3 hinzugefügt, so erhält man:

$$(19)\quad \begin{cases} A_1 = h_1^2\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_1} + \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_1} + \left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_1}\right]\right\}, \\ A_2 = h_2^2\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_2} + \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_2} + \left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_2}\right]\right\}, \\ A_3 = h_3^2\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_3} + \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_3} + \left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_3}\right]\right\}. \end{cases}$$

§ 4.

Es ist jetzt der Ausdruck B_i in (5 c) zu transformieren. Dazu seien F_i die Komponenten der äufseren Kräfte nach den Normalen der Flächen ϱ_i, dann folgt aus (7):

$$(20)\quad \begin{cases} X = F_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + F_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + F_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}, \\ Y = F_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + F_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + F_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}, \\ Z = F_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + F_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} + F_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}$, $\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}$ multipliziert und addiert, so entstehen für $i = 1, 2, 3$ mit Rücksicht auf (8) und (9) die Ausdrücke:

$$(21)\qquad \begin{cases} B_1 = X\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + Y\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + Z\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} = h_1 F_1, \\ B_2 = X\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + Y\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + Z\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = h_2 F_2, \\ B_3 = X\frac{\partial \varrho_3}{\partial x} + Y\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} + Z\frac{\partial \varrho_3}{\partial z} = h_3 F_3. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für Γ_i in (5c) ergeben sich direkt aus der ersten Gleichung (14a):

$$(22)\qquad \Gamma_i = h_i^2 \frac{\partial A}{\partial \varrho_i}.$$

Es bleibt in (5d) noch Δ_i zu transformieren übrig. Dabei kann das von Lamé bei der Transformation der Elastizitätsgleichungen gewonnene Resultat benutzt werden. Nach pag. 289, No. 21, 22 und 20 a. a. O. ist

$$(23)\qquad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} = P_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + P_2\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + P_3\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} = P_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + P_2\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + P_3\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} = P_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} + P_2\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} + P_3\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(23a)\qquad \begin{cases} P_1 = \frac{h_2 h_3}{h_1}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \varrho_3} - \frac{\partial M_3}{\partial \varrho_2}\right), \\ P_2 = \frac{h_3 h_1}{h_2}\left(\frac{\partial M_3}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial M_1}{\partial \varrho_3}\right), \\ P_3 = \frac{h_1 h_2}{h_3}\left(\frac{\partial M_1}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial M_2}{\partial \varrho_1}\right) \end{cases}$$

und

$$(23b)\qquad \begin{cases} M_1 = \frac{h_2 h_3}{h_1}\left(\frac{\partial a_2}{\partial \varrho_3} - \frac{\partial a_3}{\partial \varrho_2}\right), \\ M_2 = \frac{h_3 h_1}{h_2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial a_1}{\partial \varrho_3}\right), \\ M_3 = \frac{h_1 h_2}{h_3}\left(\frac{\partial a_1}{\partial \varrho_2} - \frac{\partial a_2}{\partial \varrho_1}\right). \end{cases}$$

a_i ist zu ersetzen durch

$$(23c)\qquad a_i = \frac{1}{h_i^2}\frac{d\varrho_i}{dt}^{1}).$$

1) Von der Bezeichnungsweise Lamés ist oben insofern abgewichen, als für $\varrho, \varrho_1, \varrho_2, h, h_1, h_2, A, B, \Gamma$ geschrieben ist $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, h_1, h_2, h_3, M_1, M_2, M_3$.

Aus (23) folgt jetzt für Δ_i in (5c) mit Rücksicht auf (8) und (9), wenn i durch 1, 2, 3 ersetzt wird:

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \Delta_i = -h_i^2 P_i$$

Hiermit ist die Transformation der Gleichungen (1) durchgeführt bis auf den in A (cf. (5)) vorkommenden Ausdruck für Θ, der im folgenden § in den neuen Koordinaten ausgedrückt werden soll. Aus (5d) ergiebt sich durch (19), (21), (22) und 24) für $i = 1, 2, 3$ bei Weglassung der Faktoren h_1^2, h_2^2, h_3^2, welche nicht verschwinden können:

$$(25) \quad \begin{cases} \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_1} + \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_1} + \left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_1}\right]\right\} \\ \qquad = \delta \frac{F_1}{h_1} + \frac{\partial A}{\partial \varrho_1} - \mu_1 P_1, \\ \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_2} + \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_2} + \left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_2}\right]\right\} \\ \qquad = \delta \frac{F_2}{h_2} + \frac{\partial A}{\partial \varrho_2} - \mu_1 P_2, \\ \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right) - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_1^2}}{\partial \varrho_3} + \left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_2^2}}{\partial \varrho_3} + \left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{h_3^2}}{\partial \varrho_3}\right]\right\} \\ \qquad = \delta \frac{F_3}{h_3} + \frac{\partial A}{\partial \varrho_3} - \mu_1 P_3. \end{cases}$$

§ 5.

Transformation von $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

Zunächst ist

$$(26) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varrho_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x},$$

ferner nach (15)

---

a_1, a_2, a_3 ist an die Stelle von a, b, c getreten, welche Gröfsen jedoch eine and[e]re Bedeutung haben als die Gröfsen a_1, a_2, a_3 in (23c). Aber die Form der Ausdrü[cke] (15) wird durch (23c) die gleiche wie die Laméschen Ausdrücke (16) a. a. [O.] für die elastischen Verrückungen, weshalb die Anwendung der von Lamé [ge]haltenen Ausdrücke (23) für die Transformation der hydrodynamischen Gleichun[gen] gestattet ist.

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho_3} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right).$$

Daher folgt aus (26)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\left\{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\left\{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\left\{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right)\right\}$$
$$+ \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\left\{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\right)\right\}.$$

Zu diesem Ausdrucke sind die entsprechend gebildeten für $\frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ hinzuzufügen, welche aus (27) hervorgehen, wenn darin x durch y und z ersetzt wird. Der so entstehende Ausdruck

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

nimmt eine einfache Form an. Zunächst ergeben die Glieder mit gleichen Indices, welche aus den ersten drei Klammern in (27) hervorgehen, mit Anwendung der Formel (8):

$$\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right)^2 = h_i^2 \quad .$$

die Ausdrücke

$$h_1^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right), \quad h_2^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right), \quad h_3^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right),$$

während die Glieder mit ungleichen Indices wegen Formel (9)

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\frac{\partial \varrho_j}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\frac{\partial \varrho_j}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\frac{\partial \varrho_j}{\partial z} = 0,$$

fortfallen.

Hinsichtlich der Glieder mit gleichen Indices, welche aus den letzten drei Klammern in (27) entstehen, ist die Formel

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right) = h_i \frac{\partial h_i}{\partial \varrho_i}$$

[cf. (18a)] anzuwenden. Man erhält

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt}, \quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt}, \quad \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}.$$

Die Glieder mit ungleichen Indices der letzten drei Klammern in (27) ergeben mit Rücksicht auf die Formel

$$(28) \quad \frac{\partial \varrho_j}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_j}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varrho_j}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \varrho_j}\left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right) = -\frac{h_i^2}{h_j}\frac{\partial h_i}{\partial \varrho_i},$$

welche entsprechend (18a) abzuleiten ist (cf. Lamé a. a. O. pag. 15, Nr. 16), die Ausdrücke

$$-\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_1}\right)\frac{\partial \varrho_1}{\partial t}, \quad -\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_2}\right)\frac{\partial \varrho_2}{\partial t},$$
$$-\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_3} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_3}\right)\frac{\partial \varrho_3}{\partial t}.$$

Demnach ergiebt sich aus (27):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} =$$
$$h_1^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + h_2^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + h_3^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)$$
$$+ \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}$$
$$-\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_1}\right)\frac{d\varrho_1}{dt} - \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_2}\right)\frac{d\varrho_2}{dt} - \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_3} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_3}\right)\frac{d\varrho_3}{dt}.$$

Berücksichtigt man nun die identischen Gleichungen

$$h_i^2 \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{1}{h_i^2}\frac{d\varrho_i}{dt}\right) = \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\frac{d\varrho_i}{dt} - \frac{2}{h_i}\frac{d\varrho_i}{dt},$$

$$h_1 h_2 h_3 \frac{d\dfrac{F}{h_1 h_2 h_3}}{\partial \varrho_i} = \frac{\partial F}{\partial \varrho_i} - \frac{F}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \varrho_i} - \frac{F}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \varrho_i} - \frac{F}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \varrho_i},$$

so ergiebt sich schliefslich

$$(29)\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = h_1 h_2 h_3\left\{\frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d\varrho_1}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d\varrho_2}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right\}.$$

§ 6.

In die Gleichungen (25) sollen noch die Werte (5) und (23a) für A und P_i gesetzt werden, so nehmen die hydrodynamischen Gleichungen (1) und (1a) in den Koordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ folgende Form an:

$$(30)\quad \begin{cases} \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_1^2}}{\partial\varrho_1}+\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_2^2}}{\partial\varrho_1}+\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_3^2}}{\partial\varrho_1}\right]\right\} \\ \quad = \delta\frac{F_1}{h_1}-\frac{\partial p}{\partial\varrho_1}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_1}-\mu_1\frac{h_2h_3}{h_1}\left(\frac{\partial M_2}{\partial\varrho_3}-\frac{\partial M_3}{\partial\varrho_2}\right), \\ \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_1^2}}{\partial\varrho_2}+\left(\frac{\partial\varrho_2}{\partial t}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_2^2}}{\partial\varrho_2}+\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_3^2}}{\partial\varrho_2}\right]\right\} \\ \quad = \delta\frac{F_2}{h_2}-\frac{\partial p}{\partial\varrho_2}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_2}-\mu_1\frac{h_3h_1}{h_2}\left(\frac{\partial M_3}{\partial\varrho_1}-\frac{\partial M_1}{\partial\varrho_3}\right), \\ \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_1^2}}{\partial\varrho_3}+\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_2^2}}{\partial\varrho_3}+\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{h_3^2}}{\partial\varrho_3}\right]\right\} \\ \quad = \delta\frac{F_3}{h_3}-\frac{\partial p}{\partial\varrho_3}+(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial\Theta}{\partial\varrho_3}-\mu_1\frac{h_1h_2}{h_3}\left(\frac{\partial M_1}{\partial\varrho_2}-\frac{\partial M_2}{\partial\varrho_1}\right). \end{cases}$$

$$(30a)\quad \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt}+\Theta=0.$$

Hier bezeichnet δ die Dichtigkeit, p den Druck, $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind die Parameter dreier orthogonaler Flächen, F_1, F_2, F_3 die Komponenten der äufseren Kräfte nach den Normalen der Flächen ϱ_i; μ_1 und μ_2 sind die Reibungskonstanten.

Ferner ist in (30) und (30a) zur Abkürzung gesetzt:

$$(30b)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{h_2h_3}{h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right\}, \\ M_2 = \frac{h_1h_3}{h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right)\right\}, \\ M_3 = \frac{h_1h_2}{h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\right)-\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\right)\right\}; \end{cases}$$

$$(30c)\quad \Theta = h_1 h_2 h_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d\varrho_1}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d\varrho_2}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right\};$$

$$(30d)\quad \ldots\ldots\quad h_i^2 = \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho_i}{\partial z}\right)^2.$$

Für $\mu_1 = \mu_2 = 0$ gehen die obigen Gleichungen in die von Hankel erhaltenen über. Setzt man $\varrho_1 = x$, $\varrho_2 = y$, $\varrho_3 = z$, wodurch $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ wird, so gehen die Gleichungen (30) mit Rücksicht auf (20) in (4a) über.

§ 7.

Die hydrodynamischen Gleichungen für ein rotierendes System.

Die Rotation finde um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω statt, dann sind den rechten Seiten der Gleichungen (1) die Glieder $2\omega\delta v$ und $-2\omega\delta u$ hinzuzufügen. Demnach treten zu den Gliedern der transformierten Gleichungen (30) die Glieder

$$(31)\quad \ldots\ldots\quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = 2\omega\delta \dfrac{1}{h_1^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial x} - \dfrac{dx}{dt}\dfrac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{Z}_2 = 2\omega\delta \dfrac{1}{h_2^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial x} - \dfrac{dx}{dt}\dfrac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right), \\ \mathfrak{Z}_3 = 2\omega\delta \dfrac{1}{h_3^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial x} - \dfrac{dx}{dt}\dfrac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right) \end{cases}$$

hinzu.

Nach (15) ergiebt sich

$$\frac{dy}{dt}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial \varrho_1}{dy} = \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right) + \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\right),$$

$$\frac{dy}{dt}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} = \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right) + \frac{1}{h_3^2}\frac{d\varrho_3}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right),$$

$$\frac{dy}{dt}\frac{\partial \varrho_3}{\partial x} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} = \frac{1}{h_1^2}\frac{d\varrho_1}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right) + \frac{1}{h_2^2}\frac{d\varrho_2}{dt}\left(\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{dy} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\right).$$

Nun bestehen die Beziehungen (Lamé a. a. O. pag. 288)

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} = \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_3}{\partial y} = \frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} = \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}.$$

Demnach ergiebt sich

$$(32)\quad \cdots \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = 2\omega\delta \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z} - \frac{d\varrho_3}{dt}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{Z}_2 = 2\omega\delta \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} - \frac{d\varrho_1}{dt}\frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{Z}_3 = 2\omega\delta \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} - \frac{d\varrho_2}{dt}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\right). \end{cases}$$

§ 8.

Die hydrodynamischen Gleichungen für Rotationskörper.

Für die allgemeinen orthogonalen Koordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 werden wie in meiner Arbeit: „Allgemeine Integration der Elastizitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper" im Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 104 drei für alle Rotationskörper gültige orthogonale Koordinaten eingeführt und zwar die Parameter ξ, η zweier Scharen von Rotationsflächen mit gemeinsamer Rotationsachse, sowie der Winkel ψ, den die durch das Massenelement des Körpers gelegte Meridianebene mit einer festen Meridianebene bildet.

Die Rotationsachse sei die z-Achse. Wir setzen

$$(33)\quad \cdots \cdots \cdots \quad z + i\varrho = f(\xi + i\eta),$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, und z und ϱ die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Meridianebene ψ bezeichnen, so entstehen aus (33) durch Trennung des Reellen vom Imaginären zwei orthogonale Kurvensysteme mit den Parametern ξ und η in der Meridinaebene ψ. Die Kurven dieser Systeme beschreiben, wenn ψ von 0 bis 2π wächst, Flächen, welche mit den Meridianebenen die drei Scharen orthogonaler Flächen bilden.

Ferner sei

$$(33a)\quad \cdots \cdots \cdots \quad x = \varrho\cos\psi, \quad y = \varrho\sin\psi.$$

Die Koordinaten ξ, η, ψ sind an Stelle von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 in die Gleichungen (30) einzuführen. Dazu beachten wir die aus (33) folgenden Beziehungen

$$(33b)\quad \cdots \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial \varrho}{\partial \eta}, \\ \frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{h_2^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\right)^2 = \frac{1}{h^2}, \\ \frac{1}{h_3} = \varrho. \end{cases}$$

Demnach sind h_1, h_2, h_3 von ψ unabhängig, sowie auch ϱ und z.

Ich füge noch einige Transformationsformeln hinzu, welche b der Integration der entstehenden hydrodynamischen Gleichungen a zuwenden sind.

Aus (11) und (33b) folgt:

$$(33c)\quad \cdots\cdots\cdots \begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial z} = h^2 \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} = h^2 \frac{\partial z}{\partial \eta}, \end{cases}$$

$$(33d)\quad \cdots\cdots \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2 = h^2;$$

ferner für jede Funktion F von ξ und η:

$$(33e)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial F}{\partial \varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial F}{\partial \varrho}\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}; \end{cases}$$

$$(33f)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \varrho}{\partial \eta} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial F}{\partial \varrho}, \\ \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial \varrho}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi} = \frac{1}{h^2}\frac{\partial F}{\partial z}; \end{cases}$$

und für zwei Funktionen F und f:

$$(33g)\quad \cdots \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\frac{\partial f}{\partial \varrho} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z}\right), \\ \frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} f \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} f \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial}{\partial \varrho} f \frac{\partial F}{\partial \varrho} + \frac{\partial}{\partial z} f \frac{\partial F}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (30) gehen über in:

$$(34)\quad \begin{cases} \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h^2}\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial \xi}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] - \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right\} \\ \quad = \delta\frac{F_1}{h} - \frac{\partial p}{\partial \xi} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - \frac{\mu_1}{\varrho}\left(\frac{\partial M_2}{\partial \psi} - \frac{\partial M_3}{\partial \eta}\right), \\ \delta\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{h^2}\frac{d\eta}{dt}\right) + \frac{1}{h^3}\frac{\partial h}{\partial \eta}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2\right] - \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial \eta}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right\} \\ \quad = \delta\frac{F_2}{h} - \frac{\partial p}{\partial \eta} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial \Theta}{\partial \eta} - \frac{\mu_1}{\varrho}\left(\frac{\partial M_3}{\partial \xi} - \frac{\partial M_1}{\partial \psi}\right), \\ \delta\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\frac{d\psi}{dt}\right) = \delta\varrho F_3 - \frac{\partial p}{\partial \psi} + (\mu_1 + \mu_2)\frac{\partial \Theta}{\partial \psi} - \mu_1\varrho h^2\left(\frac{\partial M_1}{\partial \eta} - \frac{\partial M_2}{\partial \xi}\right. \end{cases}$$

$$(34a)\quad \cdots\cdots\cdots \frac{1}{\delta}\frac{d\delta}{dt} + \Theta = 0.$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\text{4b)} \quad \cdots \quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{h^2} \frac{d\eta}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\varrho^2 \frac{d\psi}{dt} \right) \right\}, \\ M_2 = \frac{1}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\varrho^2 \frac{d\psi}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{h^2} \frac{d\xi}{dt} \right) \right\}, \\ M_3 = \varrho h^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{h^2} \frac{d\xi}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{h^2} \frac{d\eta}{dt} \right) \right\}. \end{cases}$$

$$\text{4c)} \quad \cdots \quad \Theta = \frac{h^2}{\varrho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varrho}{h^2} \frac{d\xi}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\varrho}{h^2} \frac{d\eta}{dt} \right) + \frac{\varrho}{h^2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \right\}.$$

Ferner folgt aus (32)

$$\text{4d)} \quad \cdots \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = -2\omega\delta \frac{\varrho}{h^2} \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial z}, \\ \mathfrak{Z}_2 = 2\omega\delta \frac{\varrho}{h^2} \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial z}, \\ \mathfrak{Z}_3 = 2\omega\delta \frac{\varrho}{h^2} \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke gehen durch (33c) in folgende über:

$$\text{4e)} \quad \cdots \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = 2\omega\delta\varrho \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial \varrho}{\partial \xi}, \\ \mathfrak{Z}_2 = 2\omega\delta\delta \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial z}{\partial \xi}, \\ \mathfrak{Z}_3 = -2\omega\delta\varrho \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{\partial \varrho}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{dt} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (34) nehmen, wie noch bemerkt werden mag, e besonders einfache Gestalt an, wenn $\xi = z$, $\eta = \varrho$ gesetzt wird, o wenn jeder Punkt des Körpers durch Cylinderkoordinaten bemmt wird. In diesem Falle fallen nämlich, weil nach (33b) $h = 1$ rd, die quadratischen Glieder der Gleichungen bis auf ein einziges :t. Vielleicht gelingt auf Grund dieser vereinfachten Gleichungen e allgemeine Integration der hydrodynamischen Gleichungen.

Diese Gleichungen sind die folgenden:

$$\text{5)} \quad \begin{cases} \delta \frac{d^2 z}{dt^2} = \delta F_1 - \frac{\partial p}{\partial z} + (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\mu_1}{\varrho} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \psi} - \frac{\partial M_3}{\partial \eta} \right), \\ \delta \left\{ \frac{d^2 \varrho}{dt^2} - \varrho \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right\} = \delta F_2 - \frac{\partial p}{\partial \varrho} + (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial \Theta}{\partial \varrho} - \frac{\mu_1}{\varrho} \left(\frac{\partial M_3}{\partial z} - \frac{\partial M_1}{\partial \psi} \right), \\ \delta \frac{d}{dt} \left(\varrho^2 \frac{d\psi}{dt} \right) = \delta\varrho F_3 - \frac{\partial p}{\partial \psi} + (\mu_1 + \mu_2) \frac{\partial \Theta}{\partial \psi} - \mu_1 \varrho \left(\frac{\partial M_1}{\partial \varrho} - \frac{\partial M_2}{\partial z} \right), \end{cases}$$

Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$(35a)\quad \cdots\cdots \begin{cases} M_1 = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho^2\frac{d\psi}{dt}\right)\right\}, \\ M_2 = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho^2\frac{d\psi}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{dz}{dt}\right)\right\}, \\ M_3 = \varrho\left\{\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{dz}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)\right\}. \end{cases}$$

$$(35b)\quad \cdots\ \Theta = \frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\varrho\frac{dz}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{d\varrho}{dt}\right) + \varrho\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)\right\}.$$

Aus (34d) folgt:

$$(35c)\quad \cdots\cdots \begin{cases} \mathfrak{Z}_1 = 0, \\ \mathfrak{Z}_2 = 2\omega\delta\varrho\frac{d\psi}{dt}, \\ \mathfrak{Z}_3 = -2\omega\delta\varrho\frac{d\varrho}{dt}. \end{cases}$$

Hamburg, im Dezember 1896.

Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie, insbesondere die Neperschen Regeln für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

Von Otto Pund in Altona-Ottensen.

Die von dem Erfinder der natürlichen Logarithmen John Ne
in seinem 1614 erschienenen Werke Descriptio mirifici logarithmor
canonis angegebenen Regeln über die Aufstellung der zwischen
drei Stücken (Seiten und Winkel) der rechtwinkligen sphärisch
Dreiecke bestehenden Relationen werden trotz ihrer allgemeinen V
breitung und Verwendung doch wohl nur als ein glücklich ersonne
mnemotechnisches Hülfsmittel angesehen, das bestimmte Systeme
Gleichungen, die bei der Auflösung der Dreiecke hauptsächlich
Betracht kommen, in einen kurzen Ausdruck vereinigt, und de
gemäfs auch nur durch zusammenfassende Betrachtung aller auftret
den Einzelfälle verifiziert. Es läfst sich aber zeigen, dafs hier
allgemeines Gesetz zu Grunde liegt, das aus jeder beliebigen Relat
zwischen den Stücken eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks e
Reihe neuer Beziehungen abzuleiten gestattet vermöge einer gewis
cyklischen Substitution, die ich als „Nepersche Substitution" bezeichn
möchte. Denn es kann keinem Zweifel unterliegen, dafs das

waltende Gesetz Neper durchaus nicht entgangen ist, obwohl seine Darstellung den Sachverhalt nicht ganz klar hervortreten läfst. Aus letzterem Grunde darf man auch wohl annehmen, dafs sich dem Verständnis des Wesens und des Nutzens seiner kurzen überdies der hinreichenden Beweise ermangelnden Darlegungen Schwierigkeiten in den Weg stellten, die es verschuldet haben, dafs den späteren Generationen, die selten Veranlassung fanden, auf die ursprüngliche Quelle zurückzugehen, nur die Regeln vererbt wurden mit jener induktiven Begründung, wie sie auch Neper selbst an erster Stelle gab.[1])

In dieser Arbeit, die in erster Linie der Ableitung der Neperschen Substitution in gröfster Allgemeinheit gewidmet ist, auf die ich ohne Kenntnis der für mich später sehr überraschenden Darlegungen Nepers gestofsen war, habe ich es nicht für überflüssig gehalten, auch auf andere Substitutionen in der sphärischen Trigonometrie einzugehen, die in mehr oder minder engem Zusammenhang mit dem zu behandelnden Thema stehen, und die die Möbiussche Entwickelung der sphärischen Trigonometrie[2]), wenn nicht in beträchtlicher Weise vereinfachen, so doch jedenfalls aufserordentlich übersichtlich gestalten.

§ 1.

Bestimmung der Seiten und Winkel der sphärischen Dreiecke.

Sind auf einer Kugeloberfläche drei Punkte gegeben, so erfordert die eindeutige Festlegung eines der (sechzehn) durch sie als Eckpunkte bestimmten sphärischen Dreiecke noch vier nähere Angaben. Drei davon beziehen sich auf die Auswahl der beiden sich zu 2π ergänzenden je zwei Eckpunkte verbindenden Bögen als Seiten, die vierte auf die Winkel. Sobald man nämlich auf einem der gewählten Bögen die Seite fixiert hat, mit der er die anliegenden Winkel einschliefsen soll, so sind auch die entsprechenden Seiten auf den beiden

1) Dieser Begründung fügt Neper folgende Bemerkung hinzu: Praeter hanc probationem per inductionem omnium casuum, qui occurrere possunt, potest idem theorema lucide perspici ex praecedentibus . . . (hier folgt ein Hinweis auf einige vorhergehende Bemerkungen, die sich an eine merkwürdige Figur, eine Art von Pentagramm, anschliefsen), in quorum schemata homologa circularium partium constitutio earundem analogiae similitudinem arguit: ita ut quod de una intermedia et suis extremis circumpositis aut oppositis vere enuntiatur, de ceteris quatuor intermediis et suis extremis respective circumpositis aut oppositis negari non possit. Die „circulares partes" sind im wesentlichen die in unserer weiter unten aufgeführten Substitution N auftretenden Elemente, die auch bei dem üblichen Ausdruck der Neperschen Regeln vorkommen.

2) Möbius, Werke Bd. 2. in den Abhandlungen „Analytische Sphärik" und „Grundformeln der sphärischen Trigonometrie".

anderen Bögen und somit auch die drei Winkel des sphärischen Dreiecks bestimmt. Bei dieser Bestimmungsweise werden alle Seiten und Winkel nach dem Modul 2π betrachtet. Wir bezeichnen im folgenden die Seiten durch a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel beziehungsweise durch A, B, C.

Wird je eine dieser Bestimmungsweisen umgeändert, so finden dadurch gleichzeitig Veränderungen gewisser anderer Stücke statt, die man am einfachsten durch die Substitutionen

$$S_1 = (a, -a)(B, \pi + B)(C, \pi + C)$$
$$S_2 = (b, -b)(C, \pi + C)(A, \pi + A)$$
$$S_3 = (c, -c)(A, \pi + A)(B, \pi + B)$$
$$T = (A, -A)(B, -B)(C, -C)$$

darstellen kann, die alle von der Periode 2 und gegen einander vertauschbar sind, so dafs die Gesamtheit eine Gruppe von 16 Substitutionen bedingt, die den 16 verschiedenen durch drei Punkte möglichen sphärischen Dreiecken entsprechen.

Mit Hülfe dieser Substitutionen läfst sich jedes sphärische Dreieck auf ein solches reduzieren, in dem alle Seiten und Winkel zwischen den Grenzen 0 und π liegen. Denn zunächst kann man durch Anwendung von S_1, S_2, S_3 immer erreichen, dafs die Seiten den geforderten Bedingungen Genüge bieten. Wenn aber die drei Seiten kleiner als π sind, so liegen die drei Gegenpunkte der Ecken alle auf derselben Seite des Umfangs, der die Kugeloberfläche in zwei einfach zusammenhängende Gebiete teilt, von denen dasjenige, in dem die Gegenpunkte liegen, als das äufsere, das andere als das innere bezeichnet werden mag. Es ist dann nicht schwer nachzuweisen[1]), dafs die Winkel im inneren Gebiet $< \pi$, die im äufseren $> \pi$ sind. Daher läfst es sich dann durch Anwendung der Substitution T stets bewirken, dafs alle Winkel $< \pi$ werden. Jede Relation, die für ein solches „reduziertes“ Dreieck bewiesen ist, kann leicht auf beliebige Dreiecke ausgedehnt werden. Es ist dazu nur nötig, sie so zu verallgemeinern, dafs sie aufserdem noch ungeändert bleibt bei Anwendung der Substitutionen S_1, S_2, S_3, T.

§ 2.

Nebendreiecke und Scheiteldreiecke.

Verwandelt man je einen der Eckpunkte eines reduzierten sphärischen Dreiecks in den Gegenpunkt, läfst die beiden übrigen

1) Nämlich aus den Ungleichungen in § 3.

dagegen ungeändert, so entstehen drei „Nebendreiecke", deren Stücke hervorgehen durch die Substitutionen

$$U_1 = (b, \pi - b)(c, \pi - c)(B, \pi - B)(C, \pi - C)$$
$$U_2 = (c, \pi - c)(a, \pi - a)(C, \pi - C)(A, \pi - A)$$
$$U_3 = (a, \pi - a)(b, \pi - b)(A, \pi - A)(B, \pi - B),$$

die eine Vierergruppe bilden, d. h. die Periode 2 haben, gegen einander vertauschbar sind und die Gleichungen erfüllen

$$U_1 = U_2 U_3, \quad U_2 = U_3 U_1, \quad U_3 = U_1 U_2,$$

aus denen folgt, dafs ein Dreieck, das durch zwei der Substitutionen U nicht geändert wird, alle drei zuläfst. Wendet man auf die erhaltenen Nebendreiecke den angegebenen Prozefs der Dreiecksbildung wiederholt an, so gelangt man noch zu vier neuen Dreiecken, die sich zwar in den Stücken nicht von den schon gewonnenen unterscheiden und ihnen als symmetrische „Scheiteldreiecke" zugeordnet werden können. Will man diesen Sachverhalt durch Einführung der Operation J, die zur Bildung der Scheiteldreiecke führt, zum Ausdruck bringen, so kann man alle aus dem ursprünglichen Dreieck entstehenden neuen Dreiecke in der Tabelle

$$\begin{matrix} 1, & U_1, & U_2, & U_3 \\ J, & JU_1, & JU_2, & JU_3 \end{matrix}$$

darstellen.

Die Substitutionen U_1, U_2, U_3 sind mit den Substitutionen S_1, S_2, S_3, T vertauschbar, und hieraus ergiebt sich sofort, dafs das soeben Bemerkte nicht blofs für reduzierte, sondern überhaupt für allgemeine Dreiecke Gültigkeit beibehält. Betrachtet man überhaupt die Gesamtheit dieser Substitutionen, so empfiehlt es sich, statt der von einander abhängigen U_1, U_2, U_3 und statt T drei neue unabhängige

$$V_1 = (A, -A)(b, \pi + b)(c, \pi + c)$$
$$V_2 = (B, -B)(c, \pi + c)(a, \pi + a)$$
$$V_3 = (C, -C)(a, \pi + a)(b, \pi + b)$$

einzuführen, die zu S_1, S_2, S_3 reciprok, gleichfalls mit ihnen vertauschbar und ebenso wie sie von der Periode 2 sind. Dafs dadurch an der Gesamtgruppe nichts geändert wird, ist leicht zu erkennen, denn es ist einerseits

$$V_1 = TU_1S_2S_3, \quad V_2 = TU_2S_3S_1, \quad V_3 = TU_3S_1S_2,$$

andererseits

$$T = V_1V_2V_3, \quad U_1 = S_2S_3V_2V_3, \quad U_2 = S_3S_1V_3V_1, \quad U_3 = S_1S_2V_1V_2.$$

Inhalt der sphärischen Dreiecke.

Bezeichnet man mit J den Inhalt eines reduzierten sphärischen Dreiecks und deutet durch die als Index beigefügte Substitution den Inhalt des durch sie aus dem ursprünglichen entstehenden neuen Dreieckes an, so gelten folgende Relationen

$$J + J_{U_1} = 2A, \quad J + J_{U_2} = 2B, \quad J + J_{U_3} = 2C.$$

Hierbei ist unter Inhalt der des inneren Gebietes (vgl. § 1) verstanden und überdies vorausgesetzt, dafs für die Oberfläche der Kugel die Gröfse 4π angenommen wird. Dann folgt leicht (durch Anwendung der Substitutionen U und Elimination)

$$\begin{aligned} J &= A + B + C - \pi \\ J_{U_1} &= A - B - C + \pi \\ J_{U_2} &= -A + B - C + \pi \\ J_{U_3} &= -A - B + C + \pi. \end{aligned}$$

Da das reduzierte Dreieck durch Anwendung der Substitutionen U wieder in ein reduziertes übergeht, so müssen alle diese Ausdrücke positiv sein, und es läfst sich leicht erkennen, dafs sie zwischen den Grenzen 0 und 2π enthalten sind, denn es ist

$$J + J_{U_1} + J_{U_2} + J_{U_3} = 2\pi.$$

Für allgemeine sphärische Dreiecke ist der Satz, dafs der Inhalt dem sphärischen Exzefs gleich ist, schon aus dem Grunde nicht mehr gültig, weil der Inhalt eine mod 4π völlig bestimmte Gröfse ist, während die Winkel nur mod 2π betrachtet werden. Nichtsdestoweniger gilt auch hier der Satz mit der Einschränkung, dafs der Inhalt mod 2π dem Exzefs congruent ist. Es bleibt daher nur noch übrig hinzuzufügen, in welchem der beiden Intervalle $0 \ldots 2\pi$ und $2\pi \ldots 4\pi$ der Inhalt liegt: Geht das Dreieck aus einem reduzierten vermöge der Substitution

$$S_1^{\sigma_1} S_2^{\sigma_2} S_3^{\sigma_3} T^{\tau} \quad (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau = 0,1)$$

hervor, so ist

$$J \equiv 2\pi(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \tau) + E \bmod 4\pi,$$

wo E den kleinsten positiven Rest von $A + B + C - \pi$ mod 2π bedeutet.

Der Inhalt ist daher gleich dem Exzefs selber, wenn das Dreieck aus einem reduzierten entsteht vermöge der Substitutionen der Gruppe

$$1,\ S_2S_3,\ S_3S_1,\ S_1S_2,\ S_1T,\ S_2T,\ S_3T,\ S_1S_2S_3T;$$

dagegen mufs 2π hinzugefügt werden, wenn es hergeleitet wird durch

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ T,\ S_2S_3T,\ S_3S_1T,\ S_1S_2T,\ S_1S_2S_3.$$

§ 4.

Sphärische Dreiecke, die durch die Substitutionen U ungeändert bleiben.

I. Läfst ein sphärisches Dreieck alle drei Substitutionen U_1, U_2, U_3 zu, so ist $2a \equiv 2b \equiv 2c \equiv 2A \equiv 2B \equiv 2C \equiv \pi$. Ist es reduziert, so haben alle Stücke die Gröfse $\frac{\pi}{2}$ (dreirechtwinkliges sphärisches Dreieck). In diesem Falle gelten jedenfalls die Kongruenzen

$$A - a \equiv B - b \equiv C - c \mod 2\pi.$$

Sie bleiben aber auch bestehen bei Anwendung der Substitutionen S_1, S_2, S_3, T, von denen man die ersten drei auch durch

$$S_1T = (a,-a)(A,-A),\ S_2T = (b,-b)(B,-B),\ S_3T = (c,-c)(C,-C)$$

ersetzen kann. Diese ändern keine der Differenzen $A - a$, $B - b$, $C - c \mod 2\pi$, während T eine Änderung aller um π verursacht. Die obigen Kongruenzen, durch die der Zusammenhang zwischen den Seiten und Winkeln vollständig definiert ist, sind daher allgemein gültig.

II. Wenn das sphärische Dreieck nur eine der Substitutionen U zuläfst, etwa U_3, so ist $2a \equiv 2b \equiv 2A \equiv 2B \equiv \pi$. Ist das Dreieck reduziert, so ist $a \equiv b \equiv A \equiv B \equiv \frac{\pi}{2}$ und $C \equiv c$ (zweirechtwinkliges sphärisches Dreieck). In diesem Falle ist

$$A - a \equiv B - b,$$
$$C \equiv \varepsilon\varepsilon' c + \frac{1-\varepsilon}{2}\pi,$$

wenn in der letzten Kongruenz die Vorzeichen ε und ε', wie es infolge der ersten geschehen darf, durch zwei in verschiedenen Horizontalreihen stehende Gleichungen des Systems

$$a = \varepsilon b, \quad A = \varepsilon B,$$
$$a = \varepsilon' A, \quad b = \varepsilon' B$$

definiert werden. Diese Relationen bleiben bestehen, wenn die Substitutionen S_1, S_2, S_3, T zur Anwendung kommen, woraus ihre allgemeine Gültigkeit folgt.

§ 5.

Zusammensetzung zweier sphärischer Dreiecke.

Wenn zwei sphärische Dreiecke in einer Seite und einem anliegenden Winkel übereinstimmen, so ergiebt sich aus beiden durch Zusammensetzung eine Reihe von neuen sphärischen Dreiecken, die alle durch Änderung des Sinnes der Seiten und Winkel, d. h. durch Anwendung der in § 1 angegebenen Substitutionen aus einem einzigen hergeleitet werden können. Wir bezeichnen alle sich auf das zweite Dreieck beziehenden Gröfsen und Substitutionen durch Accente und nehmen an, es sei

$$a = a', \quad B = B'.$$

Alle diejenigen Änderungen des Sinnes der Seiten und Winkel, bei denen diese Gleichungen bestehen bleiben, werden dann hervorgebracht durch Anwendung der Substitutionen

$$S_1 S_1', \; S_2, S_2', \; S_3 S_3', \; TT'$$

und deren Produkte. Mit ihrer Hülfe ist es nun stets möglich, das erste Dreieck vollständig, das zweite so weit zu reduzieren, dafs $b' < \pi$ wird. Ist das, wenn nötig, geschehen, so lehrt eine einfache Konstruktion, vor des erforderlichen Falles noch das eine Dreieck in das symmetrische zu verwandeln ist, die Existenz eines neuen Dreiecks, dessen Stücke bei der Annahme $c > c'$, $C > C'$

$$a'' = b, \; b'' = b', \; c'' = c - c', \; A'' = \pi - A', \; B'' = A, \; C'' = C - C',$$

bei der Annahme $c < c'$, $C < C'$

$$a'' = b, \; b'' = b', \; c'' = c' - c, \; A'' = A', \; B'' = \pi - A, \; C'' = C' - C$$

sind. Ändert man nun die Sinne der Seiten und Winkel durch die oben bezeichneten Substitutionen, so erkennt man leicht, dafs die erste überhaupt keine Änderung der Gröfsen a'', b'', c'', A'', B'', C'' hervorbringt, und dafs die durch die übrigen erfolgenden Änderungen auch entstehen durch Anwendung von S_1'', S_2'', S_3'', T'', d. h. durch Änderung des Sinnes der Stücke des neuen Dreiecks. Aufserdem ist ersichtlich, dafs die oben unterschiedenen beiden Fälle durch Anwendung von $S_3'' T''$ aufeinander zurückgeführt werden können. Hieraus folgt mit wenigen Schlüssen, dafs die gelehrte Zusammensetzung überhaupt allgemeine Gültigkeit besitzt.

§ 6.

Die „Nepersche Substitution" für rechtwinklige sphärische Dreiecke und die Neperschen Regeln.

Ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck kann in allgemeinster Weise durch die Kongruenz

$$2C \equiv \pi$$

definiert werden, die die beiden Lösungen $C \equiv \frac{\pi}{2}$ und $C \equiv -\frac{\pi}{2}$ besitzt. Um aus der Existenz eines rechtwinkligen Dreiecks die anderer herzuleiten, nehmen wir zwei Dreiecke von der in § 4. II genannten Art zu Hülfe, in denen die Seiten den gegenüberliegenden Winkeln gleich sind. Das erste habe die Seiten C, C, a, das zweite C, C, $C - B$. Aus der Zusammensetzung des rechtwinkligen Dreiecks mit dem ersten Hülfsdreieck entsteht ein (rechtseitiges) Dreieck mit den Seiten C, c, $C - b$ und den Gegenwinkeln $\pi - A$, a, $C - B$. Wird dieses mit dem zweiten Hülfsdreieck zusammengesetzt, so ergiebt sich wieder ein recktwinkliges Dreieck mit den Seiten $C - c$, $C - B$, $C - b$ und den Gegenwinkeln $C - a$, A, C, das aus dem ursprünglichen auch durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} a & b & c & A & B & C \\ C-c & C-B & C-b & C-a & A & C \end{pmatrix}$$

hervorgeht, die cyklisch von der fünften Ordnung ist und einfacher in der Form

$$(a,\ C-c,\ b,\ C-B,\ C-A),$$

oder auch

$$(C-a,\ c,\ C-b,\ B,\ A)$$

geschrieben werden kann. Da diese wiederholt zur Anwendung kommen kann, so führen wir ihre zweite Potenz

$$N = (C-a,\ C-b,\ A,\ c,\ B)$$

ein. Sie ist es, die auf das innigste mit den von Neper aufgestellten Regeln zusammenhängt und deren eigentlichen Grund darlegt. Ihre Veranschaulichung führt von selbst zu der Anordnung ihrer Elemente auf einem Kreise, in der Weise, wie die Stücke im Dreieck bei einer der beiden möglichen Umlaufungen aufeinander folgen unter Weglassung des (positiven oder negativen) rechten Winkels, aber unter Ersetzung der Katheten a und b durch ihre „Komplemente" $C - a$ und $C - b$.

Die Substitution N kann nun auf jede Relation zwischen den Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks zur Anwendung kommen, denn die Relation, die für jedes rechtwinklige Dreieck gilt, mufs auch für dasjenige Gültigkeit beibehalten, dessen Existenz durch die Substitution N angezeigt wird. Die ganze Trigonometrie der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke läfst sich somit auf eine einzige Formel basieren, aus der alle übrigen abgeleitet werden können.

Geht man von der einfachsten Relation zwischen drei Stücken, nämlich von

$$\cos a \cos b = \cos c$$

aus, die man mit Rücksicht auf die in N vorkommenden Elemente auch in der Form

$$\sin (C - a) \sin (C - b) = \cos c$$

schreiben kann, so lehrt diese, dafs der Cosinus eines bestimmten Elementes (nämlich von c) gleich dem Produkte der Sinusse der „gegenüberliegenden" Elemente ($C - a$ und $C - b$) ist. Aus der Zulässigkeit der cyklischen Substitution folgt dann sofort, dafs dieser Satz überhaupt für jedes beliebige Element gilt, da die gegenseitige Stellung der Elemente durch die Substitution nicht geändert wird. Wendet man die Nepersche Substitution mehrfach an, so ergiebt sich durch N und N^4

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C,$$
$$\sin B \cos a = \cos A \sin C,$$

durch N^2 und N^3

$$\sin A \sin c = \sin a \sin C,$$
$$\sin B \sin c = \sin b \sin C.$$

Aus den Gleichungen

$$\cos a \cos b = \cos c,$$
$$\cos A \sin C = \cos a \sin B,$$
$$\cos B \sin C = \cos b \sin A$$

ergiebt sich durch Elimination von $\cos a$ und $\cos b$ durch Multiplikation die Relation

$$\cot A \cot B = \cos c.$$

Aus dieser folgert man ähnlich wie vorhin, dafs der Cosinus irgend eines Elementes gleich dem Produkte der Cotangenten der „anliegenden" Elemente ist. Man erhält durch N und N^4

$$\operatorname{tg} a \cot c = \cos B,$$
$$\operatorname{tg} b \cot c = \cos A,$$

durch N^2 und N^3

$$\operatorname{tg} b \cot B = \sin a \sin C,$$
$$\operatorname{tg} a \cot A = \sin b \sin C.$$

Da von je dreien der überhaupt vorkommenden fünf Elemente stets zwei entweder beide als anliegende oder beide als gegenüberliegende des dritten angesehen werden können, so umfassen die Neperschen Regeln überhaupt alle Relationen zwischen je drei Stücken (abgesehen natürlich vom rechten Winkel).

§ 7.

Aufstellung einer Gruppe von 640 Substitutionen für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

Es ist nicht ohne Interesse, die Gesamtheit aller Substitutionen zu untersuchen, die aus einem rechtwinkligen Dreieck neue Dreiecke derselben Art entstehen lassen. Aufser den in § 1 und § 2 behandelten und der Neperschen Substitution N ist hierbei noch die folgende

$$W = (a, b)(A, B)$$

zulässig.

Untersucht man die Produkte der Substitutionen S_1, S_2, S_3, V_1, V_2, V_3 und N, so findet man leicht

$$S_1 N = N S_2, \qquad V_1 N = N S_3,$$
$$S_2 N = N V_1 V_3, \qquad V_2 N = N V_3 S_1,$$
$$S_3 N = N V_2, \qquad V_3 N = N V_3,$$

und hieraus

$$V_1 = N S_3 N^4, \quad V_2 = N^4 S_3 N, \quad V_3 = N^3 S_3 N^2 S_1.$$

Es sind also die Substitutionen V_1, V_2, V_3 durch N und S_1, S_3 bedingt. Ferner folgt, dafs alle durch Komposition hervorgehenden Produkte so umgeformt werden können, dafs in ihnen eine Potenz von N den ersten Faktor bildet, sie also geschrieben werden können in der Form

$$N^\nu S_1^{\sigma_1} S_2^{\sigma_2} S_3^{\sigma_3} V_1^{v_1} V_2^{v_2} V_3^{v_3}$$
$$(\nu = 0, 1, 2, 3, 4; \ \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, v_1, v_2, v_3 = 0, 1)$$

und eine Gruppe von 320 Substitutionen bilden. Nimmt man nun noch die Substitution W hinzu, so ergiebt sich leicht die Gültigkeit der Gleichungen

$$WN = N^4 W, \quad WN^2 = N^3 W, \quad WN^4 = NW,$$

von denen aus einer die beiden übrigen abgeleitet werden können, und ferner der folgenden

$$S_1 W = W S_2, \quad V_1 W = W V_2,$$
$$S_2 W = W S_1, \quad V_2 W = W V_1,$$
$$S_3 W = W S_3, \quad V_3 W = W V_3.$$

Man schliefst hieraus, dafs die Ordnungszahl der zuletzt betrachteten Gruppe durch Aufnahme von W verdoppelt wird, die erweiterte Gruppe also 640 Substitutionen enthält.

§ 8.

Ableitung der Polarsubstitution für beliebige sphärische Dreiecke.

Ein beliebiges sphärisches Dreieck läfst sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammensetzen. Hat das eine mit dem ursprünglichen a als Hypotenuse, B als anliegenden Winkel gemeinsam und wird es durch Fixierung des rechten Winkels $D \equiv \pm\frac{\pi}{2}$ vollständig bestimmt, so möge der andere anliegende Winkel durch C', die bzw. B und C' gegenüberliegenden Katheten durch d und c' bezeichnet werden. Durch Zusammensetzung dieses rechtwinkligen Dreiecks mit dem ursprünglichen entsteht ein anderes rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten d und $c'' = c - c'$, den gegenüberliegenden Winkeln A und $C'' = C - C'$, der Hypotenuse b und dem rechten Winkel D. Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke haben die Nepersche Substitutionen die Form

$$(D - d,\ D - c',\ B,\ a,\ C')$$

und

$$(D - d,\ D - c'',\ A,\ b,\ C'').$$

Wendet man auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke die inverse Nepersche Substitution an, so ergiebt sich aus dem ersten ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten d, B, $D - C'$ und den Gegenwinkeln a, D, $D - c'$, aus dem zweiten zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten d, A, $D - C''$ und den Gegenwinkeln b, D, $D - c''$, aus dem aber dann durch Sinnesänderung der Seite $D - C''$ mit den zugehörigen anliegenden Winkeln und darauf erfolgender Umänderung aller Winkel ein solches entsteht, in dem die Seiten d, A, $-D + C''$, die Gegenwinkel $\pi - b$, D, $-D + c''$ sind, und das sich mit dem zuerst erhaltenen zu einem neuen zusammensetzen

läfst. Dieses hat nur solche Stücke, die in dem ursprünglichen Dreieck selbst vorkommen, nämlich die Seiten A, B, $\pi - C$ und die Gegenwinkel a, b, $\pi - c$, entsteht also aus ihm durch die Substitution

$$(a,\ A)\,(b,\ B)\,(c,\ \pi - C).$$

Bringt man nun noch die Substitution U_3 zur Anwendung, so erhält man die Polarsubstitution

$$P = (a,\ \pi - A)\,(b,\ \pi - B)\,(c,\ \pi - C).$$

Diese genügt in Bezug auf S_1, S_2, S_3, V_1, V_2, V_3 den Gleichungen

$$PS_i = V_i P \quad (i = 1, 2, 3)$$

und es folgt daraus leicht, dafs durch ihre Einverleibung eine Gruppe von 128 Substitutionen entsteht, die in der Form

$$P^{\pi} S_1^{\sigma_1} S_2^{\sigma_2} S_3^{\sigma_3} V_1^{v_1} V_2^{v_2} V_3^{v_3},$$
$$(\pi,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ v_1,\ v_2,\ v_3 = 0,\ 1)$$

dargestellt werden können. Erweitert man diese Gruppe noch durch die Hinzunahme der 6 Permutationen, die durch gleichzeitige Änderung der Bezeichnung der Seiten und Winkel sich ergeben, so entsteht eine solche von 768 Substitutionen.

Wendet man die Polarsubstitution auf den in § 3 enthaltenen Ausdruck für den Inhalt eines reduzierten sphärischen Dreiecks und ferner U_1, U_2, U_3 an, so erhält man

$$J_P = 2\pi - a - b - c,$$
$$J_{PU_1} = -a + b + c,$$
$$J_{PU_2} = a - b + c,$$
$$J_{PU_3} = a + b - c,$$

und aus dem Umstande, dafs diese Gröfsen zwischen den Grenzen 0 und 2π liegen müssen, bekannte Ungleichheitsbedingungen zwischen den Seiten sphärischer Dreiecke.

Die Potenzentwicklung der Funktion:

$$F(x) = \frac{1 - \prod_{0}^{m-1}{}_i \prod (1 - x^{ri+s})}{(1 - x^{rm}) \prod_{0}^{m-1}{}_i \prod (1 - x^{ri+s})}$$

Von J. Schröder in Hamburg.

Im Bd. III dieser Mitteilungen habe ich den folgenden Satz hergeleitet: „Die Anzahl aller derjenigen Teiler von $\left(n - r\sum_{1}^{m} i\varrho_i\right)$, die sich für alle möglichen Wertekombinationen $(\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m) = 0, 1, 2, 3 \ldots$ ergeben, dabei aber gröfser als $\sum_{1}^{m} \varrho_i$ sind und zugleich Komplementarteiler von der Form $(r\omega + s)$ besitzen, ist gleich dem Koefficienten des Gliedes n^{ter} Ordnung in der Entwicklung der Funktion:

$$(1) \quad \ldots \quad F(x) = \frac{1 - \prod_{0}^{m-1}{}_i \prod (1 - x^{ri+s})}{(1 - x^{rm}) \prod_{0}^{m-1}{}_i \prod (1 - x^{ri+s})}.“$$

Nennt man die Anzahl aller Teiler von α, die gröfser sind als β und die zugleich einen Komplementarteiler γ haben, $\psi_\gamma(\alpha; \beta)$ und bezeichnet man den Koefficienten von x^n in der Entwicklung von $F(x)$ mit $C_n^{(m, r, s)}$, so formuliert sich der soeben ausgesprochene Satz in folgender Weise:

$$(2) \quad \ldots \sum_{\varrho_1, \varrho_2, \cdots \varrho_m = 0, 1, 2, \cdots} \psi_{r\omega + s}\left(n - r \cdot \sum_{1}^{m} i\varrho_i ; \sum_{1}^{m} \varrho_i\right) = C_n^{(m, r, s)}.$$

Hierin bedeuten n, r, s, m positive ganze Zahlen, die gröfser als Null sind, wobei $r \geqq s$ ist. Die reelle Veränderliche x in $F(x)$ soll der Bedingung unterliegen: $x < 1$.

Da ich nun den numerischen Wert von $C_n^{(m, r, s)}$ bei der früheren Gelegenheit nicht näher bestimmt, sondern mich damals mit seiner zahlentheoretischen Bestimmung begnügt habe, so will ich als Ergänzung im folgenden die numerische Auswertung des $C_n^{(m, r, s)}$ angeben.

Vgl. „Mitteilungen der mathem. Gesellschaft in Hamburg“, Bd. III, Heft 4 S. 180 (1894) oder Bachmann: Analytische Zahlentheorie S. 492. (1894.)

1.

Behufs Ermittlung des Wertes von $C_n^{(m,r,s)}$ spalten wir die Funktion: $F(x)$ in die beiden Teile:

(3) $\varphi(x) = \dfrac{1}{(1-x^{rm})\prod_0^{m-1}\prod_i(1-x^{ri+s})}$ und $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{1-x^{rm}}$, so dafs:

(4) . . . . . $F(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)$ ist.

Wegen der Bedingung $x < 1$ gilt die Entwicklung:

(5) . . . . . $\varphi_1(x) = \sum_0^\infty{}_i x^{irm}$.

Sämtliche Koefficienten dieser Entwicklung haben, sofern sie nicht verschwinden, den Wert 1.

Die Funktion $\varphi(x)$ entwickeln wir nach dem Maclaurinschen Theorem; es ist

(6) . . . . . $\varphi(x) = \sum_0^\infty{}_i \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} x^i$.

Zunächst folgt aus der Definition von $\varphi(x)$: $\varphi(0) = 1$.

Durch einmalige Differentiation folgt:

(7) $\varphi'(x) = \dfrac{1}{(1-x^{rm})\prod_0^{m-1}\prod_i(1-x^{ri+s})}\left\{\sum_0^{m-1}{}_i \dfrac{(ri+s)x^{ri+s-1}}{1-x^{ri+s}} + \dfrac{rmx^{rm-1}}{1-x^{rm}}\right\}$.

Aus dem Umstande, dafs im allgemeinen $r > s$ ist, folgt, dafs rm um so mehr s übertrifft, und da für $x = 0$ $\varphi'(x)$ $(s-1)$-fach verschwindet, so folgt, dafs:

(8) . . . . $\varphi'(0) = \varphi''(0) = \cdots = \varphi^{(s-1)}(0) = 0$ ist.

Aus (7) geht hervor, dafs

(9) . . . . . $\varphi'(x) = \varphi(x) \cdot \chi(x)$ ist, wenn:

(9a) . . $\chi(x) = \sum_0^{m-1}{}_i \dfrac{(ri+s)x^{ri+s-1}}{1-x^{ri+s}} + \dfrac{rmx^{rm-1}}{1-x^{rm}}$ ist.

Für (9a) kann, da:

$$\frac{1}{1-x^{ri+s}} = \sum_0^\infty{}_k x^{ri+s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-x^{rm}} = \sum_0^\infty{}_k x^{rm} \text{ ist},$$

auch das folgende gesetzt werden:

$$(10)\quad \chi(x) = \sum_{0}^{m-1} \sum_{1}^{\infty} (ri+s)\cdot x^{k(ri+s)-1} + \sum_{1}^{\infty} rm \cdot x^{krm-1}.$$

Die höheren Ableitungen von $\varphi(x)$ werden nun aus (9) entw
Es wird:

$$\varphi''(x) = \varphi'(x)\chi(x) + \varphi(x)\chi'(x)$$
$$\varphi'''(x) = \varphi''(x)\chi(x) + 2\varphi'(x)\chi'(x) + \varphi(x)\chi''(x)$$
. . . . . .

und allgemein:

$$(11)\quad \overset{(n)}{\varphi}(x) = \overset{(n-1)}{\varphi}(x)\chi(x) + (n-1)_1 \overset{(n-2)}{\varphi}(x)\chi'(x) + \cdots + \varphi(x)\overset{(n-}{\chi}(x).$$

Da es uns auf den Wert von $\overset{(n)}{\varphi}(0)$ ankommt, vereinfach
die rechte Seite aus zwei Gründen. Erstens fallen alle Glieder
die $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..., $\overset{(s-1)}{\varphi}(0)$ enthalten; zweitens kommen auc
Glieder in Fortfall, welche $\chi(0)$, $\chi'(0)$ .... $\overset{(s-2)}{\chi}(0)$ enthalten, da
für $x = 0$ $(s-1)$-fach verschwindet und dafür für $x = 0$
der Funktion selbst noch die ersten $(s-2)$ Derivierten verschw
müssen. Demnach wird

$$\overset{(n)}{\varphi}(0) = (n-1)_{s-1}\overset{(s-1)}{\chi}(0)\overset{(n-s)}{\varphi}(0) + (n-1)_s\overset{(s)}{\chi}(0)\overset{(n-s-1)}{\varphi}(0)$$
$$+ \cdots + (n-1)_{n-s-1}\cdot\overset{(n-s-1)}{\chi}(0)\overset{(s)}{\varphi}(0) + \varphi(0)\overset{(n-1)}{\chi}(0)$$

oder kürzer geschrieben:

$$(12)\quad . . \overset{(n)}{\varphi}(0) = \overset{(n-1)}{\chi}(0) + \sum_{0}^{n-2s}(n-1)_{s-1+\lambda}\overset{(s-1+\lambda)}{\chi}(0)\overset{(n-s-\lambda)}{\varphi}(0).$$

So lange $n \leqq (2s-1)$ ist, kommt der zweite Bestandte
rechten Seite nicht in Betracht, so dafs also für $n \leq 2s-$
Relation gilt:

$$(13)\quad . . . . . \overset{(n)}{\varphi}(0) = \overset{(n-1)}{\chi}(0).$$

Vermöge der Relation (12) wird nun $\overset{(n)}{\varphi}(0)$ durch die Deriv
niederer Ordnung: $\overset{(n-s)}{\varphi}(0)$, $\overset{(n-s-1)}{\varphi}(0)$ ..... $\overset{(s)}{\varphi}(0)$ ausgedrückt. Durch w
holte Anwendung der Rekursionsformel (12) gelingt es daher
Mühe, $\overset{(n)}{\varphi}(0)$ auf ein Aggregat von Termen zurückzuführen, in
keine Derivierten von φ von höherer als $(2s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung auft

2.

Um diese Reduktion auszuführen, nehmen wir an, dafs die beliebige positive ganze Zahl m die Form habe:

$$(14) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots n = \mu s + \nu,$$

wo μ und ν positive ganze Zahlen bedeuten und $s > \nu$ ist.

Dann lautet die Gleichung (12) wie folgt:

$$(15)\ \varphi(0)^{(\mu s+\nu)} = \chi(0)^{(\mu s+\nu-1)} + \sum_0^{(\mu-2)s+\nu} \lambda_0 (\mu s+\nu-1)_{s-1+\lambda_0}\, \chi(0)^{(s-1+\lambda_0)}\, \varphi(0)^{((\mu-1)s+\nu-\lambda_0)}.$$

Trägt man hierin den Wert ein, der sich auf Grund von (12) für $\varphi(0)^{((\mu-1)s+\nu-\lambda_0)}$ ergiebt, nämlich:

$$\varphi(0)^{((\mu-1)s+\nu-\lambda_0)} = \chi(0)^{((\mu-1)s+\nu-\lambda_0-1)} + \sum_0^{(\mu-2)s+\nu-\lambda_0} \lambda_1 ((\mu-1)s+\nu-\lambda_0-1)_{s-1+\lambda_1}\, \chi(0)^{(s-1+\lambda_1)}\, \varphi(0)^{((\mu-2)s+\nu-\lambda_0-\lambda_1)},$$

so wird:

$$\begin{aligned} 5)\ \varphi(0)^{(\mu s+\nu)} &= \chi(0)^{(\mu s+\nu-1)} + \sum_0^{(\mu-2)s+\nu} \lambda_0 (\mu s+\nu-1)_{s-1+\lambda_0} \cdot \chi(0)^{(s-1+\lambda_0)} \cdot \chi(0)^{((\mu-1)s+\nu-\lambda_0-1)} \\ &+ \sum_0^{(\mu-2)s+\nu-\lambda_0} \sum_0^{(\mu-2)s+\nu-\lambda_0} \lambda_1 (\mu s+\nu-1)_{s-1+\lambda_0} \cdot ((\mu-1)s+\nu-\lambda_0-1)_{s-1+\lambda_1} \\ &\cdot \chi(0)^{(s-1+\lambda_0)}\, \chi(0)^{(s-1+\lambda_1)}\, \varphi(0)^{((\mu-2)s+\nu-\lambda_0-\lambda_1)}. \end{aligned}$$

Nach σ-maliger Anwendung der Formel (12) ergiebt sich die Beziehung:

$$\begin{aligned} (17)\quad \varphi(0)^{(\mu s+\nu)} &= \chi(0)^{(\mu s+\nu-1)} + \sum_0^{\sigma-1} \sum_0^{(\mu-2)s+\nu} \cdots \sum_0^{(\mu-\delta-2)s+\nu-\sum_0^{\delta-1}\beta\lambda_\beta} \chi(0)^{((-\pi(\delta+1))s+\nu-\sum_0^{\delta}\beta\lambda_\beta-1)} \\ &\cdot \prod_0^{\delta} \alpha \Big[\Big((\mu-\alpha)s+\nu-\sum_0^{\alpha-1}\beta\lambda_\beta-1 \Big)_{s-1+\lambda_\alpha} \cdot \chi(0)^{(s-1+\lambda_\alpha)} \Big] \\ &+ \sum_0^{(\mu-2)s+\nu} \cdots \sum_0^{(\mu-\sigma-2)s+\nu-\sum_0^{\sigma-1}\beta\lambda_\beta} \varphi(0)^{((\mu-(\sigma+1))s+\nu-\sum_0^{\sigma}\beta\lambda_\beta)} \cdot \prod_0^{\sigma} \alpha \Big[\Big((\mu-\alpha)s+\nu-\sum_0^{\alpha-1}\beta\lambda_\beta \Big)_{s-1+\lambda_\alpha} \cdot \chi(0)^{(s-1+\lambda_\alpha)} \Big] \cdot \end{aligned}$$

Wird nun $\sigma = \mu - 2$ gewählt, so kommen in der Darstellung (17) nur noch Derivierte von $\varphi(x)$ vor, deren Ordnungszahlen sicher nicht gröfser als $(s + \nu)$ sind, und daher, weil $(s - 1)$ der gröfste für ν zulässige Wert ist, auch nicht die Zahl $(2s - 1)$ überschreiten können. Der Nullwert einer jeden dieser Ableitungen aber stimmt überein mit dem Nullwert derjenigen Ableitung von $\chi(x)$, deren Ordnung um eine Einheit niedriger ist (vgl. Glg. 13). Demnach erhalten wir für die Annahme $\sigma = \mu - 2$ aus (17) die nachstehende Gleichung:

$$(18)\quad \varphi^{(\mu s+\nu)}(0) = \chi^{(\mu s+\nu-1)}(0) + \sum_{0}^{\mu-2} \sum_{0}^{(\mu-2)s+\nu} \cdots \sum_{0}^{\lambda_\delta} \chi^{\left((\mu-(\delta+1))s+\nu-\sum_0^\delta \beta\lambda_\beta-1\right)}(0)$$

$$\cdot \prod_{\alpha}^{\delta} \left[\left((\mu-\alpha)s + \nu + \sum_{0}^{\alpha-1} \beta\lambda_\beta - 1 \right)_{s-1+\lambda_\alpha} \cdot \chi^{\left((\mu-(\delta+1))s+\nu-\sum_0^\delta \beta\lambda_\beta-1\right)}(0) \right].$$

Hierin müssen noch die Werte für die $\chi^{(\omega)}(0)$ eingetragen werden.

3.

Den Wert von $\chi^{(\omega)}(0)$ bestimmt man leicht auf folgende Weise. Es war nach (10)

$$\chi(x) = \sum_{0}^{m-1} \sum_{1}^{\infty} (ri+s) x^{k(ri+s)-1} + \sum_{1}^{\infty} k' rm \cdot x^{k' rm-1}.$$

Daraus folgt:

$$(19)\quad \chi^{(\omega)}(x) = \sum_{0}^{m-1} \sum_{1}^{\infty} (ri+s)(k(ri+s)-1)\cdots(k(ri+s)-\omega) x^{k(ri+s)-\omega-1}$$

$$+ \sum_{1}^{\infty} k' rm(k' rm-1)\cdots(k' rm-\omega) x^{k' rm-\omega-1},$$

wobei das Auftreten von Gliedern mit negativen Potenzexponenten völlig ausgeschlossen ist.

Für $x = 0$ verschwinden nun alle diejenigen Glieder der rechts in (19) auftretenden Doppelsumme, für welche der Exponent $k(ri + s) - \omega - 1$ von Null verschieden ist. Es kommen mithin dann nur solche Wertepaare für i und k in Betracht, für welche die Gleichung besteht:

(20) . . . . $k(ri+s)-\omega-1=0$ oder:

(21) . . $i=\frac{\omega+1-ks}{kr}$ und $k(ri+s)=\omega+1$.

Für k sind hierbei alle diejenigen positiven ganzen Zahlen mit Ausschluſs der Null zulässig, für welche i einen der positiven ganzzahligen Werte $0, 1, 2, \ldots (m-1)$ annimmt. Bezeichnet nun das Symbol:

(22) . . . . $\varepsilon\left(\frac{\omega+1-ks}{kr}\right)$ den Wert 1 oder 0,

je nachdem der Bruch $\frac{\omega+1-ks}{kr}$ eine positive ganze, $(m-1)$ nicht überschreitende Zahl (mit Einschluſs der Null) ist oder nicht, so wird der Nullwert des ersten Terms von (19) gleich:

(23) . . . . . $(\omega+1)!\sum_{1,2,3\ldots}^{k}\frac{1}{k}\cdot\varepsilon\left(\frac{\omega+1-ks}{kr}\right)$.

Ganz entsprechend verschwinden für $x=0$ in dem zweiten Teile von (19) alle diejenigen Glieder, für welche $(k'rm-\omega-1)$ von Null verschieden ist. Nur für

(24) . . . . $k'rm=\omega+1$ oder $k'=\frac{\omega+1}{rm}$

bleibt, sofern k' dann ganzzahlig und von Null verschieden ist, ein von Null verschiedener Bestandteil. Bezeichnen wir mit

(25) . . . . $\eta\left(\frac{\omega+1}{rm}\right)$ den Wert 1 oder 0,

je nachdem $\frac{\omega+1}{rm}$ positiv ganzzahlig (mit Ausschluſs der Null) ist oder nicht, so hat der zweite Summand in (19) den Nullwert:

(26) . . . . . $rm\cdot\omega!\cdot\eta\left(\frac{\omega+1}{rm}\right)$.

Mithin wird jetzt:

(27) $\chi^{(\omega)}(0)=(\omega+1)!\sum_{1,2,3\ldots}^{k}\frac{1}{k}\cdot\varepsilon\left(\frac{\omega+1-ks}{kr}\right)+rm\cdot\omega!\cdot\eta\left(\frac{\omega+1}{rm}\right)$.

4.

Mit Hilfe der Formeln (18) und (27) kann nun sofort der allgemeine Ausdruck für $C_{\mu s+\nu}^{(m,r,s)}$ gebildet werden. Man hat $\varphi^{(\mu s+\nu)}(0)$

durch $(\mu s + \nu)!$ zu teilen und diesen Quotienten dann noch um eine Einheit zu vermindern, wenn die Entwickelung

$$\varphi_1(x) = \sum_0^\infty i x^{irm}$$

das Glied $x^{\mu s+\nu}$ enthält. Das ist der Fall, wenn $i = \frac{\mu s + \nu}{rm}$ positiv ganzzahlig oder Null ist. Versteht man nun unter $\eta_0\left(\frac{\mu s + \nu}{rm}\right)$ den Wert 1 oder 0, je nachdem $\frac{\mu s + \nu}{rm}$ positiv ganzzahlig (mit Einschluſs der Null) ist oder nicht, so wird schliefslich die Zahl $C^{(m,r,s)}_{\mu s+\nu}$ in folgender Weise explicit ausgedrückt:

$$(28)\quad C^{(m,r,s)}_{\mu s+\nu} = \sum_{1,2,3\ldots}^{k} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon\left(\frac{(\mu - k)s + \nu}{kr}\right) + rm \cdot \eta\left(\frac{\mu s + \nu}{rm}\right) - \eta_0\left(\frac{\mu s + \nu}{rm}\right)$$

$$+ \frac{1}{(\mu s + \nu)!} \sum_0^{\mu-2} \sum_0^{(\mu-2)s+\nu} \cdots \sum_0^{\lambda_\delta} \left\{ \left((\mu - \delta - 1)s + \nu - \sum_0^{\delta-1} \beta\lambda_\beta\right)! \sum_{1,2,3\ldots}^{k} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon\left(\frac{(\mu - k - \delta - 1)s + \nu - \sum_0^{\delta} \beta\lambda_\beta}{kr}\right.\right.$$

$$\left.\left. + rm \cdot \left((\mu - \delta - 1)s + \nu - \sum_0^{\delta} \beta\lambda_\beta - 1\right)! \cdot \eta\left(\frac{(\mu - \delta - 1)s + \nu - \sum_0^{\delta} \beta\lambda_\beta}{rm}\right)\right\}$$

$$\cdot \prod_0^{\delta} \alpha \left[\left((\mu - \alpha)s + \nu - \sum_0^{\alpha-1} \beta\lambda_\beta - 1\right)_{s-1+\lambda_\alpha} \cdot \left\{ (s + \lambda_\alpha)! \sum_{1,2,3\ldots}^{k} \frac{1}{k} \cdot \varepsilon\left(\frac{(1 - k)s + \lambda_\alpha}{kr}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + rm(s - 1 + \lambda_\alpha)! \eta\left(\frac{s + \lambda_\alpha}{rm}\right)\right\}\right]$$

und nach dem in der Einleitung Gesagten ist dieses zugleich der allgemeine Wert des früher definierten Ausdrucks

$$\sum_{\varrho_1, \varrho_2, \ldots 0,1,2,3\ldots} \psi_{r\omega+s}\left(\mu s + \nu - r \cdot \sum_1^m i\varrho_i;\ \sum_1^m \varrho_i\right) \cdot$$

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1896|97.

Zusammengestellt vom Jahrverwalter J. H. Sieveking.

Versammlung am 8. Februar 1896.

(Nachtrag zum vorigen Jahresbericht.)

Herr Ingenieur J. H. Sieveking hält einen Vortrag über „die Funktion $u + iv = \sin(x + iy)$." Im Anschlufs an einen früheren Vortrag erläutert der Vortragende unter Vorlegung mehrerer Zeichnungen die durch die Sinusfunktion vermittelte konforme Abbildung. — Darauf spricht Herr Prof. Dr. Hoppe über die „Dimensionen der Energetik". Daran anknüpfend, dafs bei der energetischen Behandlung physikalischer Probleme das Bedürfnis auftreten mufs, durch Vergleich der Dimensionen der verschiedenen Ausdrücke die Richtigkeit der Resultate zu prüfen, zeigt der Vortragende an Beispielen aus der Elektrodynamik, wie man eine solche Kontrolle mit Hilfe energetischer Dimensionen ausüben kann.

Hauptversammlung am 17. Februar 1896.

Der Jahrverwalter, Herr Prof. H. Ahlborn berichtet über die Thätigkeit der Gesellschaft im Laufe des 206. Jahres ihres Bestehens. Die Gesellschaft besteht zur Zeit aus 12 Ehrenmitgliedern, 45 einheimischen und 19 auswärtigen Mitgliedern. Den Kassenbericht erstattet der Mitjahrverwalter, Herr J. H. Sieveking. Bei der satzungsmäfsig vorzunehmenden Wahl eines Mitjahrverwalters wird Herr Dr. F. Bohnert auf 3 Jahre gewählt. Der Vorstand besteht demnach im folgenden Jahre aus den Herren J. H. Sieveking, Jahrverwalter, Dr. F. Bohnert, Mitjahrverwalter, und Dr. J. Schröder, Adjunkt. Zum Mitgliede der Redaktionskommission wird Herr Dr. J. Schröder wiedergewählt. — Nach Schlufs der Hauptversammlung fand unter Beteiligung von einigen Gästen das übliche Stiftungsfestessen statt.

Versammlung am 14. März 1896.

Herr Dr. J. Schröder trägt vor über „die konforme Abbildung der Lemniskatenfläche". Nachdem die Funktion hergeleitet war, welche das Innere einer einteiligen Lemniskate so auf den Einheitskreis abbildet, dafs dem positiven Scheitelpunkt $s = \alpha$ der positive Einheitspunkt $w = 1$, und dem Brennpunkte $s = 1$ der Punkt $w = 0$ zugeordnet ist, wird gezeigt, dafs die abbildende Funktion für die Bernoulli'sche Lemniskate ($\alpha = \sqrt{2}$) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Als wahrer Wert dieses Quotienten ergab sich gerade die-

jenige Funktion, welche die eine Hälfte der Bernoulli'schen Lemniskate in der vorhergenannten Weise auf den Einheitskreis abbildet. — Darauf giebt Herr J. H. Sieveking in einem Vortrage über „relative Bewegungen auf einer rotierenden Kugelfläche“ zunächst den Beweis des Satzes von Corioli, durch welchen die Beschleunigung eines frei beweglichen Punktes relativ zu einem starren System definiert wird, um daran die Erläuterung derjenigen Kurven anzuschliefsen, die eine frei nach einem festliegenden Kreise bewegte Kugel auf der rotierenden Erdoberfläche beschreibt.

Versammlung am 11. April 1896.

Der Jahrverwalter begrüfst bei Beginn der Sitzung das anwesende auswärtige Mitglied, Herrn Prof. Dr. Schur aus Göttingen. — Herr Dr. F. Bohnert hält einen Vortrag über: „Eine elementare Behandlung der gebräuchlichsten Projektionsmethoden für Kartenentwürfe“. Nach einem historischen Referat über die Entwicklung der Kartenentwurfslehre wurden die allgemeinen Eigenschaften der perspektivischen Projektionen erläutert und darauf insbesondere die Centralprojektion, die orthographische und stereographische Projektion behandelt, wobei für jede dieser Projektionen die Berechnung und Konstruktion der Gradnetze angegeben wurden und endlich auch die Vorteile und Nachteile jeder einzelnen Methode beleuchtet wurden. Unter den nichtperspektivischen Projektionen kamen die mittelabstandstreue Azimutalprojektion von Postel und die flächentreue Azimutalprojektion von Lambert zur Erörterung. Der Vortrag schlofs mit der Besprechung der Globularprojektion und der modifizierten Globularprojektion von Nell. — Darauf machte Herr Prof. Dr. Schur eine Mitteilung über den „Schrittzähler“. Auf Grund vieler eigener Erfahrungen sprach sich der Vortragende dahin aus, dafs man eine grofse Konstanz und Genauigkeit in den Angaben des Schrittzählers selbst auf gröfseren Touren erreicht, wenn man denselben vertikal in der Brusttasche des Rockes anbringt und zugleich darauf achtet, dafs sich keine anderen Gegenstände in dieser Tasche befinden.

Versammlung am 9. Mai 1896.

Herr Prof. Dr. Schubert erstattet ausführlich Bericht über die Einteilung und den Inhalt der in Bearbeitung befindlichen Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. — Herr Dr. Bohnert trägt vor über: „Kegel- und Cylinderprojektionen in der Kartographie“. Nach Einteilung der in Betracht kommenden Projektionen in wahre und konventionelle

wurden von den Cylinderprojektionen, insbesondere die äquidistante Plattkarte, die Cassini-Soldner'sche Projektion, die winkeltreue Merkatorprojektion, die Sanson-Flamsted'sche Projektion sowie die Mollweide'sche oder Babinet's homalographische Projektion besprochen. Bei den Kegelprojektionen behandelt der Vortragende die äquidistante Projektion, diejenige von de l'Isle und Lambert's äquivalente Projektion. Unter den konventionellen Projektionen traten die Bonné'sche, die polykonische und die preufsische Polyederprojektion in den Vordergrund. Den Schlufs des Vortrages bildet eine kurze Würdigung der Arbeiten Tissot's.

Versammlung am 27. Juni 1896.

Vor Eintritt in die Tagesordnung begrüfste der Jahrverwalter im Namen der Gesellschaft Herrn Prof. O. Flamm aus Charlottenburg, welcher den Hauptvortrag des Abends übernommen hatte. Zu dem Vortrage hatte sich eine gröfsere Zahl von Gästen eingefunden. Zuvor nahm Herr J. H. Sieveking das Wort zu einem Vortrage über: „Die Einrichtung des Momentenplanimeters" und zeigte, wie man in einfachster Weise mit diesem Instrumente den Flächeninhalt, das statische Moment sowie das Trägheitsmoment einer jeden geschlossenen ebenen Figur in Bezug auf eine in der Ebene der Figur liegende Achse bestimmen kann.

Darauf hielt Herr Prof. Flamm seinen angekündigten Vortrag über „Stabilität von Schiffen". Zunächst wurde eingehend erläutert, in welcher Weise alle Stabilitätsverhältnisse wesentlich abhängig sind von der gegenseitigen Lage des Deplacementsschwerpunkts, des Systemschwerpunkts und des Metacentrums. Nachdem dann einige allgemeingültige Sätze über die Stabilitätsverhältnisse eines schwimmenden Körpers hergeleitet waren, wandte sich der Vortragende zur Herleitung der Gleichungen für die sog. statische und die dynamische Stabiltät. Es ergab sich, dafs die Kurve, deren Ordinaten die dynamische Stabilität darstellen, die Integralkurve der korrespondierenden Kurve der statischen Stabilität ist. Aus den aufgestellten Formeln ergab sich ferner, dafs eine Böe ein Schiff um den doppelten Winkel überneigt, bis zu welchem der stetig wehende Wind das Fahrzeug überneigt, sofern man annimmt, dafs die Deplacementsschwerpunktskurve ein Kreis und dementsprechend die Metacentrenkurve ein Punkt ist. Die dann folgende Betrachtung der Stabilitätsverhältnisse eines Fahrzeugs in bewegtem Wasser bei Annahme von Segeln und horizontal wirkendem Winde gliederte sich derart, dafs der Reihe nach die Schlingerbewegungen des Schiffes, die Wellenbewegungen

und deren Einwirkung auf das Fahrzeug sowie der Effekt des Windes auf die Überneigung des Schiffes diskutiert wurden. Bezüglich der Schlingerbewegungen ergab sich, dafs jedes Schiff nahezu isochron schwingt; hinsichtlich der Wellenbewegungen kamen die beiden von Rankine aufgestellten Sätze zur Geltung, nämlich: 1) dafs die Schwingungsperiode des Schiffes gröfser sein müsse als die Periode der gröfsten Wellen, die das Schiff treffen können; 2) dafs die Stabilitätskurve sich mindestens über das Intervall von 39° (später 50°) erstrecken mufs. Bei der Darlegung des Windeinflusses kam der Begriff der Reservestabilität zur Erläuterung. Zum Schlufs wurde einerseits noch der Widerstand, den das Wasser dem sich drehenden Schiffe entgegengesetzt, in Betracht gezogen, andererseits die Modifikation der Stabilitätsverhältnisse am leck gewordenen Fahrzeug berücksichtigt. — Der hier nur kurz skizzierte Vortrag ist inzwischen in voller Ausführlichkeit in den „Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie (Novemberheft 1896)“ veröffentlicht.

Versammlung am 12. September 1896.

Herr Dr. O. Pund wurde als einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Prof. Dr. Schubert hält einen Vortrag über „Das Hamilton'sche Dodekaëder- und einige verwandte Rundreiseprobleme“. Nach kurzer Erläuterung des „Problems der Königsberger Brücken“ wurde das zuerst von Hamilton gelöste Problem behandelt, ob und auf wie viele Weisen man längs der Kanten eines regulären Dodekaëders einen geschlossenen Linienzug so führen kann, dafs jede Ecke genau einmal besucht wird, ohne dafs notwendig jede Kante befahren werden mufs. Es wurde vom Vortragenden zunächst eine einfache eigene Lösung dieser auf 30 Arten lösbaren Aufgabe gegeben; dann folgte die Hamilton'sche Lösung. Schliefslich wurde das vom Vortragenden selbst entwickelte Verfahren noch auf einige andere Punktkonfigurationen angewandt, wobei jedesmal die genauen Formeln für die Zahl der Lösungen angegeben wurden. Auch wurde gezeigt, dafs sich das Rösselsprungproblem als ein verallgemeinertes Hamilton'sches Problem auffassen läfst und wie weit bislang die Lösung des Rösselsprungproblems gediehen ist.

Versammlung am 17. Oktober 1896.

Als einheimisches Mitglied der Gesellschaft wurde Herr Dr. A. Grimpen aufgenommen. — In die Redaktionskommission für die „Mitteilungen“ wurde Herr Dr. Busche gewählt. — Herr

Prof. Ahlborn trug vor über: „ebene Kurven, die bei zirkularer Inversion sich selbst zugeordnet sind". Die allgemeine Aufgabe, ebene rationale Kurven von der genannten Eigenschaft zu bestimmen, wurde zuerst dadurch gelöst, dafs die allgemeine Gleichung solcher Kurven in Polarkoordinaten entwickelt wurde. Darauf wurde gezeigt, wie man, ausgehend von der Polargleichung einer beliebigen Kurve n. Ordnung, dieser Kurve leicht eine Kurve $3n$. Ordnung von der gewünschten Art zuordnen kann, und dafs die Punkte dieser Kurve sich leicht aus den Punkten der Ausgangskurve konstruieren lassen. Aus den bestehenden Transformationsgleichungen folgte, dafs das Centrum der Inversion und die imaginären Kreispunkte der Ebene als n-fache Punkte der neuen Kurve auftreten. Nach Erörterung einiger allgemeiner Eigenschaften der einander zugeordneten Kurven wurden die Spezialfälle behandelt, in denen die Grundkurve eine Gerade bezw. ein Kegelschnitt ist.

Versammlung am 14. November 1896.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs der Senior der Gesellschaft, Herr Deichinspektor D. A. Schuback, welcher fast 50 Jahre der Gesellschaft als einheimisches Mitglied angehört, anläfslich der Feier seiner goldenen Hochzeit durch Umfrage bei den einheimischen Mitgliedern zum Ehrenmitgliede ernannt ist. Das Diplom ist Herrn Schuback am 14. November vom Vorstande, welcher die Glückwünsche der Gesellschaft überbrachte, überreicht worden. — Herr Direktor Prof. Dr. A. Thaer wird als einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Dr. Pund trägt vor über: „Substitutionsgruppen in der Sphärik, insbesondere über die Neger'schen Regeln in der sphärischen Trigonometrie". Dieser Vortrag erscheint in weiterer Ausführung in dem vorliegenden Hefte dieser Mitteilungen (S. 290 ff.).

Versammlung am 12. Dezember 1896.

Herr Dr. Schorr hält einen Vortrag über, „den heutigen Stand geodätischer Arbeiten". Nach Aufzählung der gröfseren Gradmessungen wurde das Bessel'sche und das Clarke'sche Erdellipsoid besprochen, sowie die aus der Mondbewegung und aus Pendelmessungen resultierenden Werte für die Abplattung der Erde angegeben. Als Repräsentant der ideellen Erdgestalt wurde dann das Geoid eingeführt, dessen Lage gegen eines jener Referenzellipsoide durch Lotabweichungen bestimmt ist. Diese wiederum folgen aus der Vergleichung astronomischer und geodätischer Ortsbestimmungen. Der Stand der hierfür

notwendigen Längen-, Breiten-, und Azimutbestimmungen wurde an der Hand mehrerer von der Kommission der europäischen Gradmessung veröffentlichter Karten dargelegt, desgleichen das Ergebnis der bislang beobachteten Lotabweichungen. Darauf erläuterte der Vortragende die Hypothese, dafs die gröfsere Menge der sich über der Erde erhebenden Gebirgsmassen durch unterirdische Massendefekte kompensiert ist. Nachdem dann noch über die namentlich vom militärgeographischen Institut in Wien und von der österreichischen Kriegsmarine mit Sterneck'schen invariablen Pendeln vorgenommenen Pendelmessungen berichtet war, schlofs der Vortrag mit den Angaben über Präzisionsnivellements in Europa und über die in den letzten Jahren beobachteten Polhöhenänderungen. — Herr J. H. Sieveking machte einige Bemerkungen über die Reduktion von über ein Gebirge hinweg ausgeführten Nivellements sowie über die beim Nivellieren erreichbare Genauigkeit.

Versammlung am 23. Januar 1897.

Der Jahrverwalter, Herr J. H. Sieveking, gedenkt mit teilnehmenden Worten des Hinscheidens des auswärtigen Mitgliedes der Gesellschaft, Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Weyer zu Kiel. Die Versammlung ehrt das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen.

Herr Dr. Schorr referiert zunächst über den Entwicklungsgang und die wissenschaftliche Thätigkeit Weyer's, sodann über die gleichfalls im Laufe des letzten Jahres verstorbenen Astronomen: Gould, Krüger, Gyldén und Tisserand. — Herr Baumeister Löwer trägt vor über die „Statik der Brückenkonstruktionen". In einem Bericht über die Geschichte der Brückenkonstruktionen begann der Vortragende mit den Leistungen der alten Ägypter, um dann die Verdienste von Archimedes, Galilei, Hooke, Mariotte, Bernoulli, Euler, Coulomb und Navier um die Entwickelung der Mechanik zu berühren. Eine von Navier formulierte Beziehung zwischen den angreifenden und widerstehenden Momenten an einen Brückenträger bildete den Ausgangspunkt für die Behandlung der Statik verschiedener Trägerkonstruktionen, wobei die Methoden von Ritter, Culmann u. a. genannt wurden. Die Konstruktionen wurden klassifiziert nach den Widerständen, welche die Auflager leisten können, nach der Form der Ober- und Untergurten, nach dem Plan der den Schubkräften widerstehenden Gitterfüllungen u. s. w. Unter den im einzelnen besprochenen Konstruktionen wurden insbesondere z. B. diejenige der Hamburger Elbbrücke, der Firth of Forth-Brücke und

endlich diejenige der in Aussicht genommenen Northriverbrücke in New York erwähnt. — Herr Direktor Nehls zeigte, wie in einfacher Weise die Lage der gleichseitigen Hyperbel bestimmt werden kann, welche durch einen beliebigen Punkt eines geraden Kreiskegels geht.

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt wertvolle Zusendungen folgenden Herren: Bergholz, Busche, Cantor, Crivetz, Eneström, Garavito, Grohmann, Hurwitz, Kiepert, Kobold, König, Kowalewski, Liebmann, Loewy, Loos, Lukas, Meldau, Neumann, d'Ocagne, v. Rebeur-Paschwitz, Reimerdes, Reinhertz, Rudio, Schubert, Schur, Vofs, Weyer, sowie allen Gesellschaften, mit denen die mathematische Gesellschaft in Schriftenaustausch steht.

Verzeichnis der Mitglieder der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 1897.

I. Ehrenmitglieder.

Bruns, H., Dr phil., Professor und Direktor der Sternwarte in Leipzig.
Bubendey, J. F., Professor an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Cantor, M., Dr. phil., Professor der Mathematik in Heidelberg.
Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.
Hübbe, H. W. C., Stadtbaudirektor in Schwerin.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.
Lindley, W., Ingenieur in Wales.
Netto, E., Dr. phil., Professor der Mathematik in Gieſsen.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Straſsburg.
Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspektor in Hamburg.
Stammann, J. O., Dr. jur., Senator in Hamburg.
Sturm, R., Dr. phil., Professor der Mathematik in Breslau.
Weierstraſs, K., Dr. phil., Professor und Mitglied der Kgl. preuſs. Akademie der Wissenschaften in Berlin.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ambronn, F. A. L., Dr. phil., Assistent an der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, königliche, in Berlin.
Böddicker, O., Dr. phil., Parsonstown, Irland.
Grimsehl, E., Oberlehrer in Cuxhaven.
Hübner, A., Stadtbaumeister in Bielefeld.
Lentz, H., Wasserbauinspektor in Cuxhaven.

Liebenthal, E., Dr. phil., Assistent an der physikal.-techn. Reichsanstalt in Charlottenburg.
Lukas, F. C., Rechnungsoffizial in Wien.
Mahlke, A., Dr. phil., wissenschaftl. Hilfsarbeiter an der physikal.-techn. Reichsanstalt in Charlottenburg.
Mendizábal-Tamborrel, J., de, Ingenienr in Mexiko.
Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.
Mügge, O., Dr. phil., Professor in Königsberg.
Ofterdinger, L. F., Dr. phil., Professor in Ulm.
Oppenheimer, H., Dr. phil., Reallehrer in Frankenthal (Rheinpfalz).
Schrader, C. W. O., Dr. phil., Reichsprüfungsinspektor in Berlin.
Schur, A. C. W., Dr. phil., Professor und Direktor der Sternwarte in Göttingen.
Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin und Privatdozent an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Sprung, A., Dr. phil., Sektionschef am meteorolog. Institut in Berlin.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Bauch, F., Lehrer der Mathematik.
Bertheau, F., wissenschaftl. Hilfslehrer an der Realschule in St. Pauli.
Bock, J. W., Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
Böger, R., Dr. phil., Oberlehrer am Realgymnasium des Johanneums.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule vor dem Holstenthore.
Bolte, F. G., Dr. phil., Oberlehrer an der Navigationsschule.
Busche, E., Dr. phil., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Classen, J., Dr. phil., Assistent am physikal. Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometermacher.
Detels, F., Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
Eichler, K., Dr. phil., Professor am Christianeum in Altona.
Eylert, H., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Fischer, F., Assecuradeur.
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer.
Grofscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer an den Unterrichtsanstalten des Klosters St. Johannis.
Herrmann, E., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Hildenbrandt, C. C. W., Revisor der Feuerkasse.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor am Wilhelm-Gymnasium.
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.

Keferstein, H. J., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule auf der Uhlenhorst.

Köpcke, H. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Ottensen.

Koldewey, C. C., Admiralitätsrat und Abteilungsvorsteher an der Seewarte.

Krüfs, H., Dr. phil., Inhaber des optischen Instituts von A. Krüfs.

Kühl, J. H., Lehrer an der allgem. Gewerbeschule.

Michaelsen, A., Dr. phil., Oberlehrer am Christianeum in Altona.

Nagel, A. C., Civilingenieur.

Nehls, Chr., Wasserbaudirektor.

Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiralitätsrat und Direktor der Seewarte.

Niebour, C. T. B., Direktor der Navigationsschule.

Oeltjen, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eimsbüttel.

Pund, O., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Ottensen.

Reinmüller, P., Dr. phil., Professor und Direktor der Realschule in St. Pauli.

Repsold, J. A., Dr. phil., Inhaber der astronomischen Werkstatt von A. Repsold & Söhne.

Rümker, G. C. W., Professor und Direktor der Sternwarte.

Schader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelm-Gymnasium.

Schorr, R., Dr. phil., Observator an der Sternwarte.

Schröder, J. C. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.

Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums.

Sieveking, J. H., Assistent an der Seewarte.

Steinhaus, C. F., Schiffbauingenieur.

Thaer, A., Dr. phil., Professor und Direktor der Realschule vor dem Holstenthore.

Timm, J. J. A., Schiffbauingenieur.

Tuch, Th., Dr. phil.

Voller, A., Dr. phil., Professor und Direktor des physikal. Staatslaboratoriums.

Wagner, H., Dr. phil., Professor an der Realschule vor dem Lübeckerthore.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 8. Ausgegeben im Februar 1898.

Die Änderung der Lichtschwingungen im Magnetischen Felde.

Von Edmund Hoppe.

In einer seiner letzten Arbeiten hat v. Helmholtz[1]) gezeigt, dafs die elektrischen Oscillationen des Äthers nur dann auf eingelagerte wägbare Teilchen ponderomotorische Wirkungen von einfacher Periodicität hervorbringen können, wenn diese Atome selbst Ladungen ihrer Elektrizität enthalten. So kam v. Helmholtz zu der Annahme von Elementarladungen der Atome. Schon vorher, und wie mir scheint zuerst, hatte Lorentz[2]) ähnliche Annahmen zur Grundlage seiner allgemeinen Theorie der Elektrizität resp. des Elektromagnetismus gemacht. Die Moleküle bestehen danach aus elektrisch geladenen Ionen. Deren Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage, allgemein ihre Bewegungen sind die Ursachen aller elektrischen Erscheinungen. Die dielektrische Polarisation ist eine Verschiebung aus der Gleichgewichtslage, die periodisch wechselnden Polarisationen, welche nach der bisherigen elektromagnetischen Lichttheorie als das Wesen eines Lichtstrahls aufgefafst wurden, würden hiernach nur Schwingungen der Ionen um die Gleichgewichtslage sein. Aus diesen Grundanschauungen hat Lorentz (l. c.) mit Hülfe des d'Alembert'schen Prinzips ein System von Gleichungen abgeleitet, welche den Maxwell'schen resp. Hertz'schen Gleichungen entsprechen, und die eine zusammenhängende Darstellung der Elektrizitätslehre und Optik gestatten, welche man darum als Ausgangspunkt für eine elektromagnetische Lichttheorie wählen kann.[3]) Da dieselbe auf einfache

1) v. Helmholtz: Wiedemanns Annal. Bd. 48. p. 389. 1893.

2) H. A. Lorentz: Archives Neerlandaises des Sc. Bd. 25, p. 389. 1892.

3) H. A. Lorentz: Versuch einer Theorie der elektrisch. u. opt. Erscheinungen. Leiden 1895.

Weise gestattet, von den überraschenden Zeemann'schen Beobachtungen, die mir leider hier im Original nicht zugänglich sind, von denen ich also nur durch die Erwähnung in Wiedemanns Beiblättern resp. in andern Publikationen aus den Annalen Kenntnis habe, Rechenschaft abzulegen, möchte ich diese Anwendung der Lorentz'schen Theorie zeigen, indem ich mich zunächst an die Lorentz'schen Gleichungen anschliefse.

Wir setzen ein rechtwinkliges festes Koordinatensystem voraus, es möge in dem Äther eine dielektrische Verschiebung bestehen, den Vektor nennen wir A, und die Komponenten A_x, A_y, A_z, dann fordert die Maxwell'sche Theorie

$$(1) \qquad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Sind in den Äther eingelagert elektrisch geladene Ionen und beträgt die mittlere räumliche Dichte der Ladung ϱ, so ist die Gleichung für den Äther gegeben:

$$(2) \qquad \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \varrho.$$

Ändert sich der Vektor A mit der Zeit, so entsteht ein Strom, der dem Maxwell'schen Verschiebungsstrom entspricht, bewegt sich auch die geladene Materie, so entsteht ein Konvektionsstrom; die aus beiden Quellen stammende Kraft möge mit J bezeichnet werden. Wenn in dem betrachteten Raume die Materie nicht spezielle magnetische Eigenschaften hat und eine magnetische Kraft wirkt mit dem Vektor M, so mufs diese folgenden Bedingungen genügen

$$(3) \qquad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0$$

und

$$(4) \quad \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = 4\pi J_x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = 4\pi J_y; \quad \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} = 4\pi J_z.$$

Bezeichnen wir die Lichtgeschwindigkeit mit V = dem Verhältnis der elektromagnetischen zur elektrostatischen Elektrizitätseinheit, so ist endlich

$$(5) \quad -4\pi V^2 \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) = M_x; \quad -4\pi V^2 \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = M_y;$$

$$-4\pi V^2 \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = M_z.$$

In diesen 5 Gleichungen stellt sich zunächst der Zustand des Äthers dar, wenn keine äufseren Kräfte wirken, resp. wenn der Äther in Ruhe ist.

Sei jetzt das mit der Ladung ε behaftete Ion in Bewegung versetzt z. B. durch elastische Kräfte und habe die Geschwindigkeit γ, so ist $\varepsilon \cdot \gamma$ der aus dieser Bewegung resultierende Vektor, wollte man den in einem Raume entstehenden Gesamtvektor haben, so müfste man über alle Teilchen ε mit den resp. Geschwindigkeiten multipliziert summieren. Betrachtet man einen von der Oberfläche σ umschlossenen Raum, so mag in demselben der Vektor A die dielektrische Verschiebung darstellen, die in σ eingeschlofsne Materie mag das elektrische Moment B bezogen auf die Volumeneinheit besitzen, und mit A_n, B_n wollen wir die Vektorenkomponenten in der zu σ normalen Richtung positiv nach aufsen bezeichnen. Wenn nun der von uns betrachtete Raum nach aufsen keine Kraftwirkung ausüben soll, so mufs

$$\int\int (A_n + B_n)\, d\sigma = 0$$

sein, also im Inneren der Fläche σ mufs die Gleichung bestehen:

$$\frac{\partial (A_x + B_x)}{\partial x} + \frac{\partial (A_y + B_y)}{\partial y} + \frac{\partial (A_z + B_z)}{\partial z} = 0. \tag{6}$$

Die gesamte elektrische Kraft sei mit E bezeichnet; diese ist einmal aus der dielektrischen Verschiebung des Äthers und der durch die bewegten Ionen gegebenen Kraft zusammengesetzt. Der erste Teil bezogen auf die Einheit der Ladung ist $= 4\pi V^2 \cdot A$; der zweite ist das Vektorprodukt $P(\gamma M)$; dieses Vektorprodukt bedeutet bekanntlich, dafs $P(\gamma M)_x = \gamma_y \cdot M_z - \gamma_z \cdot M_y$; $P(\gamma M)_y = \gamma_z M_x - \gamma_x M_z$; $P(\gamma M)_z = \gamma_x M_y - \gamma_y \cdot M_x$ bedeuten.

Wir können also schreiben:

$$E = 4\pi V^2 \cdot A + P(\gamma M). \tag{7}$$

Andererseits können wir E zusammengesetzt denken aus der durch das elektrische Moment auf der Oberfläche entstehenden Kraft, vermehrt um die durch die Schwingung der Ionen gegebenen Momente und endlich vermehrt um die aus der zeitlichen Änderung der Momente resultierenden Kraft d. h. es sind:

$$\begin{aligned} E_x &= \sigma B_x + a\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + bP\left(\frac{dB_x}{dt} \cdot \gamma_x\right) \\ E_y &= \sigma B_y + a\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + bP\left(\frac{dB_y}{dt} \cdot \gamma_y\right) \\ E_z &= \sigma B_z + a\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) + bP\left(\frac{dB_z}{dt} \cdot \gamma_y\right); \end{aligned} \tag{8}$$

wo a und b Konstanten sind. Für die ausführliche Diskussion der physikalischen Bedeutung der Ausdrücke auf der rechten Seite ver-

weise ich auf die Lorentz'sche Abhandlung. Endlich sind, wenn spezielle magnetische Zustände der Moleküle ausgeschlossen sind, die zeitlichen Veränderungen der magnetischen Kräfte gegeben durch

$$(9)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\frac{dM_x}{dt};\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{dM_y}{dt}\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\frac{dM_z}{dt}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (6)—(9) in Verbindung mit (3) bestimmen den Bewegungszustand in dem allgemeinsten Falle.

Wählen wir jetzt das spezielle Problem, dafs das Licht Schwingungen ausführe in der zur Richtung der x-Axe senkrechten Ebene; es falle also die Wellennormale mit der x-Axe zusammen, es bestehe ferner ein magnetisches Kraftfeld, welches so orientiert sei, dafs die Kraftlinien der x-Axe parallel verlaufen, so ist:

$$(10)\qquad M_x = 0 \text{ und } \gamma_x = 0.$$

Der Gleichung (3) genügen wir unter andern durch die Annahme, dafs die M_y und M_z periodische Funktionen der Zeit und der Verschiebung auf der Wellennormale sind, wir setzen daher

$$(11)\qquad M_y = \alpha \cdot e^{\beta\lambda - \varkappa x};\quad M_z = \lambda\alpha e^{\beta\lambda - \varkappa x} = \lambda M_y$$

wo α, β, $\varkappa$, λ, Konstanten sind, deren Bedeutung zu bestimmen bleibt.

Setze ich diese Werte in die Gleichungen (9), so ergiebt sich

$$(12)\quad E_x = 0;\ E_y = \frac{\beta}{\varkappa}\cdot M_z;\ E_z = -\frac{\beta}{\varkappa} M_y;\ \text{d. h. } E_y = -\lambda E_z.$$

Aus Gleichung (7) folgt dann zunächst

$$E_x = 0 = 4\pi V^2 A_x \text{ d. h. } A_x = 0$$

ferner

$$E_y = 4\pi V^2 \cdot A_y = \frac{\beta}{\varkappa} M_y;\ E_z = 4\pi V^2 \cdot A_z = -\frac{\beta}{\varkappa} M_y;\ \text{d. h. } A_y = -\lambda A_z.$$

Ebenso ergiebt sich aus den Gleichungen (6) die Beziehung

$$(13)\qquad B_x = 0;\quad B_y = -\lambda B_z.$$

Endlich vereinfachen sich die Gleichungen (8) zu folgenden

$$(14)\qquad \begin{aligned} 0 &= a\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\\ E_y &= \sigma B_y - a\frac{\partial B_z}{\partial x}\\ E_z &= \sigma B_z + a\frac{\partial B_y}{\partial x} \end{aligned}$$

Setzt man in die beiden letzten Gleichungen von (14) die Werte r E_y und B_y aus (12) und (13) ein, so ist

$$\lambda (E_z - \sigma B_z) = a \frac{\partial B_z}{\partial x}; \quad E_z - \sigma B_z = a \frac{\partial B_y}{\partial x} = - \lambda a \frac{\partial B_z}{\partial x};$$

raus folgt

5) $$\lambda^2 = -1; \text{ d. h. } \lambda = \pm i.$$

Da $\frac{dM_z}{dt} = \lambda\alpha \cdot e^{\beta\lambda - \varkappa x} \cdot \beta$; $\frac{\partial M_z}{\partial x} = - \lambda\alpha e^{\beta\lambda - \varkappa x} \cdot \varkappa$, so genügen r diesen Beziehungen, wenn wir setzen für $\beta = i\delta$, für $\varkappa = i\eta$; d da $\lambda = +i$ oder $= -i$ sein kann, erhalten wir für η zwei Werte, ese seien η_1 und η_2, wir haben also

6) $$M_{y1} = \alpha e^{i(\delta t - \eta_1 x)}; \quad M_{y2} = \alpha e^{i(\delta t - \eta_2 x)}; \quad M_{z1} = i\alpha e^{i(\delta t - \eta_1 x)};$$
$$M_{z2} = - i\alpha e^{i(\delta t - \eta_2 x)}.$$

Die reellen Teile dieser Ausdrücke geben die partikulären Lösungen:

$$M_{y1} = \alpha \cos(\delta t - \eta_1 x); \quad M_{z1} = - \alpha \sin(\delta t - \eta_1 x)$$
$$M_{y2} = \alpha \cos(\delta t - \eta_2 x); \quad M_{z2} = \alpha \sin(\delta t - \eta_2 x);$$

zen wir $\frac{\delta}{\eta_1} = \varphi_1$; $\frac{\delta}{\eta_2} = \varphi_2$ und betrachten diese Werte als Fortanzungsgeschwindigkeiten, so haben wir 2 zirkular polarisierte htstrahlen. Sei die ursprüngliche Geschwindigkeit ϱ, so ist die ue Periode nach Fresnels Theorie

') $$t = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\varrho \mp \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}};$$

das doppelte Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die Kraft zögernd oder beschleunigend wirkt.

Bezeichnet man die mechanische Kraft, welche die ursprüngliche wegung hervorrief, mit K und deren Komponenten mit K_x, K_y, K_z und t μ die Masse des mit der Elektrizität e geladenen Teilchens, so ist

3) $$K_x = 0; \quad K_y = - \mu \frac{d^2y}{dt^2}; \quad K_z = - \mu \frac{d^2z}{dt^2};$$

nn war die ursprüngliche Periode der Schwingungen $t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{K}}$.

Die auf das Teilchen μ wirkenden elektrodynamischen Kräfte in m Magnetfelde sind andererseits

$$f(x) = e \cdot M \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dz}{dt}\right);$$

9) $$f(y) = e \cdot M \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)$$

$$f(z) = e \cdot M \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Nach unserer Annahme ist $f(x) = 0$ und $f(y)$ wird $= eM\frac{dz}{dt}$; ebenso $f(z) = -eM\frac{dy}{dt}$; statt der Gleichungen (18) haben die Bewegungsgleichungen also folgende Form

$$K_x + f(x) = 0$$

$$K_y + eM\frac{dz}{dt} = -\mu\frac{d^2y}{dt^2} \tag{20}$$

$$K_z - eM\frac{dy}{dt} = -\mu\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Setzen wir wieder die durch den Vektor $eM\frac{dz}{dt}$ der Masse μ erteilte Beschleunigung $= \varphi\frac{dz}{dt}$ resp. die durch $eM\frac{dy}{dt}$ gegebene Beschleunigung $= \varphi\frac{dy}{dt}$, so ergiebt sich auch auf diesem Wege die neue Periode der Schwingungen $t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{K}{\mu} \mp \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}}$. Es ist hier $\varphi = \frac{eM}{\mu}$; setzte ich in (17) $\varrho = \frac{K}{\mu}$ und $\varphi = \frac{eM}{\mu}$, so folgt: $t = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\frac{K}{\mu} \mp \frac{(eM)^2}{4\mu^2}}}$.

Die neuen Wellenlängen sind also $l = 2\pi V\sqrt{\frac{1}{\frac{K}{\mu} \mp \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}}$.

Ist eM klein im Verhältnis zu K, so kann ich setzen $l = 2\pi V\cdot\sqrt{1 \pm \frac{e^2M^2}{4\mu K}}$.

Für ein bestimmtes M ergiebt sich durch Messung des l der Quotient $\frac{e}{\mu}$, das ist für jede Substanz eine Konstante $= D$. Mit wachsendem M mufs also der Unterschied in den Wellenlängen des beschleunigten und verzögerten Teiles gröfser und gröfser werden, bis Zerreifsung eintritt bei gegebener Breite des Lichtbündels, wie Zeemann sie beim Lithium zuerst beobachtet hat. Aus der Theorie folgt auch, dafs für verschiedene Substanzen und für verschiedene Wellenlängen des ausgesandten Lichtes bei gleichen Magnetfeldern ein verschiedener Grad der Dispersion eintritt.

Über einige Relationen zwischen Modulsystemen.

Von Otto Pund in Altona.

I. Bezeichnet $S(a_1, \cdots, a_n)$ das aus den n Moduln $a_1, \cdots, a_n$, $\overset{(m)}{S}(a_1, \cdots, a_n)$ das aus deren m^{ten} Potenzen $a_1^m, \cdots, a_n^m$ gebildete Modulsystem, was angedeutet werden mag durch

$$S(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_n)$$
$$\overset{(m)}{S}(a_1, \cdots, a_n) = \left(a_1^m, \cdots, a_n^m\right),$$

so besteht die folgende Relation

$$\overset{(m)}{S}(a_1, \cdots, a_n)\, \overset{(m-1)(n-1)}{S}(a_1, \cdots, a_n) = \overset{n(m-1)+1}{S}(a_1, \cdots, a_n). \tag{1}$$

Für den einfachsten Fall, dafs nur zwei Elemente a, b vorhanden sind, ergiebt sich durch die folgende an sich wohl keiner weiteren Erläuterung bedürftige Umformung

$$\begin{aligned}\overset{2m-1}{S}(a, b) &= (a^{2m-1}, a^{2m-2}b, \cdots, a^m b^{m-1}, a^{m-1}b^m, \cdots, ab^{2m-2}, b^{2m-1}),\\ &= [a^m(a^{m-1}, a^{m-2}b, \cdots, b^{m-1}), b^m(a^{m-1}, \cdots, ab^{m-2}, b^{m-1})],\\ &= (a^m, b^m)(a, b)^{m-1} = \overset{(m)}{S}(a, b)\, \overset{m-1}{S}(a, b).\end{aligned}$$

Hiernach läfst sich die allgemeine Richtigkeit der aufgestellten Relation durch vollständige Induktion beweisen, wenn man annimmt, dafs sie für n und weniger Moduln gelte und daraus ihre Gültigkeit auch für $n + 1$ Elemente ableitet. Nennt man den hinzutretenden Modul a_0, so folgt aus der Annahme

$$\overset{(m)}{S}(a_1, \cdots, a_{i-1}, (a_i, a_0), a_{i+1}, \cdots, a_n)\, \overset{(n-1)(m-1)}{S}(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \overset{n(m-1)+1}{S}(a_0, a_1, \cdots, a_n).$$

Multipliziert man nun beide Seiten mit $(a_i, a_0)^{m-1}$, so läfst sich das auf der linken Seite vorkommende Produkt

$$\overset{(m)}{S}(a_1, \cdots, a_{i-1}, (a_i, a_0), a_{i+1}, \cdots, a_n)(a_i, a_0)^{m-1}$$

transformieren in

$$\left[\overset{(m)}{S}(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)(a_i, a_0)^{m-1}, (a_i, a_0)^{2m-1}\right]$$

und weiter, wenn $(a_i, a_0)^{2m-1}$ ersetzt wird durch $\left(a_i^m, a_0^m\right)(a_i, a_0)^{m-1}$, in

$$\overset{(m)}{S}(a_0, a_1, \cdots, a_n)(a_i, a_0)^{m-1},$$

so dafs

$$\overset{(m)}{S}(a_0, a_1, \cdots, a_n)\, \overset{(n-1)(m-1)}{S}(a_0, a_1, \cdots, a_n)(a_i, a_0)^{m-1} = \overset{n(m-1)+1}{S}(a_0, a_1, \cdots, a_n)(a_i, a_0)^{m-1}$$

wird. Denkt man sich diese Beziehung für $i = 1, \cdots, n$ gebildet und dann die linken und rechten Seiten zu neuen Modulsystemen zusammengefafst, so ergiebt sich

$$S^{(m)}(a_0, a_1, \cdots, a_n)\, S^{(m-1)}((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))\, S^{(n-1)(m-1)}(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$
$$= S^{(m-1)}((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))\, S^{n(m-1)+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

und daraus, wenn man noch

$$S^{(m-1)}((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))\, S^{(n-1)(m-2)}(a_0, a_1, \cdots, a_n) = S^{n(m-2)+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

dazu benutzt, um $S^{(m-1)}((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))$ auf beiden Seiten wegzuschaffen,

$$S^{(m)}(a_0, a_1, \cdots, a_n)\, S^{n(m-1)}(a_0, a_1, \cdots, a_n) = S^{(n+1)(m-1)+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n)$$

und damit die allgemeine Richtigkeit der zu beweisenden Relation.

Es läfst sich ferner unschwer einsehen, dafs $S^{(n-1)(m-1)}(a_1, \cdots, a_n)$ auch die niedrigste Potenz von $S(a_1, \cdots, a_n)$ ist, durch deren Multiplikation die beiden Modulsysteme $S^{(m)}(a_1, \cdots, a_n)$ und $S^{m}(a_1, \cdots, a_n)$ äquivalent werden, den sogenannten allgemeinen Fall vorausgesetzt, dafs zwischen den Moduln $a_1, \cdots, a_n$ keine besondern Beziehungen obwalten. Sei nämlich $S^{r}(a_1, \cdots, a_n)$ die niedrigste Potenz von der verlangten Eigenschaft und $r \leqq (n-1)(m-1) - 1$, so wäre, wenn $i_1, \cdots, i_n$ n ganze nicht negative der Bedingung

$$i_1 + \cdots + i_n = mn - m - n - r \geqq 0$$

genügende Zahlen bedeuten, das Produkt $a_1^{m-1-i_1} \cdots a_n^{m-1-i_n}$ in $S^{m+r}(a_1, \cdots, a_n)$, nicht aber in $S^{(m)}(a_1, \cdots, a_n)\, S^{r}(a_1, \cdots, a_n)$ enthalten. Diese Betrachtung kann nun auch leicht zu einem zweiten einfachen Beweis ausgenutzt werden.

Bedeuten die Moduln $a_1, \cdots, a_n$ rationale Zahlen oder Ideale, so kann man $S^{(n-1)(m-1)}(a_1, \cdots, a_n)$ auf beiden Seiten weglassen; es ergiebt sich der Satz, dafs der gröfste gemeinschaftliche Teiler der m^{ten} Potenzen irgend welcher Zahlen oder Ideale der m^{ten} Potenz ihres gröfsten gemeinschaftlichen Teilers gleich ist.

II. Aufser dem betrachteten Modulsystem $S(a_1, \cdots, a_n)$, das wir von jetzt ab mit den unteren Index 1 versehen wollen, führen wir in die Betrachtung solche Systeme $S_k(a_1, \cdots, a_n)$ ein, die aus allen $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ möglichen Produkten von k verschiedenen Faktoren aus der Reihe $a_1, \cdots, a_n$ bestehen, und setzen also

$$S_1(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_n),$$
$$S_2(a_1, \cdots, a_n) = (a_1a_2, a_1a_3, \cdots, a_{n-1}a_n),$$
$$\vdots$$
$$S_{n-1}(a_1, \cdots, a_n) = (a_2a_3 \cdots a_n, a_1a_3 \cdots a_n, \cdots, a_1a_2 \cdots a_{n-1}).$$

Auch den Zeichen S_0 und S_n legen wir zweckmäfsig eine Bedeutung bei, nämlich

$$S_0(a_1, \cdots, a_n) = 1, \quad S_n(a_1, \cdots, a_n) = a_1a_2 \cdots a_n.$$

Wir beweisen zunächst, dafs für $i \geqq k$ stets

$$(2) \quad [S_{i+1}(a_1, \cdots, a_n)\, S_k(a_1, \cdots, a_n),\ S_{k+1}(a_1, \cdots, a_n)\, S_i(a_1, \cdots, a_n)] = S_{k+1}(a_1, \cdots, a_n)\, S_i(a_1, \cdots, a_n)$$

ist.

Dazu ist nur nötig zu zeigen, dafs jedes in $S_{i+1}S_k$ vorkommende Produkt auch in $S_{k+1}S_i$ enthalten ist. Nun hat ein solches Produkt die Form

$$a_{g_1}a_{g_2} \cdots a_{g_k}a_{h_0}a_{h_1} \cdots a_{h_i},$$

wenn $g_1, g_2, \cdots, g_k$ irgend ein System von k, $h_0, h_1, \cdots, h_i$ irgend ein System von $i+1$ untereinander verschiedener Zahlen aus der Reihe $1, 2, \cdots, n$ darstellt. Ergänzt man das System $g_1, \cdots, g_k$ zu einem aus $k+1$ verschiedenen Zahlen bestehenden $g_0, g_1, \cdots, g_k$, so stehen für die Wahl von g_0 offenbar $n - k$ Zahlen zur Verfügung, nämlich diejenigen, die man erhält, wenn man aus der Reihe $1, \cdots, n$ die Zahlen $g_1, \cdots, g_k$ fortläfst. Eine von diesen Zahlen g_0 mufs nun mit einer Zahl des Systems $h_0, h_1, \cdots, h_i$ übereinstimmen, weil in diesen $n - i - 1$, also weniger als $n - k$ Zahlen fehlen. Ist nun g_0 etwa mit h_g übereinstimmend gewählt, so ist $a_{g_1} \cdots a_{g_k}a_{h_g}$ ein in S_{k+1}, $a_{h_0} \cdots a_{h_{g-1}}a_{h_{g+1}} \cdots a_{h_i}$ ein in S_i, also das Produkt ein in $S_{k+1}S_i$ vorkommendes Element, wie es der Satz verlangt.

Vermehrt man die Anzahl der Elemente $a_1, \cdots, a_n$ um ein neues a_0, so ist offenbar

$$(3) \quad S_i(a_0, a_1, \cdots, a_n) = [S_i(a_1, \cdots, a_n),\ a_0\, S_{i-1}(a_1, \cdots, a_n)].$$

Zieht man endlich noch die aus den n Elementen $(a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0)$ gebildeten Systeme in Betracht, so gelangt man zu

$$(4) \quad S_i((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0)) = \Big[a_0^i,\ a_0^{i-1}S_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, a_0^{i-k}S_k(a_1, \cdots, a_n), \cdots S_i(a_1 \cdots, a_n)\Big]_{(k=0,\,1,\,\ldots,\,i)}$$

und kann nun mit Hülfe von (2), (3) und (4) die Relation

$$(5) \quad S_i(a_0, a_1, \cdots, a_n)\, S_{i-1}((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0)) = S_i((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))\, S_{i-1}(a_1, \cdots, a_n)$$

ableiten, nämlich aus der linken Seite erhält man successive

$$\begin{aligned}&\left(S_i,\ a_0 S_{i-1}\right)\left(a_0^{i-1},\ \cdots,\ a_0^{i-k}S_k,\ \cdots,\ S_{i-1}\right)\\&=\left[a_0^i S_{i-1},\ \cdots,\ a_0^{i-k-1}\left(S_k S_{i-1},\ S_i S_{k-1}\right),\ \cdots,\ S_i S_{i-1}\right]\\&=\left(a_0^i S_{i-1},\ \cdots,\ a_i^{i-k-1}S_{i-1}S_k,\ \cdots,\ S_i S_{i-1}\right)\\&=S_{i-1}(a_1,\ \cdots,\ a_n)S_i((a_1,\ a_0),\ \cdots,\ (a_n,\ a_0)).\end{aligned}$$

Aus (5) ist es nun nicht schwer, die Formel

$$(6)\quad \prod_{h=1,\cdots,i} S_h(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)=\prod_{g=1,\cdots,i-1} S_g(a_1,\ \cdots,\ a_n)\cdot S_i((a_1,\ a_0),\ \cdots,\ (a_n,\ a_0))$$

zu erhalten. Doch darf man dazu nicht einfach über beide Seiten von (5) das Produkt erstrecken, da sich dann auf beiden Seiten von (6) ein nicht wieder wegzuhebender überschüssiger Faktor einstellt. Wir gehen vielmehr von der rechten Seite von (6) aus und forme sie mit Anwendung von (5) um. Dann ergiebt sich

$$\begin{aligned}&\prod_{g=1,\cdots,i-2} S_g(a_1,\ \cdots,\ a_n)\ S_{i-1}(a_1,\ \cdots,\ a_n)\,S_i((a_1,\ a_0),\ \cdots,\ (a_n,\ a_0))\\&=\prod_{g=1,\cdots,i-2} S_g(a_1,\ \cdots,\ a_n)\ S_{i-1}((a_1,\ a_0),\ \cdots,\ (a_n,\ a_0))\,S_i(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n),\end{aligned}$$

also wenn man nun die Formel (6) für $i-1$ als bewiesen voraussetzt, die linke Seite von (6).

Denkt man sich endlich beide Seiten von (6) mit einer positiven ganzen Zahl ν_i potenziert und sodann über beiden Seiten das Produkt erstreckt von $i=1$ bis $i=k$, so folgt, wenn zur Abkürzung

$$\mu_i=\nu_i+\nu_{i+1}\cdots+\nu_k$$

gesetzt wird,

$$(7)\quad \prod_{h=1,\cdots,k}{}^{\mu_h} S_i(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)=\prod_{g=1,\cdots,k-1}{}^{\mu_g+1} S_g(a_1,\ \cdots,\ a_n)\prod_{h=1,\cdots,k}{}^{\nu_h} S((a_1,\ a_0),\ \cdots,\ (a_n,\ a_0$$

III. Wir wenden uns jetzt zu einer Reihe von Modulsystem

$$P_k(a_1,\ \cdots,\ a_n)=\prod_{(i_1,\cdots,i_k)}(a_{i_1},\ \cdots,\ a_{i_k}),\qquad k=1,\cdots$$

die dadurch entstehen, dafs man alle $\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ Systeme $(a_{i_1},\ \cdots,\ a$ von n verschiedenen Moduln aus der Reihe $a_1,\ \cdots,\ a_n$ mit einander multipliziert. Für alle Werte von k, die nicht der Reihe $1,\ \cdots,$ angehören, nehmen wir $P_k=1$ an.

Zunächst ist leicht ersichtlich, dafs

$$(8)\quad P_i(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)=P_{i-1}((a_1,\ a_0),\ \cdots,\ (a_n,\ a_0))\,P_i(a_1,\ \cdots,\ a_n)$$

$$P_1(a_1, \cdots, a_n) = S_n(a_1, \cdots, a_n), \quad P_n(a_1, \cdots, a_n) = S_1(a_1, \cdots, a_n)$$

ist. Allgemein hat Herr Dedekind die Modulsysteme P_i durch die Systeme S_k ausgedrückt in der Form

$$P_i(a_1, \cdots, a_n) = \prod_{k=1,\cdots,n-i+1} S_k(a_1, \cdots, a_n)^{\frac{(n-k-1)!}{(n-i-k+1)!(i-2)!}} \tag{9}$$

seinen Beweis aber, so viel ich weifs, nicht bekannt gemacht. Wenn ich nun hier einen solchen gebe für diese Relationen, so möchte ich nicht unterlassen, auf die Anregung hinzuweisen, die ich der kurzen Notiz des Herrn Dedekind[1]) verdanke auch bezüglich der vorhergehenden Entwickelungen. Nimmt man an, dafs die Relation für den Fall von n Elementen bewiesen ist, so folgt ihre Gültigkeit für $(n+1)$ Elemente mit Hülfe von (7) und (8). Nämlich dann ist

$$P_{i-1}((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0)) = \prod_{k=1,\cdots,n-i+2} S_k((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))^{\frac{(n-k-1)!}{(n-i-k+2)!(i-3)!}}$$

und folglich

$$P_i(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \prod_{k=1,\cdots,n-i+1} S_k(a_1, \cdots, a_n)^{\frac{(n-k-1)!}{(n-i-k+1)!}} \prod_{k=1,\cdots,n-i+2} S_k((a_1, a_0), \cdots, (a_n, a_0))^{\frac{(n-k-1)!}{(n-i-k+2)!(i-3)!}}$$

$$= \prod_{k=1,\cdots,n-i+2} S_k(a_0, a_1, \cdots, a_n)^{\frac{(n-k)!}{(n-i-k+2)!(i-2)!}}.$$

Aus (9) läfst sich umgekehrt $S_k(a_1, \cdots, a_n)$ ausdrücken in der Form

$$S_k(a_1, \cdots, a_n) \prod_h P_{n-k+h+1}(a_1, \cdots, a_n)^{\frac{(n-k+h-1)!}{(n-k-1)!\,h!}} = \prod_g P_{n-k+g+1}(a_1, \cdots, a_n)^{\frac{(n-k+g-1)!}{(n-k-1)!\,g!}} \tag{10}$$

wobei das Produkt auf der linken Seite über alle ungeraden Zahlen h, auf der rechten Seite über alle geraden Zahlen g der Reihe $0, 1, \cdots, k-1$ zu erstrecken ist. Zur Ableitung kann man die Relation benutzen

$$\sum_{h=k,\cdots,i} (-1)^{i-h} \frac{(n-k-1)!}{(n-h-1)!\,(h-k)!} \cdot \frac{(n-h-1)!}{(n-i-1)!\,(i-h)!} = \delta_{ik},$$

wobei das Zeichen δ_{ik} 1 oder 0 bedeutet, je nachdem $k = i$ oder $k < i$ ist.

1) Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie. 4. Aufl. 1894. Supplement XI.

IV. Die Aufgabe, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mehrerer Moduln $a_1, \cdots, a_n$ zu bestimmen, kommt darauf hinaus, alle Moduln x anzugeben, die der Bedingung

$$(11) \qquad (x, a_i) = a_i$$

für $i = 1, \cdots, n$ genügen. Man kann sie zusammenfassen in der Form

$$(12) \qquad [S_{n-1}(a_1, \cdots, a_n)\, x,\ S_n(a_1, \cdots, a_n)] = S_n(a_1, \cdots, a_n),$$

aus der, wenn man einen Spezialfall von (10) benutzt, nämlich

$$S_{n-1}(a_1, \cdots, a_n) \prod_h P_h(a_1, \cdots, a_n) = \prod_g P_g(a_1, \cdots, a_n)$$

sich weiter

$$(13) \qquad \Big[\prod_g P_g(a_1, \cdots, a_n)\, x,\ \prod_h P_h(a_1, \cdots, a_n)\Big] = \prod_h P_g(a_1, \cdots, a_n)$$

ergiebt, wobei g alle geraden, h alle ungeraden Zahlen zu durchlaufen hat, in der ersteren Formel aus der Reihe $2, \cdots, n$, in (13) aus der Reihe $1, \cdots n$.

Wir legen nun für die weitere Entwickelung die Annahme zu Grunde, dafs das Produkt der Moduln durch jeden seiner Faktoren teilbar ist und auch umgekehrt jeder Teiler eines Moduls in demselben als Faktor enthalten ist. Das trifft zu, wenn die Moduln rationale Zahlen oder Ideale sind, ferner auch dann, wenn sie aus ganzen rationalen Funktionen einer Variabeln bestehen und man alle rationalen Funktionen derselben Variabeln mit in den Modul eingreift, die aus diesen durch Multiplikation mit ganzen Funktionen derselben Art entstehen. Bei der angenommenen Beschränkung kann man nicht nur von (12) und (13) auf (11) schliefsen, sondern auch aus (13)

$$\left[x,\ \frac{\prod_h P_h(a_1, \cdots, a_n)}{\prod_g P_g(a_1, \cdots, a_n)}\right] = \frac{\prod_h P_h(a_1, \cdots, a_n)}{\prod_g P_h(a_1, \cdots, a_n)}$$

ableiten, woraus dann folgt, dafs

$$(14) \qquad \frac{S_n(a_1, \cdots, a_n)}{S_{n-1}(a_1, \cdots, a_n)} = \frac{\prod_h P_h(a_1, \cdots, a_n)}{\prod_g P_g(a_1, \cdots, a_n)}$$

das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Moduln $a_1, \cdots, a_n$ darstellt.

V. In der Theorie der Kreisteilungsgleichungen und ebenso in der der binomischen Kongruenzen wird man zu der Aufgabe geführt,

von der Funktion $x^m - 1$ einen Faktor $\Phi_m(x)$ abzusondern, der zu jeder nicht durch sie teilbaren Funktion $x^\mu - 1$ von derselben Form teilerfremd ist. Es genügen dann der Gleichung $\Phi_m(x)$ die sämtlichen primitiven m^{ten} Einheitswurzeln. Ist ferner p irgend eine Primzahl und m ein Teiler von $p-1$, so genügen der Kongruenz $\Phi_m(x) \equiv 0 \bmod p$ alle Zahlen, die modulo p zum Exponenten m gehören.

Die so definierte Funktion $\Phi_m(x)$ mufs folgenden Bedingungen genügen

$$(x^m - 1,\ \Phi_m(x)) = \Phi_m(x), \tag{15}$$

$$(x^\mu - 1,\ \Phi_m(x)) = 1, \tag{16}$$

wobei in dem letzten Modulsystem μ jede nicht durch m teilbare Zahl bedeuten kann. Fügt man demselben, wie es nach (15) geschehen darf, $x^m - 1$ bei, beachtet, dafs allgemein

$$(x^a - 1,\ x^b - 1) = x^{(a,b)} - 1$$

ist und läfst $x^m - 1$ dann wieder fort, so ergiebt sich, dafs man für μ auch (m, μ) setzen kann, also nur alle Teiler von m in Betracht zu ziehen braucht, und weiterhin, wenn $q_1, \cdots, q_n$ die sämtlichen von einander verschiedenen Primfaktoren von m sind, dafs man sich auf die n Teiler $\frac{m}{q_1}, \cdots, \frac{m}{q_n}$ beschränken darf, da jeder Teiler von m aufser m selbst in wenigstens einer von diesen Zahlen enthalten ist. Nun erhält man aus (15) und (16) mit Hinzunahme von

$$(x^m - 1,\ x^\mu - 1) = x^\mu - 1$$

durch eine leicht verständliche Rechnung

$$[x^m - 1, (x^\mu - 1)\Phi_m(x)] = [(x^m - 1)(x^\mu - 1), (x^m - 1)\Phi_m(x), (x^\mu - 1)\Phi_m(x)]$$
$$= [(x^m - 1)\Phi_m(x),\ (x^\mu - 1)\Phi_m(x)] = (x^\mu - 1)\Phi_m(x),$$

oder

$$\left[\frac{x^m - 1}{\Phi_m(x)},\ x^\mu - 1\right] = x^\mu - 1,$$

wodurch ausgesagt wird, dafs man $\Phi_m(x)$ erhält, wenn man $x^m - 1$ durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Funktionen $x^\mu - 1$ dividiert. Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Funktionen $x^{\frac{m}{q_i}} - 1$ ist aber nach (14) gleich

$$\frac{\prod_i \left(x^{\frac{m}{q_i}} - 1\right) \prod_{i_1, i_2, i_3} \left(x^{\frac{m}{q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3}}} - 1\right) \cdots}{\prod_{i_1, i_2} \left(x^{\frac{m}{q_{i_1} q_{i_2}}} - 1\right) \prod_{i_1, i_2, i_3, i_4} \left(x^{\frac{m}{q_{i_1} q_{i_2} q_{i_3} q_{i_4}}} - 1\right) \cdots}$$

wenn man beachtet, dafs

$$\left(x^{\frac{m}{q_{i_1}}}-1,\ x^{\frac{m}{q_{i_2}}}-1,\ \cdots,\ x^{\frac{m}{q_{i_k}}}-1\right)=x^{\frac{m}{q_{i_1}q_{i_2}\ldots q_{i_k}}}-1$$

ist. Demnach resultiert

$$\Phi_m(x)=\frac{(x^m-1)\prod_{i_1,i_2}\left(x^{\frac{m}{q_{i_1}q_{i_2}}}-1\right)\cdots}{\prod_{i}\left(x^{\frac{m}{q_i}}-1\right)\prod_{i_1,i_2,i_3}\left(x^{\frac{m}{q_{i_1}q_{i_2}q_{i_3}}}-1\right)\cdots} \tag{17}$$

als eine Funktion vom Grade

$$\varphi(m)=m\left(1-\sum_i\frac{1}{q_i}+\sum_{i_1,i_2}\frac{1}{q_{i_1}q_{i_2}}-\cdots\right).$$

Eine ganz ähnliche Betrachtung läfst sich auf die Funktion $x^{p^m}-x$ anwenden, die bekanntlich in der Theorie der höheren Kongruenzen nach einem Primzahlmodul p eine wichtige Rolle spielt, insofern in ihr alle mod p verschiedenen ganzen Funktionen bis zum m^{ten} Grade einschliefslich als Faktoren enthalten sind. Unter diesen dürfen die irreduktiblen Funktionen m^{ten} Grades in keiner Funktion $x^{p^\mu}-x$ von derselben Form, aber niederem Grade p^μ enthalten sein, und es entsteht daher gleichfalls die Aufgabe, von $x^{p^m}-x$ einen alle diese irreduktiblen Funktionen enthaltenden Faktor $\Psi_m(x)$ abzusondern, der zu allen $x^{p^\mu}-x$ teilerfremd ist. Beachtet man, dafs allgemein

$$\left(x^{p^a}-x,\ x^{p^b}-x\right)=x^{p^{(a,b)}}-x$$

ist, so folgt

$$\Psi_m(x)=\frac{(x^{p^m}-x)\prod_{i_1,i_2}\left(x^{p^{\frac{m}{q_{i_1}q_{i_2}}}}-1\right)\cdots}{\prod_{i}\left(x^{p^{\frac{m}{q_i}}}-1\right)\prod_{i_1,i_2,i_3}\left(x^{p^{\frac{m}{q_{i_1}q_{i_2}q_{i_3}}}}-1\right)\cdots} \tag{18}$$

als eine Funktion vom Grade

$$\psi(m)=p^m-\sum_i p^{\frac{m}{q_i}}+\sum_{i_1,i_2}p^{\frac{m}{q_{i_1}q_{i_2}}}-\cdots$$

woraus sich als Anzahl der irreduktiblen Funktionen m^{ten} Grades $\frac{\psi(m)}{m}$ ergiebt.

Rostock, im Dezember 1897.

Über eine allgemeine Anzahlbeziehung und einige Anwendungen davon auf die Zahlentheorie.

Von E. Busche in Bergedorf.

§ 1.

In einer Ebene sei eine endliche Anzahl von beliebig angeordneten endlichen Punktsystemen gegeben: $a_1, a_2 \cdots a_{\nu_a}$; $b_1, b_2, \cdots b_{\nu_b}$; $\cdots$, $f_1, f_2, \cdots f_{\nu_f}$. Durch einen beliebigen dieser Punkte lege man eine geschlossene, sich selbst nicht schneidende Kurve, auf der und innerhalb deren kein anderer von den gegebenen Punkten liegt. Darauf lege man in beliebiger Reihenfolge durch alle übrigen Punkte geschlossene Kurven, die alle die zuerst gezeichnete Kurve einschliefsen, aber weder sich selbst, noch einander schneiden; auf jeder Kurve liege nur ein gegebener Punkt. Bezeichnet man dann z. B. die Anzahl der Punkte b, die sich innerhalb der durch den Punkt a_x gelegten Kurve befinden, mit $a_x(b)$, so ist

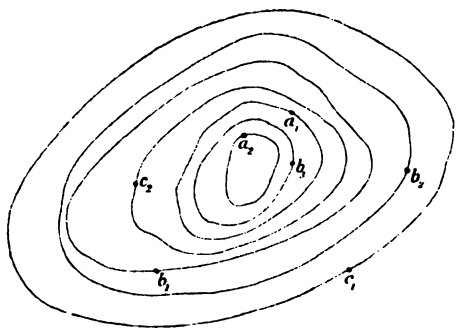
$$(1)\quad S \equiv \sum_{x=1}^{\nu_a} a_x(b) \cdot a_x(c) \cdots a_x(f) + \sum_{1}^{\nu_b} b_x(a) \cdot b_x(c) \cdots b_x(f) + \cdots + \sum_{1}^{\nu_f} f_x(a) \cdot f_x(b) \cdots f_x(e) = \nu_a \cdot \nu_b \cdots \nu_f.$$

Der Beweis dieses Satzes kann geführt werden, indem man zeigt, dafs S unverändert bleibt, wenn man irgend zwei Punkte, für die die hindurchgelegten Kurven benachbart sind, d. h. keine weiteren gegebenen Punkte zwischen sich enthalten, mit einander vertauscht. Daraus folgt nämlich, dafs man, um S zu bestimmen, sich die Punkte zuerst derartig angeordnet denken kann, dafs z. B. alle durch die Punkte a gelegten Kurven alle übrigen Kurven einschliefsen. In diesem Falle ist $b_x(a) = c_x(a) = \cdots = 0$, und alle Summen in (1) verschwinden bis auf die erste, von der jedes ihrer ν_a Glieder gleich $\nu_b \cdot \nu_c \cdots \nu_f$ wird, so dafs sich $S = \nu_a \cdot \nu_b \cdot \nu_c \cdots \nu_f$ ergiebt. Dieser Wert von S ist aber allgemeingültig, weil man aus der soeben betrachteten Konfiguration der Punkte offenbar jede andere durch wiederholte Vertauschung zweier in dem angegebenen Sinne benachbarter Punkte erhalten kann.

Noch einfacher kann man den Satz durch vollständige Induktion beweisen. Angenommen, die Gleichung (1) sei richtig für eine beliebige Anordnung der Punktsysteme $a, b, \cdots f$. Dann bleibt sie

auch richtig, wenn man noch z. B. einen Punkt b_{ν_b+1} so hinzunimmt, dafs seine Kurve alle schon vorhandenen Kurven einschliefst, denn dadurch ändert sich links blofs die zweite Summe und zwar um den Betrag $\nu_a \cdot \nu_c \cdots \nu_f$, weil $b_{\nu_b+1}(a) = \nu_a$, $b_{\nu_b+1}(c) = \nu_c$ u. s. w. ist, und um denselben Betrag ändert sich die rechte Seite, wo $\nu_b + 1$ an die Stelle von ν_b tritt. Nimmt man dagegen nicht einen Punkt hinzu, der einem der schon vorhandenen Systeme angehört, sondern einen neuen Punkt g_1, dessen Kurve ebenfalls alle schon vorhandenen Kurven einschliefst, so verschwinden in (1) alle vor der Veränderung vorhandenen Summen, weil $a_x(g) = b_x(g) = \cdots f_x(g) = 0$ ist, dagegen ist die neu hinzukommende Summe, die aus dem einen Gliede $g_1(a) \cdot g_1(b) \cdots g_1(f)$ besteht, gleich $\nu_a \cdot \nu_b \cdot \nu_c \cdots \nu_f$ und ebenso grofs ist die rechte Seite auch nach Hinzufügung des Faktors $\nu_g = 1$. Nun gilt die Gleichung (1) offenbar in dem Falle, wo nur zwei Punktsysteme vorhanden sind, von denen das zweite nur aus einem einzigen Punkt besteht, dessen Kurve alle übrigen Kurven einschliefst. Aus einer solchen Konfiguration kann man aber eine beliebige durch wiederholte Hinzufügung je eines Punktes, dessen Kurve die schon vorhandenen einschliefst, ableiten, und der Satz ist damit bewiesen.

Beispiel: In der nebenstehenden Figur ist



$$a_1(b) = 1, \quad a_1(c) = 0,$$
$$a_2(b) = 0, \quad a_2(c) = 0,$$
$$b_1(a) = 2, \quad b_1(c) = 1,$$
$$b_2(a) = 2, \quad b_2(c) = 1,$$
$$b_3(a) = 1, \quad b_3(c) = 0,$$
$$c_1(a) = 2, \quad c_1(b) = 3,$$
$$c_2(a) = 2, \quad c_2(b) = 1,$$

und es ist

$$(1 \cdot 0 + 0 \cdot 0) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + (2 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = 2 \cdot 3 \cdot 2.$$

Zusätze. Bis jetzt war der Einfachheit wegen angenommen, dafs auf jeder Kurve nur ein Punkt liegen sollte. Diese Voraussetzung ist jedoch nicht notwendig. Zunächst hat es offenbar gar keinen Einflufs auf irgend eine der vorkommenden Anzahlen, wenn mehrere Punkte desselben Systems — die mit demselben Buchstaben bezeichnet sind — auf derselben Kurve liegen. Aber auch wenn Punkte verschiedener Systeme auf derselben Kurve liegen, behält der

Satz seine Gültigkeit, wenn man nur eine Festsetzung darüber trifft, welcher von zwei solchen verschieden bezeichneten Punkten als innerhalb der Kurve gelegen betrachtet werden soll; liegen z. B. a_x und b_y auf derselben Kurve und zählt man b_y mit bei der Bestimmung der Zahl $a_x(b)$, so darf man a_x nicht mitzählen bei der Bestimmung von $b_y(a)$. Eine solche Festsetzung ist natürlich gleichbedeutend damit, dafs man die Kurve, auf der mehrere verschiedene Punkte liegen, in ebenso viele unendlich benachbarte Kurven sich aufgelöst denkt. Überhaupt kann man jedes System von Kurven zulassen, das sich durch beliebig kleine Abänderungen unzweideutig in ein System überführen läfst, wie es beim Beweise des Satzes benutzt wurde, z. B. können alle Kurven oder ein Teil von ihnen ein Linienstück gemeinsam haben.

Es ist ferner selbstverständlich, dafs man den Satz auf mehr als zwei Dimensionen ausdehnen kann. Man kann ihn auch ohne jede geometrische Einkleidung aussprechen, da es nur darauf ankommt, dafs, wenn a_x in Bezug auf b_y eine gewisse Bedingung erfüllt (die Kurve durch den Punkt a_x schliefst den Punkt b_y ein) und b_y dieselbe Bedingung in Bezug auf c_z, dann auch a_x die Bedingung in Bezug auf c_z erfüllt, aber nicht c_z in Bezug auf b_y und a_x und nicht b_y in Bezug auf a_x. Die Bedingung mufs derartig sein, dafs sie entweder von a_x in Bezug auf b_y oder von b_y in Bezug auf a_x erfüllt wird.

§ 2.

Wenn man, wie es jetzt geschehen soll, den Satz benutzen will, um einige einfache zahlentheoretische Sätze daraus abzuleiten, die sich auf reelle Zahlen beziehen, so können die gegebenen Punkte alle auf einer geraden Linie angenommen und die durch die einzelnen Punkte zu legenden Kurven ganz entbehrt werden, da die Bestimmung der Zahlen $a_x(b)$ u. s. w. jetzt einfach auf die Abzählung der in einem von einem festen Anfangspunkte (z. B. dem Nullpunkte) bis zu dem Punkte a_x sich erstreckenden Intervall liegenden Punkte b hinauskommt.

Es mögen die Punkte a_x zuerst die in dem Intervall von Null (exkl.) bis $\frac{1}{2}pq$ liegenden Vielfachen der ungeraden positiven Zahl p und die Punkte b_x die in demselben Intervall liegenden Vielfachen der zu p teilerfremden ungeraden positiven Zahl q sein, also $a_x = px$, $b_x = qx$, dann ist $\nu_a = \frac{q-1}{2}$, $\nu_b = \frac{p-1}{2}$ und

$$a_x(b) = \left[\frac{px}{q}\right], \quad b_x(a) = \left[\frac{qx}{p}\right],$$

wenn die ganze Zahl $[\gamma]$ durch die Beziehungen

$$\gamma - 1 < [\gamma] \leqq \gamma$$

definiert wird, und man erhält nach § 1 unmittelbar die bekannte Gaufssche Formel

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right] + \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right] = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}.$$

Fast ebenso leicht, wie diese Gleichung selbst kann man eine — meines Wissens noch nicht bekannte — Verallgemeinerung dieser Formel ableiten, nämlich

$$(2) \sum_{1}^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]^m \cdot (x^n - (x-1)^n) + \sum_{1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right]^n \cdot (x^m - (x-1)^m) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^m \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)^n -$$

Für $m = n = 1$ geht diese Gleichung in (1) über. Um nicht so viel schreiben zu müssen, will ich diese Formel für $m = 3$, $n = 2$ beweisen, für beliebige Werte der ganzen positiven Zahlen m und n bleibt der einfache Gedankengang ganz derselbe. Ich bemerke noch, dafs diese Formel ein sehr spezieller Fall einer allgemeineren Gleichung ist, die ich weiter unten (§ 4) angeben werde, dafs ich aber trotzdem den Beweis dieses besonderen Falles ausführe, um mich bei dem allgemeinen Falle, wo keinerlei neue Schwierigkeiten auftreten, darauf beziehen zu können.

Die Punkte $a, b, \ldots$ seien wieder alle in dem Intervall von Null bis $\frac{1}{2}pq$ gelegen, und zwar seien die Punkte a die Vielfachen von p, die Punkte b ebenfalls die Vielfachen von p, die Punkte c, d, e dagegen die Vielfachen von q in diesem Intervalle, so dafs

$$\nu_a = \nu_b = \frac{q-1}{2}, \quad \nu_c = \nu_d = \nu_e = \frac{p-1}{2}$$

ist. Es ist jetzt

$$a_x(b) = x,$$

wobei also der Punkt $b_x = px$, der mit a_x zusammenfällt, mitgezählt worden ist. Deshalb ist

$$b_x(a) = x - 1$$

zu setzen, da $a_x = px$ bei der Bestimmung dieser Anzahl nun nicht mitgerechnet werden darf. Ferner ist

$$a_x(c) = a_x(d) = a_x(e) = b_x(c) = b_x(d) = b_x(e) = \left[\frac{px}{q}\right];$$

ein Zusammenfallen eines Punktes a oder b mit einem Punkt c, d, e findet innerhalb des in Betracht gezogenen Intervalles nicht statt

und käme erst in Frage, wenn das Intervall den Punkt pq enthielte, da p und q relativ prim sein sollen. Ebenso ist

$$c_x(d) = x, \qquad c_x(e) = x,$$
$$d_x(c) = x - 1, \quad d_x(e) = x,$$
$$e_x(c) = x - 1, \quad e_x(d) = x - 1$$

und weiter

$$c_x(a) = c_x(b) = d_x(a) = d_x(b) = e_x(a) = e_x(b) = \left[\frac{qx}{p}\right].$$

Nach § 1 ist mithin

$$\sum_1^{\frac{q-1}{2}} x \cdot \left[\frac{px}{q}\right]^3 + \sum_1^{\frac{q-1}{2}} (x-1) \cdot \left[\frac{px}{q}\right]^3 + \sum_1^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right]^2 x^2 + \sum_1^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right]^2 x \cdot (x-1)$$
$$+ \sum_1^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right]^2 (x-1)^2 = \left(\frac{q-1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{p-1}{2}\right)^3$$

oder

$$\sum_1^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right]^3 \cdot (x^2 - (x-1)^2) + \sum_1^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{qx}{p}\right]^2 \cdot (x^3 - (x-1)^3) = \left(\frac{p-1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{q-1}{2}\right)^2,$$

wie behauptet wurde. Dabei ist von den hier in Betracht kommenden Fällen der Identität

$$x^{\mu-1} + x^{\mu-2} \cdot (x-1) + x^{\mu-3} \cdot (x-1)^2 + \cdots + (x-1)^{\mu-1} = x^\mu - (x-1)^\mu$$

Gebrauch gemacht worden.

Ich habe das Intervall bei der Gleichung (2) so gewählt, dafs die oberen Grenzen der Summen dieselben waren, wie in (1), um die Analogie mit dieser Gleichung hervorzuheben, man kann es aber, wie schon bemerkt wurde, ohne jede Abänderung des Beweises bis pq (exkl.) ausdehnen und auch eine der Zahlen p und q als gerade voraussetzen. Um eine Anwendung von (2) zu machen, möge jetzt dieses erweiterte Intervall genommen und aufserdem q als ungerade Primzahl vorausgesetzt und $m = 1$, $n = \frac{q-1}{2}$ gesetzt werden. Da

$$\gamma^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{\gamma}{q}\right) \pmod q$$

ist, wo rechts das Legendresche Symbol steht, das gleich Null ist, wenn $\gamma \equiv 0 \pmod q$ ist, erhält man aus (2) folgende Kongruenz:

$$\sum_1^{\frac{q-1}{2}} \left[\frac{px}{q}\right] \cdot \left(\left(\frac{x}{q}\right) - \left(\frac{x-1}{q}\right)\right) + \sum_1^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{\left[\frac{qx}{p}\right]}{q}\right) \equiv (p-1) \cdot (-1)^{\frac{q-1}{2}} \pmod q.$$

Diese Kongruenz ist, beiläufig bemerkt, thatsächlich eine Gleichung; auf den nicht schwierigen Beweis für diese Behauptung mufs ich aber der Kürze wegen hier verzichten. Es möge darauf hingewiesen werden, dafs

$$\sum_1^{p-1}\left(\left[\frac{q\,x}{p}\right]_q\right) = \sum_1^{p'-1}\left(\left[\frac{q\,x}{p'}\right]_q\right)$$

ist, wenn

$$p' \equiv p \pmod q.$$

§ 3.

Es seien nun in dem Intervall von 0 bis $N > 0$ irgend welche Zahlen bestimmt, z. B. die Primzahlen oder die Teiler von N oder die zu N teilerfremden Zahlen oder die Quadratzahlen u. s. w., kurz solche Zahlen, die irgend eine vorgeschriebene Bedingung erfüllen, durch die sie eindeutig definiert sind. Die Zahlen seien $p_1, p_2, \ldots p_\nu$, mit P_x werde die Anzahl der Zahlen p bezeichnet, die kleiner sind als die ganze Zahl x, wobei also x nicht mitgerechnet wird, wenn diese Zahl selbst zu den p gehört. Die Anzahl aller Zahlen p ist $\nu = P_N$. Dann ist nach § 1, wenn man als Punkte a die Zahlen p als b alle ganzen Zahlen von 1 bis N nimmt,

$$a_x(b) = p_x, \quad b_x(a) = P_x,$$

$$\sum_1^{P_N} p_x + \sum_1^{N} P_x = N \cdot P_N. \tag{1}$$

Nimmt man als Punkte c_x die sämtlichen Zahlen von 1 bis N noch einmal, so ist

$$a_x(c) = p_x, \quad b_x(c) = x, \quad c_x(a) = P_x, \quad c_x(b) = x - 1,$$

also

$$\sum_1^{P_N} p_x^2 + \sum_1^{N} P_x\,(2x - 1) = N^2 \cdot P_N$$

und allgemeiner

$$\sum_1^{P_N} p_x^m + \sum_1^{N} P_x\,(x^m - (x-1)^m) = N^m \cdot P_N.$$

Zählt man unter übrigens gleichen Voraussetzungen die Punkte von N ab nach Null zu, so erhält man statt (1)

$$\sum_1^{P_N} (N - p_x) + \sum_1^{N} P'_x = N \cdot P_N$$

der

$$\sum_1^{P_N} p_x = \sum_1^N P'_x,$$

wo P'_x die Anzahl der Zahlen p angiebt, die $\gtreqless x$ und $\lesseqgtr N$ sind. Hier ist also — wegen der folgenden Anwendung — die Zahl N mit zu den p gerechnet, wenn sie die den p auferlegte Bedingung erfüllt. Wenn man z. B. als die Zahlen p die Teiler $\delta(N)$ von N nimmt, so ist

$$\sum \delta(N) = \sum_1^N \tau'_x,$$

d. h. die Summe aller Teiler einer Zahl N ist gleich der Summe der Anzahlen aller Teiler der Zahl, die nicht kleiner als x sind, wenn x alle Werte von 1 bis N durchläuft.

§ 4.

Ich werde jetzt eine von Dirichlet[1]) angegebene Verallgemeinerung der in § 2 bewiesenen Gaufsschen Formel ableiten. Zu diesem Zwecke seien $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, ... reelle Funktionen, deren in dem Intervall von α bis $\beta > \alpha$ liegende Werte eindeutig und stetig und ohne Maximum oder Minimum sind, so dafs ihre inversen Funktionen, die mit $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, ... bezeichnet werden mögen, ebenfalls eindeutig definiert sind. Der Kürze wegen möge angenommen werden, dafs die Funktionen $a(x)$, $b(x)$, ... und infolge dessen auch $A(x)$, $B(x)$, ... in den in Betracht kommenden Intervallen niemals abnehmen; der Fall, wo einige oder alle Funktionen niemals zunehmen, läfst sich, wenn auch das Resultat nicht genau dasselbe ist, im wesentlichen ebenso behandeln, wie der hier bevorzugte Fall. Zwischen α (exkl.) und β (inkl.) wird nun eine gewisse, als endlich vorausgesetzte Anzahl von Werten der Funktionen $a(x)$, $b(x)$, ... liegen, die zu ganzzahligen Argumentwerten gehören. Es seien dies für $a(x)$ die Werte $a(\xi+1)$, $a(\xi+2)$, ... $a(x)$, ... $a(\xi')$ und die Punkte, die diesen Funktionswerten entsprechen, seien die Punkte a des § 1. Ebenso seien die analogen Punkte $b(\eta+1)$, $b(\eta+2)$, ... $b(y)$, ... $b(\eta')$ die Punkte b u. s. w. Die Anzahl $a_x(b)$[2]) ist dann

1) Vergl. Dirichlets ges. Werke. Bd. 2, S. 101, ferner z. B. Hermite, Crelles Journal, Bd. 100, S. 55 und meine Arbeit in Crelles Journal, Bd. 103, S. 124.

2) Eine Verwechslung zwischen dem Zeichen $a_x(b)$ und dem Zeichen für die Funktion $a(x)$ ist schon wegen des Index, der nur bei dem ersten Zeichen auftritt, nicht zu befürchten.

gleich der Anzahl der Punkte $b(\eta+1)$, $b(\eta+2)\ldots b(y)$, die zwischen α und $a(x)$ liegen. Danach ist $b(y)$ bestimmt durch die Beziehungen

$$b(y) \leqq a(x) < b(y+1),$$

woraus

$$y \leqq Ba(x) < y+1$$

und

$$y = [Ba(x)]$$

folgt, wo der Einfachheit wegen $Ba(x)$ statt $B(a(x))$ gesetzt ist. Da η seiner Definition nach[1]) durch die Beziehungen

$$b(\eta) \leqq \alpha < b(\eta+1),$$
$$\eta \leqq B(\alpha) < \eta+1,$$
$$\eta = [B(\alpha)]$$

estimmt ist, so ist also

$$a_x(b) = y - \eta = [Ba(x)] - [B(\alpha)].$$

Ebenso findet man

$$a_x(c) = [Ca(x)] - [C(\alpha)] \text{ u. s. w.}$$

Ferner ist

$$b_x(a) = [Ab(x)]' - [A(\alpha)],$$

wo der an die Klammer gesetzte Strich andeuten soll, dafs, wenn $Ab(x)$ ganzzahlig ist, d. h. wenn ein Punkt b_x mit einem Punkt a zusammenfällt, nicht diese ganze Zahl für $[Ab(x)]'$ zu nehmen ist, sondern die nächst kleinere ganze Zahl. Da endlich z. B. $\xi' = [A(\beta)]$ gefunden wird, so sind die Zahlen $\nu_a, \nu_b, \ldots$ des § 1 hier gleich $[A(\beta)] - [A(\alpha)]$, $[B(\beta)] - [B(\alpha)], \ldots$ und die Formel, die hiernach aus § 1 folgt, lautet so:

$$(1)\quad \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} ([Ba(x)] - [B(\alpha)])([Ca(x)] - [C(\alpha)])$$
$$+ \sum_{[B(\alpha)]+1}^{[B(\gamma)]} ([Ab(x)]' - [A(\alpha)])([Cb(x)] - [C(\alpha)])$$
$$+ \sum_{[C(\alpha)]+1}^{[C(\beta)]} ([Ac(x)]' - [A(\alpha)])([Bc(x)]' - [B(\alpha)])$$
$$= ([A(\beta)] - [A(\alpha)])([B(\beta)] - [B(\alpha)])([C(\beta)] - [C(\alpha)]).$$

1) Wenn die Funktion $b(x)$ aufserhalb des Intervalles $\alpha \ldots \beta$ auch in der Nähe dieser Zahlen die oben ausgesprochenen Bedingungen nicht erfüllt, mufs man sich hier diese Funktion — und ebenso eventuell die übrigen — für einen Augenblick willkürlich über das Intervall hinaus stetig so fortgesetzt denken, dafs die neue Funktion, die innerhalb des Intervalles mit der ursprünglichen Funktion übereinstimmt, auch jenseits der Grenzen die Bedingungen erfüllt.

Der Kürze wegen habe ich die Formel nur für 3 Funktionen geschrieben; man sieht aber sofort, wie die allgemeine Formel lauten würde. Stellt man die Formel nur für zwei Funktionen auf, setzt man

$$\sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}([Ba(x)]-[B(\alpha)])=\sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}[Ba(x)]-([A(\beta)]-[A(\alpha)])\cdot[B(\alpha)],$$

nimmt man ferner dieselbe Umformung für die zweite Summe vor und führt man rechts die Multiplikation aus, so erhält man

$$(2)\quad \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}[Ba(x)]+\sum_{[B(\alpha)]+1}^{[B(\beta)]}[Ab(x)]'=[A(\beta)]\,[B(\beta)]-[A(\alpha)]\,[B(\alpha)].$$

Setzt man nun noch $b(x)=x$, was keine Spezialisierung bedeutet, weil $Ab(x)$ die inverse Funktion von $Ba(x)$ ist, so bekommt man eine aus der Dirichletschen Gleichung unmittelbar folgende Formel, allerdings für den Fall einer zunehmenden Funktion, während Dirichlet eine abnehmende Funktion voraussetzt.

Aus der Gleichung (1) für 3 Funktionen kann man, indem man ebenso verfährt, wie es bei der Herleitung von (2) geschehen ist, und aufserdem diese Gleichung selbst mehrere Male anwendet, folgende Gleichung erhalten:

$$(3)\quad \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]}[Ba(x)]\,[Ca(x)]+\sum_{[B(\alpha)]+1}^{[B(\beta)]}[Ab(x)]'\,[Cb(x)]+\sum_{[C(\alpha)]+1}^{[C(\beta)]}[Ac(x)]'\,[Bc(x)]'$$
$$=[A(\beta)]\,[B(\beta)]\,[C(\beta)]-[A(\alpha)]\,[B(\alpha)]\,[C(\alpha)],$$

und diese Gleichung gilt auch für beliebig viele Funktionen; ihre Analogie mit der durch Einführung von bezw. $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ statt x zu beweisenden Gleichung

$$\int_{A(\alpha)}^{A(\beta)}Ba(x)\;Ca(x)dx+\int_{B(\alpha)}^{B(\beta)}Ab(x)\;Cb(x)dx+\int_{C(\alpha)}^{C(\beta)}Ac(x)\cdot Bc(x)dx$$
$$=A(\beta)\cdot B(\beta)\cdot C(\beta)-A(\alpha)\cdot B(\alpha)\cdot C(\alpha)$$

fällt sofort in die Augen.

Wenn α und β beide positiv sind, so kann man die Formel (3) statt durch eine, wenn auch einfache, so doch nicht ganz kurze Umformung aus (1) noch kürzer auf folgende Weise direkt ableiten. Man denke sich die Funktionen $a(x)$, $b(x)$, $\cdots$, deren zwischen α und β liegende Funktionswerte ja allein in Betracht kommen sollen, über dieses Intervall hinaus nach dem Nullpunkt zu beliebig, aber stetig abnehmend so fortgesetzt, dafs $A(0)=B(0)=\cdots=0$ ist.

Wendet man dann die Formel (1) erstens an für das Intervall $0 \cdots \beta$ und zweitens für das Intervall $0 \cdots \alpha$, so fallen in den dann sich ergebenden Formeln die Subtrahenden in den in (1) vorkommenden Differenzen alle weg, und man erhält durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen unmittelbar die Formel (3). Diese Bemerkung habe ich gemacht, weil man in derselben Weise, wenn man noch die Überlegungen, die zu der Formel (2) des § 2 geführt haben, hinzunimmt, für $\beta > \alpha > 0$ die folgende Verallgemeinerung der Formel (3) beweisen kann, wobei $m_a, m_b, \cdots$ ganze nicht negative Zahlen sind:

$$(4) \quad \cdots \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} [Ba(x)]^{m_b} \cdot [Ca(x)]^{m_c} \cdot (x^{m_a} - (x-1)^{m_a})$$
$$+ \sum_{[B(\alpha)]+1}^{[B(\beta)]} [Ab(x)]'^{m_a} \cdot [Cb(x)]^{m_c} \cdot (x^{m_b} - (x-1)^{m_b})$$
$$+ \sum_{[C(\alpha)]+1}^{[C(\beta)]} [Ac(x)]'^{m_a} \cdot [Bc(x)]'^{m_b} \cdot (x^{m_c} - (x-1)^{m_c})$$
$$= [A(\beta)]^{m_a} \cdot [B(\beta)]^{m_b} \cdot [C(\beta)]^{m_c} - [A(\alpha)]^{m_a} \cdot [B(\alpha)]^{m_b} \cdot [C(\alpha)]^{m_c}.$$

Diese Formel, in der natürlich wieder beliebig viele Funktionen auftreten können, gilt aber allgemein auch für negative Werte von α, oder von α und β. Man kann sie nämlich folgendermafsen unmittelbar aus (3) ableiten. Bei der Herleitung dieser letzteren Formel war keineswegs die Voraussetzung notwendig, dafs alle Funktionen $a(x), b(x), \cdots$ von einander verschieden wären; nimmt man etwa an, dafs aufser $a(x), b(x), c(x)$ noch zwei weitere Funktionen $d(x)$ und $e(x)$ vorhanden wären und läfst diese beide mit $a(x)$ zusammenfallen, so lautet die Gleichung (3) so:

$$(5) \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} [Ba(x)][Ca(x)] \cdot [Aa(x)]^2 + \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} [Ba(x)][Ca(x)][Aa(x)][Aa(x)]'$$
$$+ \sum_{[A(\alpha)]+1}^{[A(\beta)]} [Ba(x)][Ca(x)][Aa(x)]'^2 + \sum_{[B(\alpha)]+1}^{[B(\beta)]} [Ab(x)]'^3 [Cb(x)]$$
$$+ \sum_{[C(\alpha)]+1}^{[C(\beta)]} [Ac(x)]'^3 \cdot [Bc(x)]' = [A(\beta)]^3 \cdot [B(\beta)] \cdot [C(\beta)] - [A(\alpha)]^3 \cdot [B(\alpha)] \cdot [C(\alpha)].$$

Dabei ist die Reihenfolge der Glieder gegenüber der mit fünf Funktionen $a(x) \cdots e(x)$ geschriebenen Formel (3) geändert und überall a statt d und e, A statt D und E gesetzt. Da nun

$$[Aa(x)] = x, \quad [Aa(x)]' = x - 1, \quad x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 = x^3 - (x-1)^3$$

ist, so ist die Gleichung (5) nichts anderes als (4) für $m_a = 3$, $m_b = m_c = 1$, und die Allgemeingültigkeit von (4) ohne Weiteres ersichtlich.

Eine einfache Verifikation der Gleichung (4) erhält man, wenn man $a(x) = b(x) \cdots = x$ setzt; dann sind links alle eckigen Klammern ohne Strich gleich x, alle Klammern mit Strich gleich $x - 1$ und die Gleichung ist ein Spezialfall der folgenden identischen Gleichung, in der f_a, f_b, $\cdots$ ganz beliebige Funktionen sind:

$$\sum_{[\alpha]+1}^{[\beta]} \{f_b(x)f_c(x)(f_a(x) - f_a(x-1)) + f_a(x-1)f_c(x)(f_b(x) - f_b(x-1)) + f_a(x-1)f_b(x-1)(f_c(x) - f_c(x-1))\} = f_a([\beta]) \cdot f_b([\beta]) \cdot f_c([\beta]) - f_a([\alpha]) \cdot f_b([\alpha]) \cdot f_c([\alpha]).$$

Um von der Gleichung (4) eine Anwendung zu machen, setze ich, indem a, b, c irgend welche ganze positive Zahlen, q eine ungerade positive Primzahl bedeuten soll, die nicht in a, b, c aufgeht, $A(x) = ax$, $b(x) = bx$, $c(x) = cx$, also $A(x) = \frac{x}{a}$, $Ab(x) = \frac{bx}{a}$ u.s.w.,

$$\alpha = 0, \quad \beta = abc, \quad m_a = m_b = m_c = \frac{q-1}{2}.$$

Dadurch erhält man unter Benutzung des Legendreschen Zeichens die folgende Kongruenz:

$$\sum_{1}^{bc}{}' \left(\frac{\left[\frac{ax}{b}\right]\left[\frac{ax}{c}\right]}{q}\right)\left(\left(\frac{x}{q}\right) - \left(\frac{x-1}{q}\right)\right) + \sum_{1}^{ac}{}' \left(\frac{\left[\frac{bx}{a}\right]\left[\frac{bx}{c}\right]}{q}\right)\left(\left(\frac{x}{q}\right) - \left(\frac{x-1}{q}\right)\right) + \sum_{1}^{ab}{}' \left(\frac{\left[\frac{cx}{a}\right]\left[\frac{cx}{b}\right]}{q}\right)\left(\left(\frac{x}{q}\right) - \left(\frac{x-1}{q}\right)\right) \equiv 1 \pmod{q}.$$

Die rechte Seite dieser Kongruenz, die übrigens wahrscheinlich eine Gleichung ist, ist bei n Zahlen a, b, c $\cdots$ gleich $\left(\frac{abc\cdots}{q}\right)^{n-1}$. Um die Richtigkeit der Kongruenz zu bestätigen, kann man $a = b = c$ setzen, wodurch sie nach einer leichten Umformung in die triviale Gleichung

$$\sum_{1}^{a^2}{}' \left(\left(\frac{x}{q}\right) - \left(\frac{x-1}{q}\right)\right) = 1$$

übergeht.

§ 5.

Zum Schluſs möge jetzt der Satz des § 1 auf komplexe Zahlen angewendet werden, wobei ich mich auf die Zahlen von der Form $u + vi$, $i = \sqrt{-1}$, beschränke. Um zunächst eine möglichst ge[illegible]

Verallgemeinerung[1]) der in § 2 bewiesenen Gaufsschen Gleichung abzuleiten, betrachte ich die Zahlen innerhalb des Quadrates K_{pq} mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}pq$, $\frac{1}{2}(1+i)pq$, $\frac{1}{2}ipq$, wo $p = p_1 + p_2 i$ und $q = q_1 + q_2 i$ teilerfremde ungerade komplexe Zahlen sind. Die $\frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2 - 1)$ Vielfachen von p, die innerhalb dieses Bereiches liegen, sehe ich als die Punkte a_x des § 1 an, die $\frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2 - 1)$ Vielfachen von q innerhalb desselben Bereiches als die Punkte b_x. Die durch a_x und b_x zu legenden Kurven mögen zusammengesetzt sein aus Stücken der Quadratseiten und aus den innerhalb des Quadrates liegenden Bögen der Kreise, deren Mittelpunkt der Nullpunkt, deren Radius der absolute Betrag $|pz|$ oder $|qz|$ des betreffenden Punktes a_x oder b_x ist. Die Seiten des Quadrates kommen als Kurvenstücke natürlich nur in Betracht bis zu den Schnittpunkten mit den Kreisen, die Kreisbögen sind bei den Punkten a_x oder b_x, deren absoluter Betrag kleiner ist als $\left|\frac{1}{2}pq\right|$ Viertelkreise, bei den übrigen Punkten kleinere Teile eines Kreises. Die Zahl $a_x(b)$ ist dann gleich der Anzahl der innerhalb des Quadrates liegenden Vielfachen von q, deren absoluter Betrag $\lessgtr |pz|$ ist, wo pz das mit a_x bezeichnete Vielfache von p ist. Bildet man das Quadrat K_{pq} durch eine Ähnlichkeitstransformation ab auf das Quadrat k_p mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}p$, $\frac{1}{2}(1+i)p$, $\frac{1}{2}ip$, so entsprechen den Vielfachen von q in K_{pq} die ganzen Punkte in k_p und den Punkten pz die Punkte $\frac{pz}{q}$. Die Anzahl $a_x(b)$ kann hiernach aufgefafst werden als die Anzahl der von Null verschiedenen ganzen Zahlen, die innerhalb[2]) des Quadrates k_p liegen und deren absoluter Betrag $\lessgtr \left|\frac{pz}{q}\right|$ ist. Bezeichnet man diese Zahl mit $\left[\frac{pz}{q}\right]_p$ und versteht unter $\left[\frac{qz}{p}\right]_q'$ analogerweise die Anzahl der von Null verschiedenen ganzen Zahlen, die innerhalb[2]) des Quadrates k_q mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}q$, $\frac{1}{2}(1+i)q$, $\frac{1}{2}iq$

1) Diese Verallgemeinerung bezieht sich allerdings nur auf diejenige Bedeutung der Funktion $[y]$, wonach diese eine gewisse Anzahl von ganzen Zahlen angiebt; eine Gleichung, worin diese Verallgemeinerung der Funktion $[y]$ auf komplexe Zahlen vorkommt und zugleich die Funktion $E(x+yi) = [x] + [y]i$ habe ich im 110. Bande des Crelleschen Journals, S. 346 angegeben.

2) Wenn p_1 und p_2 einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler haben, so liegen auch auf dem Rande von k_p ganze Zahlen, von denen nur die auf der Seite $0 \cdots \frac{1}{2}p$ liegenden mit zu k_p zu rechnen sind; das Analoge gilt von k_q und natürlich auch von den auf dem Rande von K_{pq} liegenden Punkten a_x und b_x.

liegen und absolut $< \left|\frac{qz}{p}\right|$ sind, so erhält man nach § 1 die Gleichung

$$\sum_{k_q}\left[\frac{pz}{q}\right]_p + \sum_{k_p}\left[\frac{qz}{p}\right]'_q = \tfrac{1}{16}\left(p_1^2 + p_2^2 - 1\right)\left(q_1^2 + q_2^2 - 1\right).$$

Dabei durchläuft z in der ersten Summe alle ganzen Zahlen des Quadrats k_q, d. h. ein Viertelsystem (mod q) und in der zweiten Summe alle ganzen Zahlen des Quadrates k_p, d. h. ein Viertelsystem (mod p). Diese Formel entspricht der Gaussschen Gleichung.

Mit $[\gamma]$, bezw. $[\gamma]'$ soll die Anzahl aller ganzen Zahlen (inkl. Null) bezeichnet werden, deren absoluter Betrag nicht gröfser, bezw. kleiner als $|\gamma|$ ist. Diese Zahlen sind die ganzen Punkte in und auf, bezw. in dem Kreise, der mit $|\gamma|$ um den Nullpunkt beschrieben wird, und $[\gamma]$ und $[\gamma]'$ sind bis auf einen Fehler, der verhältnismäfsig um so kleiner ist, je gröfser $|\gamma|$ wird, gleich $\pi|\gamma|^2$.

Es seien α und β zwei komplexe Zahlen und $|\beta| > |\alpha|$, ferner seien $a(z)$, $b(z)$, ... eindeutige und stetige Funktionen des komplexen Arguments z, die die Eigenschaft haben, dafs ihr absoluter Betrag in dem Kreisring um den Nullpunkt mit den Radien $|\alpha|$ und $|\beta|$ mit dem absoluten Betrag von z beständig zunimmt oder wenigstens nicht abnimmt, wenn $|z|$ wächst, so dafs auch ihre inversen Funktionen $A(z)$, $B(z)$, ... von derselben Beschaffenheit sind. Es möge noch vorausgesetzt werden, dafs die Anzahl der Funktionswerte von $a(z)$, $b(z)$, ..., die innerhalb des Kreisringes liegen und deren Argumentwerte ganze Zahlen sind, endlich sei. Dafs es Funktionen giebt, die diese Bedingungen erfüllen, lehrt das Beispiel der Potenzen mit positivem Exponenten. Denkt man sich dann die zu ganzzahligen Argumentwerten gehörigen Funktionswerte nach irgend einem Prinzip numeriert und mit $a_1, a_2, \ldots a_x \ldots$; $b_1, b_2, \ldots b_x \ldots$ bezeichnet, so kann man den Satz des § 1 anwenden, wobei die Kurven Kreise um den Nullpunkt sind, und die Zahl $a_x(b)$ wird gleich

$$[Ba(z')] - [B(\alpha)]$$

gefunden, wenn der Punkt $a(z')$ mit a_x bezeichnet worden ist. Denn wenn

$$|b(y)| \gtrless |a(z')| < |b(y+u)|$$

ist, wo $y+u$ eine solche ganze Zahl ist, dafs zwischen $|y|$ und $|y+u|$ kein absoluter Betrag einer ganzen Zahl liegt, so folgt aus den Voraussetzungen, die über $a(z)$ und $b(z)$ gemacht sind,

$$[y] = [Ba(z')]$$

und die Differenz $[Ba(z')] - [B(\alpha)]$ giebt also die Anzahl der Funktionswerte von $b(z)$ an, die zu ganzzahligen Argumentwerten

gehören und deren absoluter Betrag zwischen $|\alpha|$ (exkl.) und $|a(\varepsilon')$ (inkl.) liegt. Hieraus folgt nun weiter genau so wie in § 4 die Gleichung

$$\sum_{A(\alpha)}^{A(\beta)}[Ba(\varepsilon)]\,[Ca(\varepsilon)]+\sum_{B(\alpha)}^{B(\beta)}[Ab(\varepsilon)]'\,[Cb(\varepsilon)]+\sum_{C(\alpha)}^{C(\beta)}[Ac(\varepsilon)]'\,[Bc(\varepsilon)]'$$
$$=[A(\beta)]\,[B(\beta)]\,[C(\beta)]-|A(\alpha)]\,[B(\alpha)]\,[C(\alpha)],$$

wo z. B. die erste Summe über alle ganzen Zahlen ε zu erstrecken ist, die in dem Kreisring mit den Radien $|A(\alpha)|$ und $|A(\beta)|$ liegen, wobei die auf dem kleineren Kreise liegenden Zahlen nicht mitgerechnet werden.

Ein ausführliches Zahlenbeispiel kann ich, obgleich es gerade bei dieser Formel angebracht wäre, wegen des unverhältnismäfsig grofsen Raumes und der vielen Figuren, die es erfordern würde, nicht hierhersetzen. Als eine Art von Verifikation der Formel kann aber wohl die folgende Gleichung dienen:

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}=|A(\alpha)|}^{\sqrt{x^2+y^2}=|A(\beta)|}|Ba(\varepsilon)|^2\cdot|Ca(\varepsilon)|^2\,dx\,dy+\iint_{\sqrt{x^2+y^2}=|B(\alpha)|}^{\sqrt{x^2+y^2}=|B(\beta)|}|Ab(\varepsilon)|^2\cdot|Cb(\varepsilon)|^2\,dx\,dy$$
$$+\iint_{\sqrt{x^2+y^2}=|C(\alpha)|}^{\sqrt{x^2+y^2}=|C(\beta)|}|Ac(x)|^2\,|Bc(\varepsilon)|^2\,dx\,dy$$
$$=\pi\,(|A(\beta)|^2\cdot|B(\beta)|^2\cdot|C(\beta)|^2-|A(\alpha)|^2\,|B(\alpha)|^2\,|C(\alpha)|^2),$$

wo $\varepsilon=x+yi$ ist und die (reellen) Doppelintegrale über die Kreisringe, deren Radien angegeben sind, erstreckt werden sollen. Wenn $a(\varepsilon)$, $b(\varepsilon)$, $c(\varepsilon)$ Potenzen mit positiven Exponenten sind, ergiebt sich die Richtigkeit dieser Gleichung sehr leicht durch Einführung von Polarkoordinaten.

Der Kegelschnitt der neun Punkte.

Von Rudolf Böger in Hamburg.

1. Dafs der Feuerbachsche Kreis der neun Punkte ein besonderer Fall des Kegelschnittes ist, auf dem die Pole einer Gerade hinsichtlich der Kegelschnitte eines Büschels liegen, wird in den mir zugänglichen Lehrbüchern nicht bemerkt. Die bekannten Sätze, aus denen dieser Zusammenhang sich herleiten läfst, sollen hier noch einmal kurz entwickelt werden, und zwar in einer Form, die von der üblichen sich dadurch unterscheidet, dafs sie keiner Annahmen über die Reellität der Grundpunkte des Kegelschnittbüschels bedarf.

2. Diese allgemein gültige Beweisführung stützt sich auf eine Verallgemeinerung des Gaufsschen Satzes: Die Gerade, welche zwei Gegenseiten eines (vollständigen) Vierecks halbiert, halbiert auch die zugehörige Diagonallinie (wo, wie auch im folgenden, unter der zu zwei Gegenseiten gehörigen Diagonallinie die Verbindungslinie derjenigen beiden Diagonalpunkte verstanden werden soll, durch welche die Gegenseiten nicht hindurchgehn).

3. Ein Viereck kann entweder 4 oder 2 oder 0 reelle Ecken haben. Um diese drei Fälle gleichzeitig zu erledigen, ersetzen wir das Viereck durch zwei involutorische Punktreihen a und $\mathfrak{a}$, deren etwa vorhandene Doppelpunkte Ecken des Vierecks sind.

Wenn dem Schnittpunkt P von a und $\mathfrak{a}$ in a der Punkt P_1 und in $\mathfrak{a}$ der Punkt $\mathfrak{P}_1$ entspricht, so läfst sich in der Verbindungslinie $P_1\mathfrak{P}_1 = p$ (einer Diagonallinie des Vierecks für den Fall reeller Eckpunkte) in folgender Weise eine involutorische Punktreihe erzeugen: Ein beliebiger Strahl s des beliebigen Punktes S schneide a, $\mathfrak{a}$ und p in den drei Punkten A, $\mathfrak{A}$ und A (Fig. S. 349); die Verbindungslinie der den Punkten A und $\mathfrak{A}$ in a und $\mathfrak{a}$ entsprechenden Punkte A_1 und $\mathfrak{A}_1$ möge die Diagonallinie p in A_1 schneiden. Dreht sich nun s um S, so beschreiben A und $\mathfrak{A}$ und folglich auch A_1 und $\mathfrak{A}_1$ projektive Punktreihen, die Verbindungslinie $s_1 = A_1\mathfrak{A}_1$ also einen projektiven Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Diesem von s_1 beschriebenen Strahlenbüschel gehören die Geraden a, $\mathfrak{a}$ und p an, da s_1 der Reihe nach mit a, $\mathfrak{a}$ und p zusammenfällt, wenn nämlich s durch $\mathfrak{P}_1$, P_1 und P geht; folglich beschreiben auch die Punkte A und A_1, in denen s und s_1 die Gerade p schneiden, zwei projektive Punktreihen. Diese haben involutorische Lage, weil in ihnen die Punkte P_1 und $\mathfrak{P}_1$ einander doppelt entsprechen.

4. Die so vermittelst des Punktes S in p erzeugte involutorische Punktreihe ist aber unabhängig von dem Punkte S. Wählen wir nämlich einen anderen Punkt S_1, so ergiebt sich dieselbe involutorische Punktreihe, da die beiden durch S und S_1 erzeugten Punktreihen sowohl in dem Punktpaar $P_1\mathfrak{P}_1$ übereinstimmen als auch in dem Punktpaar AA_1, welches man erhält, wenn s mit der Verbindungslinie SS_1 zusammenfällt.

Die involutorischen Punktreihen der beiden Gegenseiten a und $\mathfrak{a}$ induzieren also in der zugehörigen Diagonallinie p eine involutorische Punktreihe von der Eigenschaft, dafs drei Punkten $A\mathfrak{A}\mathsf{A}$, die in einer Gerade liegen, drei Punkte $A_1\mathfrak{A}_1\mathsf{A}_1$ entsprechen, die wieder in einer Gerade liegen.

(Man zeichnet die sämtlichen Punktpaare von p, indem man die Punkte von a und $\mathfrak{a}$, die mit A in einer Gerade liegen, von irgend zwei Punkten aus projiziert, die mit A_1 in einer Gerade liegen.)

Dies ist die allgemeinste Form des Gaufsschen Satzes.

5. Hat die Punktreihe a die Doppelpunkte H und E, die Punktreihe $\mathfrak{a}$ die Doppelpunkte F und G, hat also mit andern Worten unser Viereck vier reelle Eckpunkte, so ist p die dem Diagonalpunkt P gegenüberliegende Diagonallinie und die in p erzeugte involutorische Punktreihe hat die beiden anderen Diagonalpunkte Q und R des Vierecks $EFGH$ zu Doppelpunkten. Die Punkte A und A_1 werden also durch H und E; $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ durch F und G; A und A_1 durch Q und R harmonisch getrennt. Für ein reelles Kurvenviereck läfst sich also dem vorstehenden Satze die Form geben:

Wenn zwei Geraden zwei Gegenseiten eines Vierecks harmonisch teilen, so teilen sie auch die zugehörige Diagonallinie harmonisch.

Läfst man die eine Gerade mit der unendlich fernen zusammenfallen, so erhält man den besonderen Fall, für welchen Gaufs den Satz ausgesprochen hat.

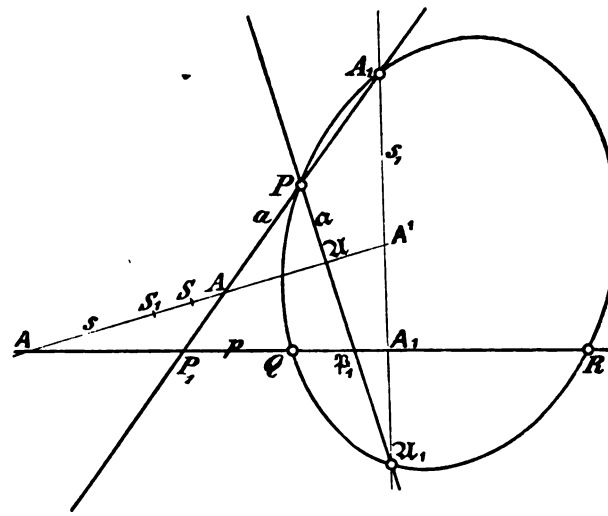
6. Konstruieren wir die Kurven zweiter Ordnung, für welche die zugeordneten Punkte von a und von $\mathfrak{a}$ konjugierte Punkte sind, d. h. den durch a und $\mathfrak{a}$ bestimmten Büschel, so ist für alle Kurven dieses Büschels die Gerade p die Polare des Punktes P, weil sie die beiden dem Punkte P konjugierten Punkte P_1 und $\mathfrak{P}_1$ verbindet. Weil a durch P geht, so müssen die Pole von a für alle Kurven auf p liegen. Ist für irgend eine der Kurven der Punkt A in p der Pol von a, so ist die Polare eines beliebigen Punktes A_1 in a die Verbindungslinie AA. Schneidet diese Polare AA die Gerade $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{A}$, so ist die Polare von $\mathfrak{A}$ die Verbindungslinie des zugeordneten Punktes $\mathfrak{A}_1$ mit dem Pole A_1. Diese Polare $A_1\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$ schneidet die Polare p von P in dem Pole A_1 von $P\mathfrak{A} = \mathfrak{a}$.

Die Pole der Gegenseiten a und $\mathfrak{a}$ für eine beliebige Kurve des Büschels sind also zwei zugeordnete Punkte der Punktreihe p.

7. Mit Hülfe dieses Satzes über die Pole von a und $\mathfrak{a}$ lassen sich nun auch die Pole einer beliebigen Gerade s für alle Kurven des Büschels zeichnen. Schneidet s die Gegenseiten a und $\mathfrak{a}$ in A und $\mathfrak{A}$, so erhalten wir die sämtlichen Pole von s, wenn wir die zugeordneten Punkte A und A_1 der Punktreihe p von A_1 und $\mathfrak{A}_1$ aus projizieren. Da die Punkte A und A_1 projektiv auf einander bezogen sind, so liegen die Schnittpunkte der zugeordneten Strahlen $A_1(A\ldots)$ und $\mathfrak{A}_1(A_1\ldots)$, d. h. die Pole von s in einer Kurve zweiter Ordnung.

8. Die beiden projektiven Strahlenbüschel A_1 (A...) und $\mathfrak{A}_1$ (A_1 ···) schneiden die Gerade s in zwei projektiven Punktreihen; diese haben involutorische Lage, weil der Schnittpunkt A von s und p und der Schnittpunkt A′ von s und s_1 einander doppelt entsprechen. Von dieser involutorischen Punktreihe s sind, weil P_1 und $\mathfrak{P}_1$ zwei zugeordnete Punkte in p sind, auch A und $\mathfrak{A}$ zwei zugeordnete Punkte.

Wir erhalten also die zu der Gerade $s = A\mathfrak{A}$ gehörige Polkurve, wenn wir von A_1 und $\mathfrak{A}_1$ aus entweder die Punktreihe $P_1\mathfrak{P}_1 \cdot AA_1$ in p oder die Punktreihe $A\mathfrak{A} \cdot AA'$ in s projizieren. Von dieser Kurve ist P ein Punkt; der Punkt A ist der Schnittpunkt der Tangenten in A_1 und $\mathfrak{A}_1$.



Wir fassen das Vorstehende noch einmal zusammen:

Die zu der Gerade s gehörende Polkurve des durch die Punktreihen a und $\mathfrak{a}$ gegebenen Kurvenbüschels ist bestimmt durch den Punkt P und die Punktreihen $P_1\mathfrak{P}_1 \cdot AA_1$ in p und $A\mathfrak{A} \cdot AA'$ in s. Die Polkurve geht durch die beiden Punkte A_1 und $\mathfrak{A}_1$, welche den Schnittpunkten von s mit den Gegenseiten a und $\mathfrak{a}$ entsprechen. Die Gerade s schneidet die Diagonallinie p in dem Pole der Sehne $A_1\mathfrak{A}_1$.

(Da wir die Polkurve auch als gegeben ansehen können durch die drei Punkte $PA_1\mathfrak{A}_1$ und den Schnittpunkt A der Tangenten in A_1 und $\mathfrak{A}_1$, so haben wir hier den einfachsten Fall der Kurvenzeichnung vor uns; wir haben nur die Punkte von a und $\mathfrak{a}$, die mit A in einer Gerade liegen, von $\mathfrak{A}_1$ und A_1 aus zu projizieren.)

9. Wir wenden uns nun zu dem Fall, daſs die vier Grundpunkte unseres Büschels reell sind, daſs also die Punktreihe a die Doppelpunkte H und E, die Punktreihe $\mathfrak{a}$ die Doppelpunkte F und G hat. Die Gegenseiten HF und GE wollen wir mit b und $\mathfrak{b}$, die Gegen-

seiten HG und EF mit c und $\mathfrak{c}$ bezeichnen; den Diagonalpunkt $b\mathfrak{b}$ mit Q, den Diagonalpunkt $c\mathfrak{c}$ mit R.

Die einer beliebigen Gerade s entsprechende Polkurve können wir nun ebenso mit Hülfe der Punktreihen b und $\mathfrak{b}$ (c und $\mathfrak{c}$) zeichnen, wie wir dies im vorhergehenden vermittelst der Gegenseiten a und $\mathfrak{a}$ gethan haben. Was wir also vorher von den Gegenseiten $a\mathfrak{a}$, ihrem Diagonalpunkt P und der gegenüberliegenden Diagonallinie p ausgesagt haben, gilt auch von den Gegenseiten $b\mathfrak{b}$ ($c\mathfrak{c}$), ihrem Diagonalpunkt $Q(R)$ und der gegenüberliegenden Diagonallinie q (r).

Schneidet demnach die beliebige Gerade s die Gegenseiten des Vierecks $EFGH$ in den Punkten $A\mathfrak{A}\,B\mathfrak{B}\,C\mathfrak{C}$ und die Diagonallinien pqr in $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ und heifsen die von $A\mathfrak{A}\,B\mathfrak{B}\,C\mathfrak{C}$ durch je zwei Eckpunkte des Vierecks harmonisch getrennten Punkte $A_1\mathfrak{A}_1, B_1\mathfrak{B}_1, C_1\mathfrak{C}_1$, so erhalten wir den

Satz vom Kegelschnitt der 9 Punkte: Die 6 von einer Gerade s durch je zwei Eckpunkte eines Vierecks harmonisch getrennten Punkte und die 3 Diagonalpunkte des Vierecks liegen auf einem Kegelschnitt. Die Sehnen, deren Endpunkte in zwei Gegenseiten liegen, gehen durch den Pol von s und haben den Schnittpunkt von s mit der zugehörigen Diagonallinie zum Pol.

10. Aus diesem allgemeinen Satze lassen sich zahlreiche besondere Fälle ableiten, indem man entweder s oder den vier Ecken $EFGH$ besondere Lagen anweist.

Fällt z. B. s mit der unendlich fernen Gerade zusammen, so ergiebt sich:

Die Mitten der sechs Seiten eines Vierecks und die drei Diagonalpunkte des Vierecks liegen auf einem Kegelschnitt. Die Verbindungslinien der Mitten je zweier Gegenseiten gehen durch den Mittelpunkt des Kegelschnitts und die Tangenten in den Mitten zweier Gegenseiten sind der zugehörigen Diagonallinie parallel.

11. Wenn die Gerade s zwei Gegenseiten des Vierecks halbiert, so hat man:

Die Hyperbel, welche durch die drei Diagonalpunkte eines Vierecks und die unendlich fernen Punkte zweier Gegenseiten bestimmt ist, hat die Mitte der zugehörigen Diagonallinie zum Mittelpunkt und schneidet die beiden andern Gegenseitenpaare in den Endpunkten zweier Durchmesser.

12. Die Diagonallinien eines Vierecks $EFGS$ schneiden die Seiten des Dreiecks EFG in Punkten, die von den gegenüberliegenden Diagonalpunkten durch je zwei von den Ecken EFG harmonisch

getrennt werden und in einer Gerade s liegen. Bestimmt man zu dieser Gerade s den Kegelschnitt der 9 Punkte für ein Viereck $EFGH$, das mit dem ersten in drei Ecken übereinstimmt, so geht dieser Kegelschnitt durch die Diagonalpunkte beider Vierecke. Denselben Kegelschnitt erhält man, wenn man von dem Viereck $EFGH$ ausgeht und zu der Gerade h, welche die von den Diagonalpunkten des Vierecks $EFGH$ durch die Ecken des Dreiecks EFG harmonisch getrennten Punkte enthält, den Kegelschnitt der 9 Punkte für das Viereck $EFGS$ zeichnet. Aus dieser zweifachen Entstehungsweise des Kegelschnitts der neun Punkte ergeben sich mancherlei Beziehungen, von denen hier nur die folgende hervorgehoben werden soll:

Stimmen zwei Vierecke in drei Punkten überein, so liegen die Diagonalpunkte beider Vierecke auf einem Kegelschnitt. Die Tangenten in den Diagonalpunkten des einen Vierecks schneiden die gegenüberliegenden Diagonallinien des andern in drei Punkten, die in einer Gerade (s oder h) liegen.

Läfst man die vierten Ecken beider Vierecke zusammenfallen, so erhält man die Lehrsätze von Pascal und Brianchon für ein Kurvendreieck und das von den Tangenten der Ecken gebildete Kurvendreiseit.

13. Den Satz von Feuerbach schliefslich erhält man durch eine dreifache Spezialisierung. Man wählt ein Viereck, von dem die Gegenseiten a und $\mathfrak{a}$ und die Gegenseiten b und $\mathfrak{b}$ (und folglich auch die Gegenseiten c und $\mathfrak{c}$) auf einander senkrecht stehen, und läfst die Gerade s mit der unendlich fernen Gerade zusammenfallen. Die in s durch den zugehörigen Kegelschnitt der 9 Punkte bestimmte involutorische Punktreihe ist gegeben durch die Schnittpunkte der (unendlich fernen) Gerade s mit den senkrecht auf einander stehenden Gegenseiten $a\mathfrak{a}$ und $b\mathfrak{b}$. Der Kegelschnitt ist also, weil seine konjugierten Durchmesser auf einander senkrecht stehen, ein Kreis.

Wir erhalten also den Satz von Feuerbach:

In einem Viereck, dessen Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, liegen die Mitten der 6 Seiten und die drei Diagonalpunkte in einem Kreise. Die Verbindungslinie der Mitten zweier Gegenseiten geht durch den Mittelpunkt des Kreises und steht auf der zugehörigen Diagonallinie senkrecht und halbiert sie.

Die Form, in welcher der Feuerbachsche Satz gewöhnlich ausgesprochen wird, erhält man, wenn man beachtet, dafs ein Viereck $EFGH$, dessen Gegenseiten auf einander senkrecht stehen, sich ansehen läfst als ein Dreieck EFG mit dem Höhenschnittpunkt H.

Man erhält den Feuerbachschen Kreis übrigens auch, wenn man von einem Viereck $EFGS$ ausgeht, in dem die vierte Ecke S der Schwerpunkt des von den drei andern Ecken EFG gebildeten Dreiecks ist, und den Kegelschnitt der 9 Punkte für diejenige Gerade h zeichnet, die die von den Fufspunkten der Höhen durch die Ecken des Dreiecks EFG harmonisch getrennten Punkte enthält. Daraus ergiebt sich noch:

Der Feuerbachsche Kreis schneidet die oberen Abschnitte der drei Schwerpunktstransversalen in Punkten, die von h durch den Schwerpunkt und je eine Ecke des Dreiecks harmonisch getrennt sind. — Die Verbindungslinie der Mitten zweier Dreiecksseiten und die Tangenten in dem Fufspunkte der Höhe der dritten Seite schneiden sich in einem Punkte von h.

Eine Aufgabe ersten Grades.

Von Rudolf Böger in Hamburg.

Die Aufgabe: Durch fünf Punkte eine Kurve zweiter Ordnung zu legen, ist vom ersten Grade, d. h. eine solche, die sich allein durch Ziehen von geraden Linien lösen läfst. Trotzdem enthalten die Lehrbücher für den Fall, dafs vier von den fünf Punkten imaginär sind, nur solche Lösungen, die eine Kurve zweiter Ordnung (einen Kreis) zu Hilfe nehmen. Im folgenden soll nun für die Aufgabe eine lineare Lösung gegeben werden, und zwar eine solche, die für alle Fälle (4, 2 oder 0 imaginäre Punkte) gleichzeitig gültig ist.

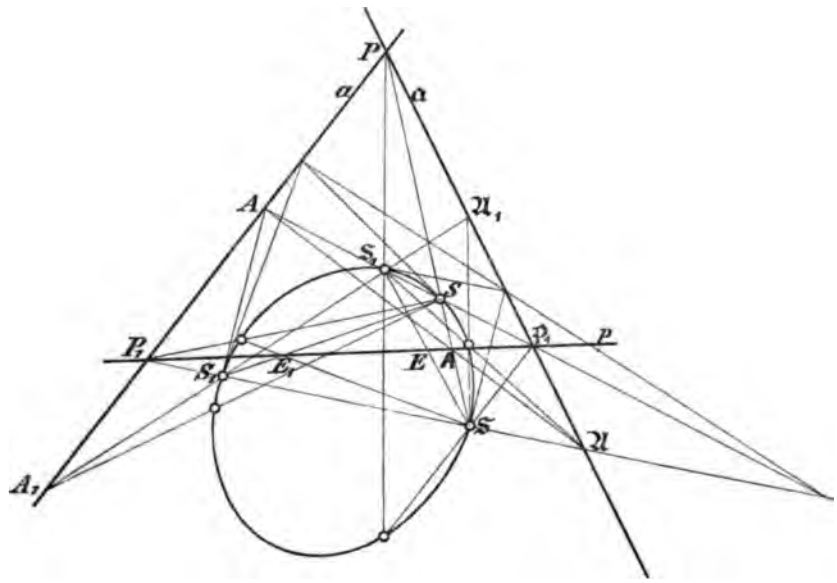
Vier von den gegebenen Punkten ersetzen wir durch zwei involutorische Punktreihen, so dafs unsere Aufgabe lautet:

Durch einen Punkt $\mathfrak{S}$ eine Kurve zweiter Ordnung zu legen, für welche die zugeordneten Punkte zweier involutorischen Punktreihen a und $\mathfrak{a}$ konjugierte Punkte sind.

Konstruktion: Dem Schnittpunkt P von a und $\mathfrak{a}$ entspreche in der Punktreihe a der Punkt P_1, in der Punktreihe $\mathfrak{a}$ der Punkt $\mathfrak{P}_1$; die Verbindungslinie $P_1\mathfrak{P}_1$ heifse p. Wir verbinden den gegebenen Punkt $\mathfrak{S}$ mit den beiden Ecken P und P_1 des Dreiecks $PP_1\mathfrak{P}_1$ durch zwei Geraden, die die Gegenseiten p und $\mathfrak{a}$ in A und $\mathfrak{A}$ treffen. Schneidet die Verbindungslinie A$\mathfrak{A}$ die Seite a im Punkte A, so bilden die vier Punkte $A\mathfrak{A}P_1\mathfrak{P}_1$ ein Viereck, von dem P und A zwei Diagonalpunkte sind; die Seite $A\mathfrak{P}_1$ schneidet daher die Diagonallinie PA in einem Punkte S, der von $\mathfrak{S}$ durch P und A harmonisch ge-

trennt ist. Ferner ziehen wir die Verbindungslinie der beiden Punkte A_1 und $\mathfrak{A}_1$, welche den Punkten A und $\mathfrak{A}$ in a und $\mathfrak{a}$ zugeordnet sind, und bezeichnen den Punkt, in dem $A_1\mathfrak{A}_1$ die Seite $A\mathfrak{P}_1$ schneidet, mit $\mathfrak{S}_1$ und den Punkt, in dem $A_1\mathfrak{A}_1$ die Gegenseite $\mathfrak{A}P_1$ schneidet, mit S_1. Man erhält nun die gesuchte Kurve, indem man die Punktreihe $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ aus (oder die Punktreihe a von S und S_1 aus) projiziert.

Beweis: Für die Kurve, welche durch die Projektion der Punktreihe $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ aus entsteht, ist der Pol von $\mathfrak{a}$ der von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ harmonisch getrennte Punkt E. Weil aber $\mathfrak{S}S.P\mathsf{A}$



nach der Konstruktion vier harmonische Punkte sind, also $\mathfrak{P}_1$ ($\mathfrak{S}S.P\mathsf{A}$) vier harmonische Strahlen, so ist E der Punkt, in dem $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ die Gerade p schneidet. Da aufserdem nach der Konstruktion dem Punkte P der Punkt $\mathfrak{P}_1$ konjugiert ist, so ist die Verbindungslinie $E\mathfrak{P}_1 = p$ die Polare von P. Folglich sind auch die Punkte P und P_1 von a hinsichtlich der gezeichneten Kurve konjugiert. Es bleibt noch zu zeigen, dafs auch die Punkte A und A_1 von a konjugiert sind. Dazu bestimmen wir zunächst den Pol von a.

Der Punkt E_1, in dem SS_1 die Gerade p schneidet, ist durch S und S_1 von a harmonisch getrennt; denn $\mathfrak{S}S.P\mathsf{A}$ sind nach der Konstruktion vier harmonische Punkte, folglich P_1 ($\mathfrak{S}S.P\mathsf{A}$) vier harmonische Strahlen. Weil der Punkt E_1 in p liegt, so mufs aufser-

dem seine Polare durch P gehen; E_1 ist daher der Pol von a. Die Polare des Punktes A geht daher, weil A in a liegt, durch E_1; ferner mufs sie durch den von A durch die Kurvenpunkte S und $\mathfrak{S}_1$ harmonisch getrennten Punkt gehen. Diesen erhält man aber durch die Gerade A_1E_1, weil E_1 von a durch S und S_1 harmonisch getrennt ist. A und A_1 sind also zwei konjugierte Punkte, weil die Polare von A durch A_1 geht.

Für die Ausführung der Zeichnung ist noch zu bemerken, dafs die Diagonallinie des Kurvenvierecks $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1SS_1$, auf welcher sich die Gegenseiten $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ und SS_1 nicht schneiden, die Geraden $\mathfrak{a}$ und a in den Polen der Sehnen $\mathfrak{S}\mathfrak{S}_1$ und SS_1 trifft und dafs man die Kurve auch erhalten kann durch Projektion der Punktreihe $\mathfrak{P}_1E.P_1E_1$ in p von $\mathfrak{S}$ und S aus. Man findet also ohne weiteres von der verlangten Kurve acht Punkte (einschliefslich des gegebenen) und die Tangenten in vier von diesen Punkten.

Zur Theorie des Schlickschen Problems.

Von H. Schubert in Hamburg.

§ 1. Einleitendes.

Durch die an jedem Cylinder einer Schiffsmaschine hin- und hergehenden Teile werden Druckkräfte hervorgerufen, die, nach Gröfse und Vorzeichen, während einer Kurbelumdrehungszeit veränderlich sind und dadurch Vibrationen des Schiffskörpers hervorrufen, die man zu vermeiden sucht. Herr Konsul Schlick in Hamburg stellte sich nun die Aufgabe, im Fall einer an beliebiger Stelle des Schiffes aufgebauten viercylindrigen Maschine die Vibrationen dadurch zum Verschwinden zu bringen, dafs bei jeder Stellung der vier Kurbeln die vier Druckkräfte sich dauernd aufheben. Er löste dieses Problem zunächst durch einfache statische Rechnungen mit Benutzung graphischer Methoden für den Fall, dafs die Zugstange gegenüber dem Kurbelradius als unendlich lang anzusehen ist. Die Erfindung, durch bestimmte Gewichte der hin- und hergehenden Teile, bestimmte Stellung der Kurbeln zu einander und bestimmte Abstandsverhältnisse der Cylinder, die Aufhebung der Kräfte trotz ihrer Veränderlichkeit dauernd zu erzielen, liefs Herr Schlick sich allenthalben patentieren. Nach seinem System — bekannt unter dem Namen Schlicks System — sind die Maschinen der meisten in den letzten Jahren gebauten grofsen Dampfer gebaut. Die Anfeindungen jedoch, welche sein

Patent in Deutschland erlitt, machte eine eingehendere und allgemeinere mathematische Behandlung des Problems wünschenswert.

§ 2. Bezeichnungen und Ansatz.

Bei einer n-cylindrigen Maschine bezeichne für den i^{ten} Cylinder:

1) P_i das Gewicht der hin- und hergehenden Teile;
2) v_i die als konstant anzusehende Geschwindigkeit in der Peripherie der Kurbel;
3) R_i den Kurbelradius;
4) S_i die Länge der Schubstange;
5) m_i das Verhältnis $S_i : R_i$;
6) a_i den Winkel, den die Kurbel in der Ruhelage mit einer beliebig angenommenen Anfangsrichtung bildet;
7) x den Winkel, den die Kurbel in einem bestimmten Momente der Bewegung mit derselben Anfangsrichtung bildet;
8) l_i die Entfernung des Cylinders von einer beliebigen in der Ebene der Cylinder liegenden und ihnen parallelen geraden Linie;
9) g die Beschleunigung beim freien Fall;
10) A_i das Verhältnis $P_i \cdot v_i^2 : (g \cdot R_i)$;
11) Q_i den Massendruck in der Schubstangenrichtung.

Dann ist, mit einer für die Praxis ausreichenden Annäherung:[1])

$$Q_i = A_i \cos(x - a_i) + \frac{A_i}{m_i} \cos(2x - 2a_i) \cdot \tag{1}$$

Die n Cylinder liefern n parallele und in einer Ebene liegende Massendruckkräfte:

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ Q_4,\ \cdots,$$

welche sich aufheben, wenn einerseits

$$\sum Q = 0, \tag{2}$$

andererseits auch

$$\sum Ql = 0 \tag{3}$$

ist. Aus (2) folgt durch Auflösung der Klammern in (1):

$$\sin x \cdot \sum A \sin a + \cos x \cdot \sum A \cos a + \sin 2x \cdot \sum \frac{A}{m} \sin 2a + \cos 2x \cdot \sum \frac{A}{m} \cos 2a = 0 \cdot \tag{4}$$

---

1) Siehe Radinger: „Über Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit", Wien 1892, S. 304.

Ebenso folgt aus (3):

$$(5) \qquad \sin x \cdot \sum Al \sin a + \cos x \cdot \sum Al \cos a$$
$$+ \sin 2x \cdot \sum \frac{Al}{m} \sin 2a + \cos 2x \cdot \sum \frac{Al}{m} \cos 2a = 0 \cdot$$

Damit nun die sich entwickelnden Kräfte bei jeder Stellung der Kurbeln sich aufheben, müssen die Gleichungen (4) und (5) für jeden Winkel x erfüllt werden. Ihre linken Seiten sind aber Ausdrücke von der Form:

$$B \sin x + C \cos x + D \sin 2x + E \cos 2x \cdot$$

Solche Ausdrücke können aber nur dann für jeden Winkel x null werden, wenn die Koëfficienten B, C, D, E einzeln null werden; wie man sofort erkennt, wenn man die drei Ausdrücke hinzufügt, die entstehen, wenn man beziehungsweise $180 - x$, $180 + x$, $360 - x$ statt x setzt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Kräfte sich dauernd aufheben, besteht also in der Erfüllung der folgenden acht Gleichungen:

$$(6) \quad \sum A \sin a = 0; \qquad (7) \quad \sum A \cos a = 0;$$

$$(8) \quad \sum \frac{A}{m} \sin 2a = 0; \qquad (9) \quad \sum \frac{A}{m} \cos 2a = 0;$$

$$(10) \quad \sum Al \sin a = 0; \qquad (11) \quad \sum Al \cos a = 0;$$

$$(12) \quad \sum \frac{Al}{m} \sin 2a = 0; \qquad (13) \quad \sum \frac{Al}{m} \cos 2a = 0.$$

Diese acht Gleichungen als notwendige und hinreichende Bedingungen für die dauernde Aufhebung der Vibrationen besitzen Herr Schlick und ich schon seit November 1895. Neuerdings ist auch Herr Professor Lorenz in Halle auf anderem Wege zu denselben acht fundamentalen Gleichungen gelangt, und zwar in einer Abhandlung im 41. Bande der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure (Heft 35 und 36). Während jedoch Herr Lorenz am Schlufs dieser Abhandlung die Meinung ausspricht, dafs die Berechnung der acht Unbekannten aus jenen Gleichungen die mathematische Lösung des Problems ergeben müsse, wird hier in § 4 bewiesen, dafs, wenn die Schubstange gegenüber dem Kurbelradius nicht als unendlich lang angesehen wird, die acht Gleichungen praktisch unverträglich sind.

§ 3. Dauerndes Gleichgewicht bei vier Cylindern, falls alle m unendlich grofs sind.

Das ursprüngliche Schlicksche Patent bezieht sich auf den Fall, dafs die Länge der Schubstange gegenüber dem Kurbelradius als unendlich lang angesehen werden darf, dafs also jedes $m_i = \infty$ ist. In diesem Fall werden von den acht in § 2 abgeleiteten Gleichungen (8), (9), (12), (13) von selbst erfüllt. Es handelt sich also nur noch um die Erfüllung der Gleichungen (6), (7), (10), (11). Soll ferner $n = 4$ sein, so bestehen diese vier Gleichungen zwischen acht Gröfsen. Die Verhältnisse der A_1, A_2, A_3, A_4 stellen nämlich drei von einander unabhängige Gröfsen dar, die Winkel, die die Kurbelrichtungen mit einander bilden, drei solche Gröfsen, und die Abstandsverhältnisse der vier Cylinder nur zwei solche Gröfsen. Deshalb erhält man durch Elimination der A_1, A_2, A_3, A_4 eine Beziehung, die allein zwischen den Winkeln der Kurbelrichtungen und den Abständen l_1, l_2, l_3, l_4 besteht. Diese von mir schon 1896 in einem Gutachten bezüglich des Schlickschen Patents aufgestellte Beziehung lautet:

$$(14) \qquad \frac{l_1 - l_2}{l_1 - l_3} : \frac{l_4 - l_2}{l_4 - l_3} = \frac{\sin(a_1 - a_2)}{\sin(a_1 - a_3)} : \frac{\sin(a_4 - a_2)}{\sin(a_4 - a_3)}.$$

Sie drückt also aus, dafs bei jeder Lösung des Schlickschen Problems die von einem und demselben Punkte ausgehend gedachten vier Kurbelrichtungen in perspektivische Lage zu vier Punkten gebracht werden können, die in gerader Linie so zu einander liegen, wie die vier Cylinder der Maschine zu einander liegen. Zugleich ergiebt eine Diskussion der vier Gleichungen zwischen den acht Gröfsen mit Rücksicht darauf, dafs jedes A_i positiv sein mufs, ein Gesetz über den Zusammenhang zwischen der Reihenfolge der vier Cylinder und der Reihenfolge der vier Kurbelrichtungen, wenn man letztere von einem und demselben Punkte aus zeichnet. Dieses Gesetz spricht aus, dafs die beiden innen befindlichen Cylinder ebenso wie die beiden aufsen befindlichen Cylinder Kurbeln haben müssen, deren Richtungen aufeinander folgen. Bezeichnet man ferner die vier Kurbelrichtungen der Reihe nach, im Sinne des Uhrzeigers, mit 1, 2, 3, 4, die zugehörigen Cylinder beziehungsweise mit I, II, III, IV, so müssen diese Cylinder eine der folgenden vier Stellungen einnehmen:

1) I III II IV
2) I III IV II
3) III I II IV
4) III I IV II.

Im ersten Fall bilden die Kurbeln der beiden aufsen stehenden Cylinder den Winkel $a_1 - a_4$, im zweiten Fall den Winkel $a_2 - a_1$, im dritten Fall den Winkel $a_4 - a_3$, im vierten Fall den Winkel $a_3 - a_2$. Da nun diese vier Winkel ganz gleichberechtigt sind, so wird die Allgemeinheit der Entwickelungen offenbar nicht gestört, wenn wir von jetzt an nur noch den zweiten Fall behandeln. Dann ergeben unsere vier Gleichungen, dafs

$$a_3 - a_1 < 180^0, \quad \text{und auch} \quad a_2 - a_4 < 180^0$$

sein mufs. Der Kürze wegen bezeichnen wir von nun an die aufeinanderfolgenden Winkel $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, $a_1 - a_4$ beziehungsweise mit α, β, γ, δ. Dann kann der Doppelverhältnisgleichung Nr. 14 die folgende Gestalt gegeben werden:

$$(15) \qquad \frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma} = \frac{(l_3 - l_2)(l_1 - l_4)}{(l_1 - l_2)(l_3 - l_4)} = v,$$

wo also v aus den Abstandsverhältnissen leicht bestimmbar ist.

Wenn nun die Abstände der vier Cylinder gegeben sind, also v bekannt ist, so dürfen noch zwei Kurbelwinkel oder zwei Beziehungen zwischen ihnen willkürlich gegeben werden. Dann sind die andern Kurbelwinkel und alle Verhältnisse zweier von den Gröfsen A_1, A_2, A_3, A_4 bestimmt. Sind zwei aufeinanderfolgende Kurbelwinkel, etwa α und β, gegeben, so ergiebt sich für γ:

$$(16) \qquad \operatorname{cotg}\gamma = -\frac{v\sin\alpha + \sin\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)},$$

und daraus $\delta = 360^0 - \alpha - \beta - \gamma$.

Sind zwei gegenüberliegende Kurbelwinkel, etwa β und δ, gegeben, so ergiebt sich für $\gamma - \alpha$:

$$(17) \qquad \cos(\gamma - \alpha) = \cos(\beta + \delta) + \frac{2\sin\beta \cdot \sin\delta}{v}.$$

Aus $\gamma - \alpha$ und $\gamma + \alpha = 360^0 - \beta - \delta$ findet man dann γ und α selbst.

Durch die Abstandsverhältnisse und die Kurbelwinkel kann man dann die Verhältnisse $\frac{A_2}{A_1}$, $\frac{A_3}{A_1}$, $\frac{A_4}{A_1}$ vermittelst der ursprünglichen vier Gleichungen bestimmen. Es ergiebt sich jedes Verhältnis in doppelter Gestalt, nämlich:

$$(18) \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{l_1 - l_4}{l_4 - l_2} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{l_1 - l_3}{l_3 - l_2} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)};$$

$$(19) \qquad \frac{A_3}{A_1} = \frac{l_1 - l_2}{l_3 - l_2} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{l_1 - l_4}{l_3 - l_4} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

$$(20) \qquad \frac{A_4}{A_1} = \frac{l_1 - l_2}{l_4 - l_2} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = \frac{l_1 - l_3}{l_3 - l_4} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Wenn im speziellen Falle, der praktisch meist vorkommen wird, die vier Cylinder symmetrisch zu einander stehen, so ergiebt sich, wenn L die Entfernung der beiden äufseren Cylinder, l die der beiden inneren bedeutet, für das oben v genannte Doppelverhältnis:

$$v = \frac{(L+l)^2}{4Ll}.$$

Dann kommt für (18), (19), (20):

(21) $$\frac{A_2}{A_1} = \frac{L+l}{L-l} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} = \frac{L-l}{L+l} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)};$$

(22) $$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2L}{L+l} \cdot \frac{\sin\delta}{\sin\gamma} = \frac{L+l}{2l} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

(23) $$\frac{A_4}{A_1} = \frac{2L}{L-l} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = \frac{L-l}{2l} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}.$$

Schliefslich sei noch bemerkt, dafs kein Winkel zwischen zwei Kurbeln 0^0 oder 180^0 sein darf, weil aus (18), (19) und (20) in diesem Falle folgen würde, dafs irgend ein Verhältnis der Gröfsen A_1, A_2, A_3, A_4 null oder unendlich grofs sein müfste, was sinnlos ist.

§ 4. Unmöglichkeit von dauerndem Gleichgewicht bei vier Cylindern, falls alle m endlich sind.

Wenn das Verhältnis der Schubstange zum Kurbelradius nicht als unendlich angesehen wird, sondern vorausgesetzt wird, dafs die vier Verhältnisse m_1, m_2, m_3, m_4 endlich sind, so treten zu den in § 3 behandelten vier Gleichungen (6), (7), (10), (11) noch die vier Gleichungen (8), (9), (12), (13) hinzu. Die letzteren unterscheiden sich aber von den ersteren durch nichts weiter, als dadurch, dafs erstens

$$\frac{A_1}{m_1} \text{ statt } A_1, \quad \frac{A_2}{m_2} \text{ statt } A_2, \quad \frac{A_3}{m_3} \text{ statt } A_3 \text{ und } \frac{A_4}{m_4} \text{ statt } A_4$$

gesetzt ist, und dafs zweitens

$$2a_1 \text{ statt } a_1, \quad 2a_2 \text{ statt } a_2, \quad 2a_3 \text{ statt } a_3, \quad 2a_4 \text{ statt } a_4$$

als Winkel auftreten. Wir erhalten dann durch Elimination der vier Grössen $\frac{A_1}{m_1}$, $\frac{A_2}{m_2}$, $\frac{A_3}{m_3}$, $\frac{A_4}{m_4}$ in derselben Weise, wie in § 3, die Nr. 15 entsprechende Gleichung:

(24) $$\frac{\sin 2\beta \cdot \sin 2\delta}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\gamma} = v.$$

Ebenso erhalten wir, wie am Schlufs von § 3, dafs auch keiner der doppelten Kurbelwinkel 0^0 und 180^0 sein kann, also kein Kurbelwinkel 90^0 betragen darf. Aus (15) und (24) erhalten wir, da die Gröfse v in beiden Fällen ganz dasselbe bedeutet:

(25) $$\frac{\sin 2\beta \cdot \sin 2\delta}{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\gamma} = \frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}.$$

Da keine der Zahlen $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\sin\delta$ gleich Null sein kann, so dürfen wir (25) beiderseits durch $\frac{\sin\beta \cdot \sin\delta}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma}$ dividieren, woraus folgt:

$$\frac{2\cos\beta \cdot \cos\delta}{2\cos\alpha \cdot \cos\gamma} = 1 \tag{26}$$

oder:

$$\cos(\beta+\delta) + \cos(\beta-\delta) = \cos(\gamma+\alpha) + \cos(\gamma-\alpha). \tag{27}$$

Daraus folgt, da $\beta + \delta + \gamma + \alpha = 360^0$ ist,

$$\cos(\beta-\delta) = \cos(\gamma-\alpha),$$

und hieraus, da $\beta - \delta + \gamma - \alpha$ unmöglich 360^0 sein kann,

$$\beta - \delta = \pm(\gamma - \alpha), \tag{28}$$

d. h. entweder

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \quad \text{oder} \quad \alpha + \delta = \gamma + \beta,$$

d. h. entweder

$$\alpha + \beta = 180^0 \quad \text{und} \quad \gamma + \delta = 180^0$$

oder

$$\alpha + \delta = 180^0 \quad \text{und} \quad \beta + \gamma = 180^0.$$

Beides ist aber am Schluſs von § 3 als unmöglich erkannt. Daher sind bei vier Cylindern die in § 2 abgeleiteten acht fundamentalen Gleichungen unverträglich[1]), und zwar auch dann, wenn das Verhältnis m der Schubstange zum Kurbelradius bei allen vier Cylindern als verschieden angesehen werden darf. Dagegen lassen sich die sechs Gleichungen (6), (7), (8), (9), (10), (11) sehr wohl erfüllen, wie in § 6 gezeigt werden wird. Daſs dies für die Praxis ausreicht, hat die Erfahrung bei vielen ausgeführten Dampfern gezeigt.

§ 5. Dauerndes Verschwinden der vertikalen Kräfte bei vier Cylindern.

Wie in § 4 gezeigt ist, lassen sich die acht Gleichungen, die zur vollständigen Aufhebung der vier Druckkräfte für jeden Winkel x zu erfüllen nötig sind, in der Praxis nicht befriedigen. Zunächst kann man nun daran denken, dafür zu sorgen, daſs für jeden Winkel x die algebraische Summe der vier Druckkräfte null werde. Wenn die Punkte, in denen die Druckkräfte angreifen, zusammenfielen, so hieſse dies, daſs dauernd vollständiges Gleichgewicht herrschte. Die vier Angriffspunkte haben aber verschiedene Lage. Und darum halten sich die Kräfte nicht das Gleichgewicht, wenn jene algebraische

1) Herr Lorenz hielt sie a. a. O. für verträglich. Daſs sie es nicht sind bewies ich öffentlich zuerst in einem Vortrage, gehalten auf der Braunschweiger Vers. der deutschen Math.-Ver. (Sept 97).

Summe null wird. Man hat in diesem Falle keinen weiteren Vorteil, als dafs dauernd weder in der einen, noch in der entgegengesetzten Richtung sich eine von Null verschiedene Druckresultante entwickelt. Die Ingenieure nennen dies „Aufhebung der vertikalen Kräfte". Bei der Behandlung dieses Falls setzen wir $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$, wodurch die zu betrachtenden Gleichungen (6), (7), (8), (9) die folgende Gestalt gewinnen:

$$\sum A \sin a = 0; \qquad \sum A \cos a = 0;$$

$$\sum A \sin 2a_1 = 0; \qquad \sum A \cos 2a = 0.$$

Damit diese vier Gleichungen, ohne dafs A_1, A_2, A_3, A_4 null werden, gleichzeitig bestehen können, mufs die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \sin a_1 & \sin a_2 & \sin a_3 & \sin a_4 \\ \cos a_1 & \cos a_2 & \cos a_3 & \cos a_4 \\ \sin 2a_1 & \sin 2a_2 & \sin 2a_3 & \sin 2a_4 \\ \cos 2a_1 & \cos 2a_2 & \cos 2a_3 & \cos 2a_4 \end{vmatrix}$$

null werden.

Entwickelt man diese Determinante und führt dann die Buchstaben α, β, γ, δ für $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, $a_1 - a_4$ wieder ein, so erhält man:

$$(29) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot D = 0,$$

wo D sich bestimmt aus:

$$D = 2 \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta-\delta}{2}$$

oder aus:

$$-D = 2 \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\delta}{2} - \cos\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Beide Relationen erscheinen als dasselbe, wenn man beachtet, dafs $\frac{\gamma+\alpha}{2}$ das Supplement von $\frac{\beta+\delta}{2}$ sein mufs.

Nun kann in (29) keiner der sechs vor D stehenden Faktoren null sein, weil der Fall, dafs einer der Kurbelwinkel null Grad ist, ausgeschlossen ist. Also bleibt allein die Bedingungsgleichung:

$$(30) \qquad 2 \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta-\delta}{2}$$

übrig.

Wenn $\beta = \delta$ ist, so wird aus (30):

$$2 \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = 1,$$

ein Spezialfall, den der Erfinder, Herr Konsul Schlick, schon vor mir gefunden hatte.[1])

Wegen der Bedingungsgleichung (30) können nur zwei von den Kurbelwinkeln willkürlich angenommen werden. Sind dies zwei gegenüberliegende, etwa α und γ, so ergiebt (30) $\frac{\beta-\delta}{2}$, während $\frac{\beta+\delta}{2} = 180^0 - \frac{\alpha+\gamma}{2}$ ist, sodafs β und δ bestimmt sind. Sind zwei anliegende Kurbelwinkel, etwa α und β, gegeben, so erhält man aus (30), indem man $\delta = 360^0 - \alpha - \beta - \gamma$ setzt,

$$\text{(31)} \qquad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Wenn auf solche Weise die Kurbelwinkel festgestellt sind, so erwächst noch die Aufgabe, die Verhältnisse der Gröfsen A_1, A_2, A_3, A_4 zu bestimmen. Diese erhält man am besten auf folgende Weise. Man transponiere in (6) und (7) den dritten und vierten Addenden nach rechts, quadriere dann jede der Gleichungen, und addiere sie. Dann kommt:

$$\text{(32)} \quad A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(a_2 - a_1) = A_3^2 + A_4^2 + 2A_3A_4\cos(a_4 - a_3).$$

Analog erhält man aus (8) und (9), da alle vier m gleich sein sollten:

$$\text{(33)} \quad A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(2a_2 - 2a_1) = A_3^2 + A_4^2 + 2A_3A_4\cos(2a_4 - 2a_3).$$

Aus (32) und (33) folgt:

$$A_1A_2(\cos\alpha - \cos 2\alpha) = A_3A_4(\cos\gamma - 2\gamma)$$

oder:

$$\text{(34)} \qquad A_1A_2\sin\tfrac{3}{2}\alpha\sin\tfrac{\alpha}{2} = A_3A_4\sin\tfrac{3}{2}\gamma\sin\tfrac{\gamma}{2}.$$

Ebenso findet man:

$$\text{(35)} \qquad A_1A_4\sin\tfrac{3}{2}\delta\sin\tfrac{\delta}{2} = A_2A_3\sin\tfrac{3}{2}\beta\sin\tfrac{\beta}{2},$$

und

$$\text{(36)} \quad A_1A_3\sin\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} = A_2A_4\sin\tfrac{3}{2}(\alpha+\delta)\sin\tfrac{\alpha+\delta}{2}.$$

Durch Multiplikation von (35) und (36) und darauf folgende Radizierung erhält man dann:

---

1) Ferner hatte Herr Schlick in diesem speziellen Falle schon vor mir die Möglichkeit der dauernden Aufhebung der Vertikalkräfte, auch im Fall einer endlich langen Schubstange, erkannt.

$$(37)\qquad \frac{A_2}{A_1} = \sqrt{\frac{\sin\frac{3}{2}\delta \sin\frac{\delta}{2} \sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\beta \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{3}{2}(\alpha+\delta) \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}}.$$

Ebenso erhält man:

$$(38)\qquad \frac{A_3}{A_1} = \sqrt{\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{3}{2}\delta \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\beta \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{3}{2}\gamma \sin\frac{\gamma}{2}}}$$

und

$$(39)\qquad \frac{A_4}{A_1} = \sqrt{\frac{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta) \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\gamma \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{3}{2}(\alpha+\delta) \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}}.$$

Die Formeln (37), (38), (39) für die gesuchten Verhältnisse sind logarithmisch bequem. Aus ihnen folgen auch die einfachen Formeln, welche auf der in der Praxis üblichen Annahme $\beta = \delta$ beruhen. Dann kommt nämlich:

$$A_2 = A_1 \quad \text{und} \quad A_4 = A_3.$$

Demgemäfs setzen wir $A_2 = A_1 = A$ und $A_4 = A_3 = C$. Setzt man demgemäfs A und C in (32) und (33) ein, so erhält man:

$$2A^2 + 2A^2 \cos\alpha = 2C^2 + 2C^2 \cos\gamma$$

oder

$$4A^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} = 4C^2 \cos^2\frac{\gamma}{2},$$

woraus folgt:

$$(40)\qquad A \cos\frac{\alpha}{2} = C \cos\frac{\gamma}{2}.$$

Verbindet man (40) mit der aus (30) für $\beta = \delta$ hervorgehenden Gleichung, so erhält man:

$$(41)\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{C}{2A}} \quad \text{und} \quad (42)\ \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{A}{2C}},$$

wodurch in dem besprochenen Spezialfall sich alle Kurbelwinkel aus dem Verhältnis von A zu C bestimmen.

§ 6. Dauerndes Verschwinden der Vertikalkräfte bei endlicher Schubstange und zugleich Herstellung von dauerndem Gleichgewicht bei unendlich langer Schubstange.

In § 4 ist bewiesen, dafs, selbst wenn alle in Betracht kommenden Gröfsen, mit Ausschlufs jeder freien Verfügung, so allgemein wie möglich angesehen werden, ein dauerndes Gleichgewicht der vier an

vier verschiedenen Stellen angreifenden Druckkräfte nicht herzustellen ist, falls die Schubstange gegenüber dem Kurbelradius nicht als unendlich lang angesehen wird. In § 3 ist gezeigt, wie dauerndes Gleichgewicht der vier Kräfte erreichbar ist, wenn angenommen wird, dafs die Schubstange gegenüber dem Kurbelradius als unendlich lang angesehen ist. (Fall des Schlick'schen Patents.) In § 5 ist das Problem der Annullierung der Summe der vertikalen Kräfte gelöst. (Erfüllung der Gleichgewichts-Bedingung Nr. 2 für jeden Winkel x.) Jetzt vereinigen wir nun die in § 3 und die in § 5 abgeleiteten Bedingungen und erreichen dadurch, dafs von den mafsgebenden acht Gleichungen (6) bis (13), die alle acht praktisch nun einmal nicht erfüllbar sind, wenigstens diejenigen sechs erfüllt werden, deren Befriedigung praktisch am wichtigsten ist, und dies sind die Gleichungen (6), (7), (8), (9), (10), (11).

Diese sechs Gleichungen bestehen zwischen acht Gröfsen, nämlich den drei Verhältnissen der A_1, A_2, A_3, A_4, drei Kurbelwinkeln und zwei Abstands-Verhältnissen. Folglich können zwei von den acht Gröfsen willkürlich gewählt werden. Wenn dies zunächst zwei Kurbelwinkel sind, so liefert die Gleichung (30) die beiden andern. Dann gestaltet sich die Berechnung wie folgt.

Aus den Gleichungen (18), (19), (20) folgt:

$$A_3 A_4 (l_3 - l_4) \sin\gamma = A_1 A_2 (l_1 - l_2) \sin\alpha. \tag{42}$$

Vereinigt man diese Gleichung mit (34), so erhält man:

$$\frac{(l_3 - l_4)\sin\gamma}{\sin\frac{3}{2}\gamma \sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{(l_1 - l_2)\sin\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{43}$$

woraus folgt:

$$\frac{l_3 - l_4}{l_1 - l_2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3}{2}\alpha} : \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{3}{2}\gamma}, \tag{44}$$

Analog erhält man:

$$\frac{l_3 - l_2}{l_1 - l_4} = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\delta} : \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\beta}, \tag{45}$$

$$\frac{l_4 - l_2}{l_1 - l_3} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{3}{2}(\alpha+\beta)} : \frac{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}{\sin\frac{3}{2}(\alpha+\delta)}. \tag{46}$$

Hiernach sind die Abstandsverhältnisse durch die Kurbelwinkel bestimmt.

Im Fall der praktisch wünschenswerten, symmetrischen Anordnung der vier Cylinder ist $l_1 - l_4 = l_3 - l_2$ und $l_1 - l_3 = l_4 - l_2$ zu setzen, wodurch man aus (45) erhält:

$$\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\delta} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{3}{2}\beta}. \tag{47}$$

Dafs diese Geichung für $\beta = \delta$ erfüllt wird, ist selbstverständlich. Dafs sie in praktisch möglichen Fällen nur für $\beta = \delta$ erfüllt werden kann, läfst sich leicht beweisen. Doch übergehe ich, der Kürze wegen, diesen Beweis. Ist aber $\beta = \delta$, so wird aus (30) die Schlick'sche Gleichung:

$$2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 1. \tag{48}$$

Setzt man nun die Entfernung $l_1 - l_2$ der beiden äufseren Cylinder gleich L, die der beiden inneren, $l_3 - l_4$, gleich l, so erhält man man aus (15):

$$\frac{(L+l)^2}{4Ll} = \frac{\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

oder, da $\beta = 180 - \frac{\alpha+\gamma}{2}$ ist,

$$\frac{(L+l)^2}{4Ll} = \frac{\sin^2\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin\alpha\sin\gamma} \tag{49}$$

Die Gleichungen (48) und (49) ermöglichen es, α und γ aus dem Verhältnis $\frac{L}{l}$, das als gegeben vorausgesetzt werden soll, zu berechnen. Man erhält:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\sqrt{L^4 + 14\,L^2l^2 + l^4} + (L^2 - l^2)}{8}} \tag{50}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\sqrt{L^4 + 14\,L^2l^2 + l^4} - (L^2 - l^2)}{8}}. \tag{51}$$

Hierdurch sind γ und α, und dadurch auch $\beta = \delta$ aus dem Verhältnis von L zu l berechenbar.

In unserm speziellen Falle der Symmetrie der vier Maschinencylinder-Stellungen mufs auch $A_1 = A_2 = A$ und $A_3 = A_4 = C$ sein. Es gelingt denn auch leicht, das Verhältnis von C zu A durch L und l vermittelst der in § 5 entwickelten Formeln auszudrücken. Man erhält:

$$\frac{C}{A} = \frac{\sqrt{L^4 + 14\,L^2l^2 + l^4} - (L^2 - l^2)}{4\,l^2}. \tag{52}$$

Will man, dafs $\frac{C}{A}$ recht nahe an 1 liegt, so mufs man, wie aus (52) hervorgeht, auch das Verhältnis $\frac{L}{l}$ recht nahe an 1 annehmen, d. h. die beiden inneren Cylinder, soweit es praktisch zulässig ist, entfernt von einander bauen. Wählt man gleiche Abstände der vier Cylinder, also 1 zu 1 zu 1, so erhält man $\frac{C}{A} = 1{,}61$. Wählt man aber das Abstands-Verhältnis 1 zu 3 zu 1, so wird $\frac{C}{A}$ schon erheblich kleiner, nämlich 1,28.

§ 7. Dauernde Aufhebung der Vibrationen bei einer fünfcylindrigen Maschine.

Wenn $n = 5$ ist, so lassen sich die in § 2 abgeleiteten acht fundamentalen Gleichungen erfüllen, wenn zweimal zwei Kurbelrichtungen parallel sind und mit der fünften Kurbelrichtung Winkel von 120 Grad bilden.[1]) Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dafs die Kurbel 1 diejenige ist, deren Richtung mit keiner andern parallel ist, dafs ferner die Kurbeln 2 und 3, sowie auch 4 und 5 gleiche Richtungen haben. Demgemäfs setzen wir:

$$a_1 = 0^0,\ a_2 = a_3 = 120^0,\ a_4 = a_5 = 240^0.$$

Diese Winkelwerte führen wir in die acht Gleichungen (6) bis (13) ein, indem wir $n = 5$ und $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5$ voraussetzen. Dann erhalten wir aus (6) und (8) übereinstimmend:

$$A_2 + A_3 = A_4 + A_5, \tag{53}$$

ferner aus (7) und (9):

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(A_2 + A_3) + \tfrac{1}{2}(A_4 + A_5) \tag{54}$$

Ebenso folgt aus den vier übrigen Gleichungen:

$$A_2 l_2 + A_3 l_3 = A_4 l_4 + A_5 l_5, \tag{55}$$

$$A_1 l_1 = \tfrac{1}{2}(A_2 l_2 + A_3 l_3) + \tfrac{1}{2}(A_4 l_4 + A_5 l_5). \tag{56}$$

Diese vier Gleichungen sagen dasselbe aus, wie die beiden folgenden Doppelgleichungen:

$$A_1 = A_2 + A_3 = A_4 + A_5, \tag{57}$$

$$A_1 l_1 = A_2 l_2 + A_3 l_3 = A_4 l_4 + A_5 l_5. \tag{58}$$

1) Dafs dieses die einzige Lösung des Systems der acht Gleichungen ist, dafs es also unmöglich ist, die acht Gleichungen zu erfüllen, wenn die Kurbelrichtungen andere Winkel, als die hier angegebenen bilden, werde ich in einer ausführlicheren Abhandlung beweisen.

Multipliziert man nun (57) mit l_1 und subtrahiert dann von (58), so erhält man:

$$(59)\quad 0 = A_2(l_2 - l_1) + A_3(l_3 - l_1) = A_4(l_4 - l_1) + A_5(l_5 - l_1),$$

woraus folgt:

$$(60)\qquad \frac{A_2}{A_3} = \frac{l_1 - l_3}{l_2 - l_1} \text{ und } \frac{A_4}{A_5} = \frac{l_1 - l_5}{l_4 - l_1}.$$

Auch jedes andere Verhältnis der fünf Gröfsen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ergiebt sich jetzt gleich einem Abstands-Verhältnis. Die Stellung der fünf Cylinder ist also willkürlich, nur mufs 1 zwischen 2 und 3 und auch zwischen 4 und 5 liegen. Wenn insbesondere alle vier Abstände gleich sind, so erhält man:

$$\tfrac{1}{2} \cdot A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5.$$

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1897/98.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. J. Schröder.)

Versammlung am 13. Februar 1897.

Herr Oberlehrer Dr. Banning wird als einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Prof. Dr. Schubert berichtet über die Einrichtung der von ihm herausgegebenen „fünfstelligen Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen". — Herr F. Bertheau trägt vor über das Machsche Werk: „Die Prinzipien der Wärmelehre, historisch-kritisch entwickelt".

Hauptversammlung am 1. März 1897.

Vor Eintritt in die Tagesordnung gedenkt der Jahrverwalter, Herr J. H. Sieveking, mit ehrenden Worten des am 19. Februar 1897 verschiedenen Ehrenmitgliedes der Gesellschaft, Geh. Reg.-Rats Prof. Dr. Weierstrafs. Herr Prof. Dr. Schubert hält dem grofsen Forscher und Gelehrten einen warm empfundenen Nachruf. Die Gesellschaft ehrt das Andenken des Verstorbenen durch Erheben von den Sitzen. — Die Herren Oberlehrer Haassengier, Baumeister Löwer und Baumeister Bensberg werden als einheimische Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen. — Der Jahrverwalter erstattet den Jahresbericht über das 207. Gesellschaftsjahr. Die Gesellschaft besteht zur Zeit aus 12 Ehrenmitgliedern, 49 einheimischen und 17 auswärtigen Mitgliedern. — Der Jahrverwalter giebt ebenfa[illegible]

den Kassenbericht, zu welchem Herr Prof. Ahlborn als Revisor erwählt wird. — Bei der satzungsmäfsig vorzunehmenden Wahl eines Jahrverwalters wird Herr Dr. J. A. Repsold auf drei Jahre gewählt. Der Vorstand besteht demnach im folgenden Jahre aus den Herren Dr. J. A. Repsold, Jahrverwalter, Dr. F. Bohnert, Mitjahrverwalter und Dr. J. Schröder, Adjunkt. — Nach der Hauptversammlung findet das übliche Stiftungsfestessen statt, an welchem sich auch mehrere Freunde der Gesellschaft beteiligen.

Versammlung am 10. April 1897.

Herr J. Blater (Baden-Baden) wird als auswärtiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Dr. Schröder berichtet über einige Publikationen des Herrn Blater, insbesondere über seine „Tafel der Viertelquadrate von 1 bis 200 000". — Herr Prof. Dr. Schubert legt den Dispositionsplan für Bd. I—III der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen" vor. — Herr Wasserbaudirektor Nehls trägt vor über: „Komplexe Kurven". An den Vortrag schliefst sich eine längere Diskussion an.

Versammlung am 8. Mai 1897.

Die Herren Oberingenieur Meyer, Direktor Hadenfeldt, Dr. Ludendorff werden als einheimische Mitglieder in die Gesellsellschaft aufgenommen. — Herr C. F. Steinhaus trägt vor über: „Spannungen in den Längsverbänden eiserner Schiffe". — Herr Dr. Schröder berichtet über die in diesem Jahre von der Königl.-Dänischen Akademie der Wissenschaften in französischer Sprache wieder herausgegebene, eine vollständige Theorie der komplexen Gröfsen enthaltende Arbeit von Kaspar Wessel aus dem Jahre 1797 „Über die analytische Darstellung der Richtung".

Versammlung am 12. Juni 1897.

Herr Dr. Jaerisch trägt vor über das „Problem der Reflexion und Brechung des Lichts und seine strenge Lösung durch Kugelschwingungen". — Dann sprechen die Herren Dr. Schröder und Dr. Köpcke im Anschlufs an die in der Aprilsitzung stattgehabte Diskussion über die „Darstellung des Komplexen".

Versammlung am 11. September 1897.

Der Jahrverwalter macht Mitteilung von dem Ableben des langjährigen Mitgliedes der Gesellschaft, Herrn Wasserbaudirektor

Chr. Nehls und gedenkt des Verblichenen mit warmen Worten. Die Versammlung erhebt sich zu Ehren des Verstorbenen von den Sitzen. — Herr Prof. Dr. Hoppe spricht über: „Die Anwendung der Lorentz'schen elektromagnetischen Theorie auf optische Erscheinungen“ (vgl. die in diesem Hefte veröffentlichte Mitteilung des Vortragenden).

Versammlung am 9. Oktober 1897.

Herr Ingenieur von Essen demonstriert an einem vor drei Jahren von Herrn Konsul Schlick konstruierten Apparat, der aus einer den Schiffskörper ersetzenden Planke besteht, die an zweimal zehn, den Auftrieb des Wassers ersetzenden Schraubenfedern hängt, „die bei den verschiedenen Arten von Schiffen mit 1 bis 4 Cylindern auftretenden mehr oder weniger starken Durchbiegungen und Vibrationen“. — Herr Prof. Dr. Schubert knüpft an diese Demonstrationen seinen angekündigten Vortrag über „Aufhebung der Schiffsvibrationen durch ein System von n Cylindern“ (vgl. die Arbeit des Vortragenden in diesem Hefte der „Mitteilungen“).

Versammlung am 11. Dezember 1897.

Vor Eintritt in die Tagesordnung zeigt der Jahrverwalter den Tod des Geh. Reg.-Rats Prof. Dr. E. Schering in Göttingen an. Herr Prof. Dr. Hoppe giebt einen kurzen Abrifs des Lebens und der wissenschaftlichen Thätigkeit des Verstorbenen, zu dessen Ehren sich die Versammlung von den Sitzen erhebt. — Herr Direktor Prof. Dr. Thaer trägt vor über „Eine Mitteilung zum Eulerschen Lehrsatz im vierdimensionalen Raum“. — Herr Dr. Busche spricht über einen „anzahlarithmetischen Satz und einige Anwendungen dieses Satzes“ (s. die Arbeit des Vortragenden im vorliegenden Hefte).

Versammlung am 8. Januar 1898.

Die Gesellschaft beschliefst, dafs das von der Gesellschaft zu erwählende Mitglied der Redaktionskommission, welches nicht zum Vorstande gehört, fortan auf drei Jahre gewählt werden soll. Für das Geschäftsjahr 1898/99 bleibt es demnach Herr Dr. Busche, welcher schon während der beiden letzten Jahre Mitglied der Kommission war. Nach Erledigung einer Reihe von geschäftlichen Angelegenheiten trägt Herr Dr. Pund vor über: „Die Anwendung der Theorie der Moduln auf zahlentheoretische und algebraische Fragen“ (s. die Arbeit des Vortragenden in diesem Hefte).

Für die vielen wertvollen Zusendungen, welche die Gesellschaft von einer grofsen Anzahl Autoren, sowie Akademieen, Gesellschaften, Instituten und Vereinen erhielt, mit denen sie in Schriftenaustausch steht, sagt sie an dieser Stelle ihren verbindlichsten Dank.

Zusendungen bittet die Gesellschaft im folgenden Jahre zu richten an die Adresse:

„Mathematische Gesellschaft, Hamburg, Patriotisches Gebäude."

Das Amt des Bibliothekars verwaltet im Geschäftsjahre 1898/99 Herr Oberlehrer Dr. P. Jaerisch.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 9. Ausgegeben im Februar 1899.

Über Abelsche Gruppen und lineare Modulsysteme.

Von Otto Pund in Altona.

Das vollständige Restsystem nach einem ganzzahligen Modul stellt ohne Zweifel, wenn man die Restklassen durch Addition komponiert, das einfachste Beispiel einer Gruppe in der Zahlentheorie dar. Dem gegenüber erfordert das verkürzte Restsystem, das aus allen zum Modul teilerfremden Restklassen besteht, bei Komposition dieser durch Multiplikation als Gruppe betrachtet, zu seiner vollständigen Bewältigung die Kenntnis der Abelschen Gruppen, aber gerade, weil ein verwickelteres Beispiel vorliegt, erweisen sich hier die gruppentheoretischen Betrachtungen fruchtbarer. Trotzdem aber erscheint die Gruppeneigenschaft des vollständigen Restsystems jedenfalls insofern beachtenswert, als sich durch Erweiterung des ganzzahligen Moduls zu einem linearen Modulsystem eine sehr einfache arithmetische Grundlage für die Theorie der Abelschen Gruppen ergiebt. Ein vollständiges Restsystem nach einem aus lauter Linearformen bestehenden Modulsystem ist nicht nur, wie leicht ersichtlich, eine Abelsche Gruppe, wenn man die Restklassen durch Addition verknüpft, sondern es läfst sich auch umgekehrt zu jeder Abelschen Gruppe ein lineares Modulsystem angeben, dessen Restsystem bei Komposition durch Addition eine mit ihr isomorphe Gruppe darstellt. Dieser Zusammenhang läfst auch den innern Grund der von Frobenius und Stickelberger[1]) aufgestellten Beziehung zwischen Abelschen Gruppen und bilinearen Formen klar erkennen.

1) Über Gruppen von vertauschbaren Elementen. Journal für Mathematik Bd. 86.

§ 1.

$A_1, A_2, \ldots A_n$ seien die n vom Einheitselement verschiedenen Elemente einer endlichen Abelschen Gruppe (von der Ordnung $n+1$). Ordnen wir diesen bzw. die Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu und lassen der kommutativen Komposition der Elemente die Addition der Unbestimmten entsprechen, so wird jede Kombination von der Form

$$A_1^{u_1} A_2^{u_2} \ldots A_n^{u_n}$$

mit ganzen positiven oder negativen Zahlen $u_1, u_2, \ldots u_n$ umkehrbar eindeutig auf die Linearform

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_n x_n$$

bezogen. Dem Einheitselement der Abelschen Gruppe, das dadurch charakterisiert ist, daſs die Komposition mit ihm jedes Element der Gruppe ungeändert läſst, entspricht dann eine Linearform mit lauter verschwindenden Koëfficienten. Da aber andererseits unendlich viele Kombinationen existieren, die dem Einheitselement äquivalent sind, so müssen die entsprechenden Linearformen als verschwindend angesehen und können also als Elemente eines Modulsystems betrachtet werden, hinsichtlich dessen die übrigen Linearformen dann als Reste zu reduzieren sind.

Übrigens läſst sich die an und für sich unendliche Menge der dem Einheitselement äquivalenten Kombinationen oder der Null kongruenten Linearformen des Modulsystems leicht auf eine endliche einschränken. Sind nämlich $a_1, a_2, \ldots a_n$ bezw. die Ordnungszahlen von $A_1, A_2, \ldots A_n$, d. h. die kleinsten positiven ganzen Zahlen, für die $A_1^{a_1}, A_2^{a_2}, \ldots A_n^{a_n}$ dem Einheitselement gleich werden, so kann man sich auf solche Kombinationen

$$A_1^{a_{i1}} A_2^{a_{i2}} \ldots A_n^{a_{in}} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots$$

beschränken, für die

$$0 \leqq a_{i1} \leqq a_1, \quad 0 \leqq a_{i2} < a_2, \quad \ldots . 0 \leqq a_{in} \leqq a_n$$

ist, die man leicht alle aufstellen kann, wenn man das Element kennt, das durch Komposition zweier beliebiger Elemente der Abelschen Gruppe hervorgeht. Jeder solchen Kombination entspricht nun eine lineare Form; das Modulsystem kann also in der Form

$$(f_1, f_2, \ldots f_m)$$

dargestellt werden, wo

$$f_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots m \\ k = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

ist.

§ 2.

Um nun von diesem Gesichtspunkte aus die Hauptsätze der Abelschen Gruppen zu entwickeln, müssen wir die linearen Modulsysteme einer genaueren Betrachtung unterziehen hinsichtlich ihrer Reduktion. Da die Bezeichnung der Elemente f_i und der Variablen x_k willkürlich gelassen werden darf, so kann man in der Matrix

$$(a_{ik}) \qquad \begin{pmatrix} i=1 \dots m \\ k=1 \dots n \end{pmatrix}$$

Zeilen und Spalten beliebigen Vertauschungen unterwerfen. Die Veränderungen, die man nun noch mit dem Modulsystem unbeschadet der Äquivalenz vornehmen kann, lassen sich darauf zurückführen, dafs man zu irgend einem Element ein ganzzahliges Vielfache eines andern Elementes addiert oder es von ihm subtrahiert, und die hierbei erfolgende Änderung der Matrix besteht darin, dafs die Elemente einer Zeile um Vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Zeile vermehrt oder vermindert werden. Hierbei bleibt der gröfste gemeinschaftliche Teiler aller aus der Matrix zu bildenden Unterdeterminanten derselben Ordnung erhalten. Denn jede Unterdeterminante einer transformierten Matrix läfst sich linear und homogen durch Unterdeterminanten gleicher Ordnung aus der ursprünglichen Matrix darstellen und ist also durch deren gröfsten gemeinschaftlichen Teiler teilbar. Da man aber von der transformierten Matrix durch dieselbe Art der Transformation wieder zur ursprünglichen gelangen kann, so findet auch das Umgekehrte statt, und die gröfsten gemeinschaftlichen Teiler sind also dieselben. Wir bezeichnen die gröfsten gemeinschaftlichen Teiler aller Unterdeterminanten i^{ter} Ordnung mit d_i; i steigt hierbei von 1 bis zum Rang r der Matrix auf, der jedenfalls die kleinere der beiden Zahlen m und n nicht übertrifft, für gröfsere Werte von i kann man $d_i = 0$ setzen. Die Gröfsen $d_1, d_2, \dots d_r$ sind aber nicht nur Invarianten, sondern sie enthalten alle wesentlichen Eigenschaften des Modulsystems. Wenn man nämlich noch eine Transformation der Unbestimmten zuläfst, derart, dafs das aus ihnen gebildete Modulsystem in seiner Äquivalenz erhalten wird, d. h. also dafs das ursprüngliche System der Unbestimmten $(x_1, \dots, x_n)$ und das transformierte $(x_1', \dots, x_n')$ durch eine unimodulare lineare Transformation zusammen hängen, so läfst sich das Modulsystem schliefslich soweit reduzieren, dafs es nur noch von den Invarianten abhängig ist. Dafs diese auch dabei noch ihre Rolle beibehalten, ist leicht daraus zu erkennen, dafs die nun zulässige Änderung einer Variabeln um ein positives oder negatives ganzes Vielfache einer andern einer Vermehrung oder Verminderung der Elemente einer

Spalte um Vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Spalte zur Folge hat.

Mit Hülfe der besprochenen Transformationen kann man nun unter Zugrundelegung irgend eines Elementes a_{ik} jedes mit diesem in derselben Zeile gelegene a_{ih} durch $a_{ih} + a_{ik}u$, in derselben Spalte gelegene a_{gk} durch $a_{gk} + a_{ik}v$ und jedes beliebige andere a_{gh} durch $a_{gh} + a_{gk}u + a_{ih}v + a_{ik}uv$ ersetzen, wo u und v beliebige ganze Zahlen sind. Über diese kann man zunächst so verfügen, dafs alle mit a_{ik} in derselben Zeile oder Spalte gelegenen Elemente durch ihre kleinsten Reste mod a_{ik} ersetzt werden. Nehmen wir nun an, dafs a_{ik} nicht nur das kleinste von Null verschiedene Element der Matrix, sondern dafs es auch unmöglich sei, durch Transformation ein noch kleineres aber von Null verschiedenes Element zu erzeugen, so folgt hieraus, dafs alle mit a_{ik} in derselben Zeile oder Spalte gelegenen Elemente durch a_{ik} teilbar sein müssen und daher zum Verschwinden gebracht werden können. Wenn aber a_{ih} und a_{gk} durch a_{ik} teilbar sind, so kann man aber — wenn man über u und v anders verfügt — $a_{gh} + a_{gk}\ u + a_{ih}\ v + a_{ik}uv$ absolut kleiner als a_{ik} machen, und daraus folgt dann, dafs auch a_{gh} durch a_{ik} teilbar sein mufs. Bringt man nun durch Vertauschung das Element a_{ik} in die erste Zeile und Spalte und bezeichnet es demgemäfs mit a'_{11}, so finden sich in diesen beiden Reihen aufser a'_{11} nur noch lauter Nullen vor, und die übrigen Reihen bilden eine kleine Matrix, deren sämtliche Elemente durch a'_{11} teilbar sind, und mit der man ebenso verfahren kann, wie mit der ursprünglichen, ohne dafs hierbei auf die ausgesonderte erste Zeile und Spalte ein Einflufs ausgeübt wird. Man kann es daher erreichen, dafs in der zuletzt erhaltenen Matrix nur in der Diagonale von Null verschiedene Elemente vorhanden sind, von denen jedes folgende durch das vorhergehende teilbar ist.[1]) Ist r der Rang der Matrix (a_{ik}), so enthält sie r von Null verschiedene Diagonalelemente $a'_{11}, a'_{22}, \ldots a'_{rr}$ und für die Invarianten d_i ergiebt sich

$$a'_{11}\, a'_{22} \ldots a'_{ii} = d_i \quad (i = 1 \ldots r)$$

sodafs

$$a'_{11} = d_1, \quad a'_{22} = \frac{d_2}{d_1}, \quad \ldots \quad a'_{rr} = \frac{d_r}{d_{r-1}}$$

ist. Das Modulsystem $(f_1, f_2, \ldots f_m)$ ist hierdurch auf das äquivalente

$$\left(d_1 x'_1,\ \frac{d_2}{d_1}\, x'_2,\ \ldots\ \frac{d_r}{d_{r-1}}\, x'_r\right)$$

1) Diese Reduktionsmethode rührt von Kronecker her. Journal für Mathematik. Bd. 107 S. 135—136.

reduziert. Um nach diesem das vollständige Restsystem aufzustellen, hat man in der Linearform

$$u_1' x_1' + u_2' x_2' + \cdots t u_r' x_r'$$

die Koëffizienten u_1', u_2', ... u_r' vollständige Restsysteme nach den Moduln d_1, $\frac{d_2}{d_1}$, ... $\frac{d_r}{d_{r-1}}$ durchlaufen zu lassen. Ersetzt man hierin x_1', x_2', ... x_r' durch ihre linearen und homogenen Werte in den x_1, x_2, ... x_n, so hat man auch ein vollständiges Restsystem nach dem Modulsystem $(f_1, f_2, \ldots f_m)$.

§ 3.

Die Anwendung der vorhergehenden Betrachtungen, die eine vollständige Theorie der linearen Kongruenzen enthalten und mit denen sich auch die Modulsysteme zweiter Stufe einfach behandeln lassen, auf die Theorie der Abelschen Gruppen ist nun nicht schwierig. Nehmen wir der gröfseren Allgemeinheit wegen an, dafs von den Gröfsen d_1, $\frac{d_2}{d_1}$, $\cdots \frac{d_r}{d_{r-1}}$ die s ersten den Wert 1 haben, während $\frac{d_{s+1}}{d_s}$ und somit auch die folgenden gröfser sind, und lassen dann den Unbestimmten x_s', x_{s+1}', ... x_r' Elemente B_1, B_2, .., B_{r-s} entsprechen, die mit den ursprünglichen Elementen A_1, A_2, ... A_n der in § 1 betrachteten Abelschen Gruppe in einem leicht erkennbaren Zusammenhang stehen, so ergiebt sich die Darstellung der Gruppe durch ein Fundamentalsystem oder eine Basis in der Form

$$B_1^{\beta_1} B_2^{\beta_2} \ldots B_{r-s}^{\beta_{r-s}}$$

wo β_1, β_2, ... β_{r-s} vollständige Restsysteme bezw. nach den Moduln $b_1 = \frac{d_{s+1}}{d_s}$, $b_2 = \frac{d_{s+2}}{d_{s+1}}$, $\cdots$ $b_{r-s} = \frac{d_r}{d_{r-1}}$ durchlaufen. Eine solche Darstellung durch Elemente, deren Ordnungszahlen sich in eine Reihe anordnen lassen, sodafs jede folgende durch die vorangehende teilbar ist, ist nur auf eine einzige Weise möglich. Aber eine Darstellung durch ein Fundamentalsystem überhaupt kann im allgemeinen in verschiedener Weise erfolgen. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich hierüber folgender allgemeine Satz:

Die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dafs die durch die beiden Fundamentalsysteme $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ und $(B_1, B_2, \ldots B_m)$ dargestellten Abelschen Gruppen isomorph sind, lassen sich, wenn die Ordnungszahlen von A_i und B_i mit a_i resp. b_i bezeichnet werden, durch die Gleichungen

$$S_{n-i}(a_1, a_2, \ldots a_n) = S_{m-i}(b_1, b_2, \ldots b_m) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

ausdrücken. Hier sind durch die Symbole S gewisse aus den Ordnungszahlen gebildete Modulsysteme bezeichnet, die in meiner Note „Über einige Relationen zwischen Modulsystemen" in dem vorigen Heft dieser Mitteilungen definiert sind, und denen für verschwindende oder negative Indices der Wert 1 erteilt werden muſs.

Altona, Dezember 1898.

Ein Satz über Funktionen mit Oscillationen in jedem Intervall.

Von Alfred Köpcke in Ottensen.

Wenn eine stetige Funktion in jedem beliebigen Intervall Maxima und Minima besitzt, wäre es immerhin denkbar, daſs diese Maxima und Minima eine Art der Wertabstufung zeigen könnten, bei der die Funktion in jedem Intervalle Werte, die sie überhaupt annimmt, immer nur endlich oft annimmt — oder geometrisch ausgedrückt: bei der jede Parallele zur Abscissenachse die Funktion nur in endlich vielen Punkten schneidet. Es soll gezeigt werden, daſs eine so flachstufig treppenartige Anordnung der Oscillationen, wie sie hierfür erforderlich wäre, unmöglich ist, daſs vielmehr der folgende Satz gilt:

„Eine Funktion mit Oscillationen in jedem Intervall nimmt in jedem Intervall mindestens einen Wert unendlich oft an."

Beweis. $y = f(x)$ sei eine stetige Funktion, die Oscillationen in jedem beliebigen Intervalle zeigt. Man wähle zunächst eine beliebige Funktionalstrecke und dann innerhalb derselben den gröſsten und den kleinsten Wert der Funktion; zur Befestigung der Vorstellung wollen wir annehmen, daſs die Funktion bei wachsendem x den kleinsten Wert früher erreicht als den gröſsten, was sich andernfalls durch Umkehrung der x-Achse erreichen läſst. Man wähle dann einen Wert y_1, der zwischen jenem kleinsten und gröſsten Funktionswerte liegt, und schneide die Funktionalstrecke mit der Linie $Z = y_1$; dann müssen sich unter den Schnittpunkten auch Punkte finden, die nicht Maxima oder Minima für die Funktion sind, und zwar muſs es $2n + 1$ solche Punkte geben: im ersten x_1 steigt, im zweiten x_1 fällt die Funktion u. s. w. Wie hier, so wollen wir von jetzt an überall, wo wir im Laufe des Beweises sagen, daſs eine Gerade die Funktion in einer Anzahl von Punkten schneidet, nur solche Punkte zählen, die nicht Maxima oder Minima sind. Man bestimme nun zu allen x_k, in denen die Funktion steigt, ein ε_k so, daſs für alle x zwischen x_k und $x_k + \varepsilon_k$ die Differenz $f(x) - f(x_k)$ positiv bleibt. In jedem

solchen Intervall hat die Funktion einen gröfsten Wert — ihr kleinster Wert liegt in x_k; es sei nun das Intervall x_i bis $x_i + \varepsilon_i$ dasjenige mit dem geringsten Unterschiede zwischen dem kleinsten und gröfsten Werte, und zwar sei y_M bei x_M dieser gröfste Wert. Zwischen x_i und x_M wähle man nun ein bei x_h liegendes Maximum y_h; dann kann man weiter ε_h so bestimmen, dafs für alle x zwischen x_h und $x_h + \varepsilon_h$ die Differenz $f(x) - f(x_h)$ negativ bleibt, und kann in diesem selben Intervall von x_h bis $x_h + \varepsilon_h$ ein bei x_l liegendes Minimum y_l wählen. Wenn dann y_2 der Bedingung $y_l < y_2 < y_h$ genügt, stimmt $Z = y_2$ in mindestens 3 Punkten mit der Funktionalstrecke zwischen x_i und $x_i + \varepsilon_i$ überein, alle andern Strecken zwischen x_k und $x_k + \varepsilon_k$, sowie die Strecken zwischen $x_k + \varepsilon_k$ und $\overline{x_k}$ werden aber von $Z = y_2$ in mindestens einem Punkte geschnitten, weil in ihnen die gröfsten Werte von $f(x)$ gröfser sind als y_M (zwischen $\overline{x_k}$ und x_{k+1} liegt dagegen kein Schnitt). Ist nun $r > 1$ beliebig gewählt, so kann man die kleinste Potenz ν von $\frac{1}{r}$ suchen, von der mindestens ein Vielfaches, zu y_1 addiert, zwischen y_l und y_h liegt, und unter diesen Vielfachen das kleinste a wählen, so genügt $y_1 + a\left(\frac{1}{r}\right)^\nu = y_2$ der Bedingung für y_2.

Hiernach giebt es immer solche Werte $y_2 = y_1 + a\left(\frac{1}{r}\right)^\nu$, dafs $Z = y_2$ die ganze Funktionalstrecke in mehr als $2n+1$ Punkten schneidet, und zwar so, dafs zwischen x_k und $\overline{x_k}$ $(k \gtrless i)$ mindestens zwei Werte $x_k^{(1)} < \bar{x}_k^{(1)}$, zwischen x_i und $\overline{x_i}$ aber mindestens 4 Werte $x_i^{(1)} < \overline{x_r} < x_r < \bar{x}_i^{(1)}$, liegen. Man kann daher kürzer gleich verlangen: suche diejenigen kleinsten Werte von ν_1 und a_1, damit $Z = y_2 = y_1 + a_1\left(\frac{1}{r}\right)^{\nu_1}$ jede Strecke zwischen x_k und $\overline{x_k}$ in mindestens zwei Punkten, mindestens eine Strecke aber in 4 Punkten schneidet. Wenn dann $Z = y_2$ thatsächlich in $2m+1 > 2n+1$ Punkten schneidet, so zähle man jeden Punkt, welcher der nächstgröfsere als x_k ist, auch als $k$ten Punkt, in dem die Funktion steigt, womit man $n+1$ Punktfolgen hat: $x_k < x_k^{(1)}$; aufserdem treten neu hinzu die m—n Punkte

$$x_{n+2} < x_{n+3} < \cdots\cdots < x_{m+1},$$

in denen die Funktion ebenfalls steigt. Zwischen je zweien dieser $m+1$ Punkte: $x_1^{(1)} \cdots x_{n+1}^{(1)}\, x_{n+2} \cdots x_{m+1}$ liegt ein Punkt $\overline{x_\varrho}$, in dem die Funktion fällt; diese m Punkte numerieren wir (abweichend von der Numerierung der $m+1$ Steigepunkte) der Gröfse nach:

$$\bar{x}_1^{(1)} < \bar{x}_2^{(1)} < \cdots\cdots \bar{x}_m^{(1)}.$$

Nun bestimme man wieder in $y_3 = y_2 + a_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu_2}$ das kleinste ν_2 und kleinste a_2, so daſs $Z = y_3$ jede Strecke zwischen $x_p^{(1)}$ oder x_p aus der Reihe der Steigepunkte und dem folgenden Senkungspunkte $\bar{x}_\varrho^{(1)}$ in mindestens 2 Punkten, mindestens eine Strecke aber in 4 Punkten schneidet, so daſs man nun $m' + 1$ Steigepunkte hat: $x_1^{(2)} \cdots x_{n+1}^{(2)}$ $x_{n+2}^{(1)} \cdots x_{m+1}^{(1)}\, x_{m+2} \cdots x_{m'+1}$ und dazwischen die Senkungspunkte: $\bar{x}_1^{(2)} < \bar{x}_2^{(2)} < \cdots \bar{x}_{m'}^{(2)}$. So läſst sich ins Unendliche fortfahren (wenn nicht für irgend ein y_n bereits unendlich viele Schnittpunkte auftreten).

Die damit eindeutig definierten Gröſsen $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots$ müssen eine endliche obere Grenze haben, da keine von ihnen gröſser sein kann, als der gröſste Funktionalwert. Ebenso hat jede Gröſsenfolge: $x_k < x_k^{(1)} < x_k^{(2)} \cdots$ eine obere Grenze ξ_k, denn keine dieser Gröſsen kann gröſser sein als eines der folgenden $\bar{x}_\varrho^{(i)}$. Dabei sind die so definierten ξ_k alle von einander verschieden; denn wenn zu $Z = y_\mu$ sowohl $x_n^{(i)}$ wie auch $x_m^{(i')}$ gehört, muſs zwischen diesen 2 Werten mindestens ein $\bar{x}_\varrho^{(\mu-1)}$ liegen und, je nachdem

$$x_n^{(i)} \lessgtr \bar{x}_\varrho^{(\mu-1)} \lessgtr x_m^{(i')}$$

ist, muſs entweder sein:

$$\xi_n < \bar{x}_\varrho^{(\mu-1)} < x_m^{(i')} < \xi_m$$

oder:

$$\xi_m < \bar{x}_\varrho^{(\mu-1)} < x_n^{(i)} < \xi_n.$$

$Z = \eta$ stimmt nun für alle $x = \xi_k$ mit der Funktion $f(x)$ überein. Denn wenn man ξ_k so bestimmt, daſs für alle x zwischen ξ_k und $\xi_k - \xi_k$ die absolute Differenz $| f(x) - f(\xi_k) |$ kleiner als ein beliebig klein gewähltes δ bleibt, so müſsten, wenn $f(\xi_k) = \eta + \alpha$ wäre, alle Funktionswerte in jenem Intervall zwischen $\eta + \alpha - \delta$ und $\eta + \alpha + \delta$ liegen; nun giebt es aber in diesem Intervall nach den Definitionen von ξ_k und η Werte $x_k^{(i)}$, für die $f(x)$ zwischen $\eta - \delta$ und η liegt — bei beliebig kleinem δ ist das nur möglich, wenn $\alpha = 0$ gilt. Da es unendlich viele ξ_k giebt, nimmt also in dem ursprünglich gewählten Intervall $f(x)$ den Wert $\eta = y_1 + a_1 \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu_1} + a_2 \left(\frac{1}{r}\right)^{\nu_2} + \cdots$ unendlich oft an.

Den so mit allerdings durchweg bekannten Hülfsmitteln bewiesenen Satz habe ich bereits in einer Abhandlung „Über Differentiierbarkeit

und Anschaulichkeit der stetigen Funktionen“ (Math. Ann. Bd. 29 S. 137) benutzt zu der Behauptung: „das Integral einer beliebigen stetigen Funktion mit Maximis in jedem Intervall hat diese stetige Funktion zum Differentialquotienten und mufs dann in jedem Intervall unendlich oft dieselbe Tangente haben, ist daher nicht anschaulich“ (besser: „unendlich viele mit einander parallele Tangenten ...“). Den schon damals fertig vorliegenden Beweis nach so langer Zeit noch zu veröffentlichen, veranlafst mich namentlich der Wunsch, die citierte Folgerung, dafs es durchweg differentiierbare stetige Funktionen mit nachweisbar unanschaulichen Eigenschaften giebt, durch Hinzufügung der ausführlichen Begründung vielleicht deutlicher und bekannter zu machen.

Eine Bemerkung über Binomialkoëfficienten.

Von E. Busche in Bergedorf.

Der Binomialkoëfficient $\binom{n}{k}$ ist für $k > 1$ gleich dem symbolischen Ausdruck

$$\left\{\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right\} = \left\{\frac{(n-s_1)(n-s_1-1)(n-s_1-2)\cdots(n-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(k-1)}\right\}_n,$$

wo nach Ausführung der Multiplikation im Zähler jede Potenz s_1^i durch

$$s_i = \sum_{x=1}^{n} x^i$$

zu ersetzen und jedes von s_1 freie Glied mit n zu multiplizieren ist.

So ist z. B.

$$\left\{\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right\} = n^2 - s_1 = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2},$$

$$\left\{\begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix}\right\} = \left\{\frac{(n-s_1)^3 - 3(n-s_1)^2 + 2(n-s_1)}{1\cdot 2\cdot 3}\right\}_n$$

$$= \frac{n^4 - 3n^3 s_1 + 3n s_2 - s_3 - 3n^3 + 6n s_1 - 3 s_2 + 2n^2 - 2 s_1}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

Setzt man hier $n = 5$, so ist $s_1 = 15$, $s_2 = 55$, $s_3 = 225$, also

$$\left\{\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}\right\} = \frac{625 - 1125 + 825 - 225 - 375 + 450 - 165 + 50 - 30}{6} = \frac{1950 - 1920}{6} = 5 = \binom{5}{4}.$$

Für $k < 0$, $k = 0$ und $k = 1$ ist der symbolische Ausdruck noch nicht definiert; er möge bezw. gleich 0, 1 und n gesetzt werden.

Den Beweis des Satzes führe ich durch den Schluſs von n auf $n+1$. Für $n=1$ gilt der Satz bei jedem k, da in diesem Falle $s_i = 1$ ist für jedes i und deshalb der symbolische Ausdruck für $k > 1$ verschwindet, so daſs

$$\left\{\begin{matrix}1\\k\end{matrix}\right\} = \binom{1}{k}$$

ist. Es werde nun angenommen, daſs der Satz richtig wäre für einen beliebigen positiven ganzzahligen Wert von n. Dann ist für $k > 1$

$$\left\{\begin{matrix}n\\k-1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right\} = \left\{\frac{(n+1-s_1)(n+1-s_1-1)\cdots(n+1-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)}\right\}_n.$$

Es ist nämlich (nicht symbolisch)

$$\frac{(n-s_1)(n-s_1-1)\cdots(n-s_1-k+3)}{1\cdot 2\cdots(k-2)} + \frac{(n-s_1)(n-s_1-1)\cdots(n-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)}$$
$$= \frac{(n+1-s_1)(n+1-s_1-1)\cdot\cdots\cdot(n+1-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)}$$

oder

$$\frac{(n-s_1)^{k-2} + A_{k-3}(n-s_1)^{k-3} + A_{k-4}(n-s_1)^{k-4} + \cdots + A_1(n-s_1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-2)}$$
$$+ \frac{(n-s_1)^{k-1} + B_{k-2}(n-s_1)^{k-2} + B_{k-3}(n-s_1)^{k-3} + \cdots + B_1(n-s)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)}$$
$$= \frac{(n+1-s_1)^{k-1} + B_{k-2}(n+1-s_1)^{k-2} + B_{k-3}(n+1-s_1)^{k-3} + \cdots + B_1(n-s_1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)},$$

wo die Zahlen A und B nur von k abhängen. Diese identische Gleichung bleibt aber auch richtig, wenn man auf beiden Seiten die durch die angegebene Symbolik erforderlichen Veränderungen vornimmt. Es ist jetzt noch nachzuweisen, daſs

$$\left\{\frac{(n+1-s_1)(n+1-s_1-1)\cdots(n+1-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)}\right\}_n$$
$$= \left\{\frac{(n+1-S_1)(n+1-S_1-1)\cdots(n+1-S_1-k+2)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)}\right\}_{n+1} = \left\{\begin{matrix}n+1\\k\end{matrix}\right\}$$

ist, wo $S_i = \sum_1^{n+1} x^i$ statt S_1^i zu setzen und die von S_1 freien Glieder mit $n+1$ zu multiplizieren sind.

Nun ist

$$\left\{(n+1-s_1)^m\right\}_n = (n+1)^m n - \binom{m}{1}(n+1)^{m-1}s_1 + \binom{m}{2}(n+1)^{m-2}s_2 \cdots \pm s_m$$

und

$$\left\{(n+1-S_1)^m\right\}_{n+1}=(n+1)^{m+1}-\binom{m}{1}(n+1)^{m-1}s_1+\binom{m}{2}(n+1)^{m-2}s_2\cdots$$
$$\pm s_m+\left[-\binom{m}{1}+\binom{m}{2}\cdots\pm 1\right](n+1)^m,$$

weil $S_i=s_i+(n+1)^i$ ist. Da die in der eckigen Klammer stehende Summe gleich -1 ist, so ist also

$$\left\{(n+1-S_1)^m\right\}_{n+1}-\left\{(n+1-s_1)^m\right\}_n=(n+1)^{m+1}-(n+1)^m-(n+1)^m n=0.$$

Weil ferner

$$\left\{\frac{(n+1-s_1)(n+1-s_1-1)\cdots(n+1-s_1-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right\}_n$$
$$=\frac{\left\{(n+1-s_1)^{k-1}\right\}_n+B_{k-2}\left\{(n+1-s_1)^{k-2}\right\}_n+\cdots+B_1\left\{(n+1-s_1)\right\}_n}{1\cdot 2\cdots(k-1)}$$

und

$$\left\{\frac{(n+1-S_1)(n+1-S_1-1)\cdots(n+1-S_1-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right\}_{n+1}$$
$$=\frac{\left\{(n+1-S_1)^{k-1}\right\}_{n+1}+B_{k-2}\left\{(n+1-S_1)^{k-2}\right\}_{n+1}+\cdots+B_1\left\{(n+1-S_1)\right\}_{n+1}}{1\cdot 2\cdots(k-1)}$$

ist, und weil nach der soeben bewiesenen Gleichung die rechten Seiten dieser Formeln übereinstimmen, so ist jetzt der Beweis dafür, dafs

$$\left\{{n \atop k-1}\right\}+\left\{{n \atop k}\right\}=\left\{{n+1 \atop k}\right\}$$

ist, geführt, und diese Gleichung gilt offenbar auch für $k\leqq 1$. Aus ihr folgt aber auf Grund des oben für $n=1$ Gesagten die Gleichung

$$\left\{{n \atop k}\right\}=\binom{n}{k}$$

ohne weiteres für jeden ganzzahligen positiven Wert von n; für alle anderen Werte von n gilt sie deshalb nach einer bekannten Schlufsweise ebenfalls. Dabei ist s_i durch die Jac. Bernouillische Potenzreihe zu definieren, wenn n keine ganze positive Zahl ist.

Der Satz, den ich bewiesen habe, scheint mir deshalb bemerkenswert zu sein, weil er zu einer naturgemäfsen Verallgemeinerung des Binomialkoëfficientenbegriffes Veranlassung giebt. Setzt man nämlich, indem man mit μ eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\binom{n}{k}_\mu=\left\{\frac{(n^\mu-s_\mu)(n^\mu-s_\mu-1)\cdots(n^\mu-s_\mu-k+2)}{1\cdot 2\cdots(k-1)}\right\}_n,$$

wo die von s_μ^i oder $s_{\mu i}$ freien Glieder wieder mit n zu multiplizieren sind, so haben die Zahlen, die man so erhält, manche Eigenschaften,

die denen der „Binomialkoëfficienten erster Ordnung“ $\binom{n}{k}_1 = \binom{n}{k}$ entsprechen. So ist beispielsweise, wenn $\binom{n}{1}_\mu = n$ gesetzt wird,

$$\sum_1^{r^\mu} \binom{n}{x}_\mu = \sum_1^n 2^{n^\mu - x^\mu},$$

was für $\mu = 1$ in die bekannte Gleichung

$$\sum_1^n \binom{n}{x} = \sum_1^n 2^{n-x}$$

oder

$$\sum_0^n \binom{n}{x} = 2^n$$

übergeht. Bei gelegentlicher Mitteilung eines allgemeinen Satzes der Differenzenrechnung, der mich zu diesen Betrachtungen geführt hat, eines Satzes, der einerseits die von Herrn Markoff in seinem Buche über Differenzenrechnung*) (S. 101 ff.) behandelte sogenannte partielle Summation, andererseits z. B. die allgemeine Transformationsformel von Dirichlet (Werke, Bd. II, S. 101), sowie die Formel umfafst, die ich im vorigen Heft dieser Mitteilungen veröffentlicht habe, hoffe ich auf diesen Gegenstand etwas ausführlicher zurückkommen zu können.

Bemerkung über die Schubert'sche Funktion $\psi(u_0, u_1, u_2 \dots u_q)$

Von J. Schröder in Hamburg.

Im Bde. 45 der mathematischen Annalen, p. 177 definierte Herr Schubert die für seine anzahlgeometrischen Untersuchungen grundlegende Funktion $\psi(u_0, u_1, u_2 \cdots u_q)$ in folgender Weise**):

$$\psi(u_0) = 2^{u_0};$$

$$\psi(u_0, u_1) = (u_0 + u_1)_{u_0+1} + (u_0 + u_1)_{u_0+2} + \cdots + (u_0 + u_1)_{u_1}$$

$$\psi(u_0, u_1, u_2) = 2^{u_0}\psi(u_1, u_2) - 2^{u_1}\psi(u_0, u_2) + 2^{u_2}\psi(u_0, u_1)$$

$$\psi(u_0, u_1, u_2, u_3) = \psi(u_0, u_1)\psi(u_2, u_3) - \psi(u_0, u_2)\psi(u_1, u_3) + \psi(u_0, u_3)\psi(u_1, u_2)$$

und allgemein, falls $q \equiv 0 \pmod 2$:

---

*) Deutsch von Friesendorff und Prümm. Leipzig 1896.

**) Das Symbol $(m)_p$ bezeichnet den Binomialkoëfficienten: $\frac{m!}{p!\,(m-p)!}$.

$$\psi(u_0, u_1, u_2 \cdots u_q) = \sum_0^q (-1)^i 2^{u_i} \psi(u_0, u_1, \cdots u_{i-1}, u_{i+1} \cdots u_q);$$

falls aber $q \equiv 1 \pmod 2$:

$$\psi(u_0, u_1, u_2 \cdots u_q) = \sum_1^q (-1)^{i-1} \psi(u_0, u_i) \psi(u_1, u_2 \cdots u_{i-1}, u_{i+1} \cdots u_q).$$

Hierbei bedeuten die Argumente $u_0, u_1, \cdots u_q$ positive ganze Zahlen (mit Einschlufs der Null), die so geordnet sind, dafs:

$$u_0 \leqq u_1 \leqq u_2 \cdots \leqq u_q$$

ist.

Sind zwei oder mehrere aufeinander folgende Argumente einander gleich, so hat die Funktion ψ stets den Wert Null.

Von besonderem Interesse ist nun der von Herrn Schubert durch Überlegungen geometrischer Art gewonnene, auf rein arithmetischem Wege indessen bislang noch nicht bewiesene Satz, dafs stets:

$$\psi(0, 1, 2, \cdots n) = 1$$

ist.*) Es ist unsere Absicht, den arithmetischen Beweis dieses Satzes auf den Beweis eines anderen allgemeineren Theorems zurückzuführen.

Wir betrachten die Funktion von zwei Argumenten:

(1) $\cdot \cdot \quad \psi(a, a+n) = (2a+n)_{a+1} + (2a+n)_{a+2} + \cdots + (2a+n)_{a+n}.$

Mit Benutzung des Binomialtheorems:

$$(2a+n)_i = (2a+n)_{2a+n-i}$$

erhält man hierfür, falls $n \equiv 0 \pmod 2$:

$$(2\alpha) \quad \cdot \cdot \quad \psi(a, a+n) = (2a+n)_a + 2\Big[(2a+n)_{a+1} + (2a+n)_{a+2} + \cdots + (2a+n)_{a+\frac{n}{2}-1}\Big] + (2a+n)_{a+\frac{n}{2}}$$

und falls $n \equiv 1 \pmod 2$:

$$(2\beta) \quad \cdot \cdot \quad \psi(a, a+n) = (2a+n)_a + 2\Big[(2a+n)_{a+1} + (2a+n)_{a+2} + \cdots + (2a+n)_{a+\frac{n-1}{2}}\Big]$$

*) Vgl. Mathematische Annalen, Bd. 45 p. 186 Glg. (42).

Die Formel (2α) unterziehen wir nun der folgenden Umgestaltung. Es ist:

$$(2a+n)_i = (2a+n-1)_i + (2a+n-1)_{i-1}.$$

Infolgedessen wird, wie leicht zu sehen ist,

$$(3)\quad \psi(a,a+n) = 2^2(2a+n-1)_{a+\frac{n}{2}-1} + 2^2(2a+n-1)_{a+\frac{n}{2}-2} + \cdots + 2^2(2a+n-1)_{a+1} + (2^2-2_0)(2a+n-1)_a + [2^2-(2_0+2_1)](2a+n-1)_{a-1}.$$

Reduziert man jetzt jedes Glied der rechten Seite von (3) auf die Basis $(2a+n-2)$, so erhält man:

$$\psi(a,a+n) = 2^2(2a+n-2)_{a+\frac{n}{2}-1} + 2^3(2a+n-2)_{a+\frac{n}{2}-2} + \cdots + 2^3(2a+n-2)_{a+1} + (2^3-3_0)(2a+n-2)_a + [2^3-(3_0+3_1)](2a+n-2)_{a-1} + [2^3-(3_0+3_1+3_2)](2a+n-2)_{a-2}.$$

Fährt man in diesem Sinne fort, indem man die Basis immer weiter um je eine Einheit erniedrigt, so ergiebt sich schliefslich:

$$\psi(a,a+n) = (2^n-n_0)(2a+1)_a + [2^n-(n_0+n_1)](2a+1)_{a-1} + \cdots + [2^n-(n_0+n_1+\cdots+n_{n-1})]\cdot(2a+1)_{a-n+1},$$

oder kürzer geschrieben:

$$(4)\quad \psi(a,a+n) = \sum_0^{n-1}{}^{i}\left(2^n - \sum_0^{i}{}^{k} n_k\right)(2a+1)_{a-i}.$$

Dafs diese Relation auch für $n \equiv 1 \pmod 2$ gültig ist, erkennt man durch ganz genau dieselbe Schlufsweise.

Da:

$$2^n - \sum_0^{i}{}^{k} n_k = \sum_0^{i}{}^{k} n_k + \sum_{i+1}^{n}{}^{k} n_k - \sum_0^{i}{}^{k} n_k = \sum_{i+1}^{n}{}^{k} n_k,$$

oder

$$2^n - \sum_0^{i}{}^{k} n_k = \sum_0^{n-i-1}{}^{k} n_k$$

ist, so kann die Gleichung (4) auch folgendermafsen lauten:

$$(4\alpha)\quad \psi(a,a+n) = \sum_0^{n-1}{}^{i}\sum_0^{n-i-1}{}^{k} n_k\cdot(2a+1)_{a-i}.$$

Ganz entsprechend ist:

$$(4\beta)\quad \psi(a,a+n+1) = \sum_0^{n}{}^{i}\sum_0^{n-i}{}^{k}(n+1)_k\cdot(2a+1)_{a-i}.$$

Die den Indexwerten i und $i+1$ entsprechenden Koëfficienten von $(2a+1)_{a-i}$ und $(2a+1)_{a-i-1}$ in der Gleichung (4α) lauten:

$$c_i^{(n)} = \sum_0^{n-i-1} k\, n_k \quad \text{und} \quad c_{i+1}^{(n)} = \sum_0^{n-i-2} k\, n_k.$$

Folglich ist:

$$c_i^{(n)} + c_{i+1}^{(n)} = \sum_0^{n-i-1} k\, n_k + \sum_0^{n-i-2} k\, n_k.$$

Hierfür kann aber geschrieben werden:

$$c_i^{(n)} + c_{i+1}^{(n)} = n_0 + \sum_0^{n-i-2} k\,(n_k + n_{k+1}) = (n+1)_0 + \sum_0^{n-i-2} k\,(n+1)_{k+1},$$

oder

$$(5) \quad \cdots\cdots\cdots \quad c_i^{(n)} + c_{i+1}^{(n)} = \sum_0^{n-i-1} k\,(n+1)_k.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von (5) ist aber gerade der dem Indexwert $(i+1)$ zugehörige Koëfficient von $(2a+1)_{a-i-1}$ in der Gleichung (4β), welchen wir mit $c_{i+1}^{(n+1)}$ zu bezeichnen haben. Folglich besteht für die Koëfficienten der Relationen (4α) und (4β) die dem Binomialtheorem entsprechende Beziehung:

$$(6) \quad \cdots\cdots\cdots \quad c_{i+1}^{(n+1)} = c_i^{(n)} + c_{i+1}^{(n)}.$$

Die sämtlichen sich für $n = 1, 2, 3, 4 \cdots$ ergebenden Koëfficienten $c_i^{(n)}$ können daher in folgender Weise tabellarisch übersichtlich geordnet werden:

	$i=0$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$	$i=8$	$\cdots$
$\psi(a, a+1)$	1									
$\psi(a, a+2)$	3	1								
$\psi(a, a+3)$	7	4	1							
$\psi(a, a+4)$	15	11	5	1						
$\psi(a, a+5)$	31	26	16	6	1					
$\psi(a, a+6)$	63	57	42	22	7	1				
$\psi(a, a+7)$	127	120	99	64	29	8	1			

u. s. f.

Diese Tabelle besagt, dafs z. B.

$$\psi(a, a+6) = 63(2a+1)_a + 57(2a+1)_{a-1} + 42(2a+1)_{a-2} + 22(2a+1)_{a-3} + 7(2a+1)_{a-4} + (2a+1)_{a-5}$$

ist. Ferner sieht man, dafs die in der n^{ten} Horizontale und in der i^{ten} Vertikale stehende Zahl immer gleich der Summe der beiden in der vorangehenden Horizontale stehenden Zahlen ist, welche der i^{ten} und $(i-1)^{\text{ten}}$ Vertikalreihe angehören.

Berechnet man andererseits für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ die Werte der Schubert'schen Funktionen:

$$\psi(0; n);\quad \psi(0, 1; n);\quad \psi(0, 1, 2; n);\quad \cdots\ \psi(0, 1, 2, \cdot\cdot, n-1; n),$$

so erhält man die in folgender Tabelle zusammengestellten Werte:

n	$\psi(0;n)$	$\psi(0,1;n)$	$\psi(0,1,2;n)$	$\psi(0,1,2,3;n)$	$\psi(0,1,2,3,4;n)$	$\psi(0,1,2,3,4,5;n)$
1	1					
2	3	1				
3	7	4	1			
4	15	11	5	1		
5	31	26	16	6	1	
6	63	57	42	22	7	1

Vergleicht man diese Wertetabelle, soweit sie hier wirklich auf Grund numerischer Ausrechnung aufgestellt ist, mit der p. 385 angegebenen Koëfficiententabelle, so zeigt sich, *dafs jeder einzelne Funktionswert der zweiten Tabelle mit dem an der entsprechenden Stelle der ersten Tabelle angegebenen Koëfficienten genau übereinstimmt.* Wir behaupten nun, *dafs diese Übereinstimmung auch weiterhin ganz allgemein gilt, so dafs also:*

$$\text{I} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \psi(0, 1, 2, \cdots \alpha; n) = c_\alpha^{(n)} = \sum_0^{n-\alpha-1} n_k$$

ist.

Der in (6) angeführten Eigenschaft der $c_i^{(n)}$ zufolge mufs dann die Beziehung gelten:

$$\text{II} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \psi(0, 1, 2, \cdots \alpha+1; n+1) = \psi(0, 1, 2, \cdots \alpha; n) + \psi(0, 1, 2, \cdots \alpha+1; n).$$

Sowohl in (I) als auch in (II) ist die Beziehung

$$\psi(0, 1, 2, 3, \cdots n) = 1$$

als Spezialfall enthalten.

Setzt man in (I) $\alpha = n - 1$, so hat man:

(7) . . . . $\psi(0, 1, 2, \cdots n - 1, n) = n_0 = 1.$

Setzt man in (II): $\alpha = n - 1$, so wird, da der Ausdruck $\psi(0, 1, 2, \cdots n, n) = 0$ ist,

(7α) $\psi(0, 1, 2, \cdots n, n + 1) = \psi(0, 1, 2, \cdots n - 1, n),$

woraus sofort

$$\psi(0, 1, 2, \cdots n - 1, n) = 1$$

folgt, da

$$\psi(0, 1) = 1$$

ist. Man wird daher, um den rein arithmetischen Beweis für das Theorem: $\psi(0, 1, 2, \cdots n) = 1$ zu erbringen, versuchen können, zunächst die allgemeinere Beziehung (I) oder (II) zu beweisen, was dem Verfasser indessen bis jetzt noch nicht völlig gelungen ist.

Sechseck und Involution.

Von Rudolf Böger in Hamburg.

1. Das Sechseck in der Geometrie der Lage. Vermittelst des einfachen Sechsecks vermag man manche Sätze der Geometrie der Lage von dem Begriff der projektiven Verwandtschaft loszulösen und ihnen eine einfache, für die Anwendung bequeme Form zu geben. Das bekannteste Beispiel ist die Verwertung des Pascalschen Hexagramma mysticum.

Bekannt ist auch, dafs sich vermittelst eines Satzes von Pappus über das Sechseck der folgende projektive Satz ausdrücken läfst:

> Sind s und s_1 die Träger zweier projektiven Punktreihen und XX_1 und YY_1 irgend zwei Paare homologer Punkte der durch $ABC \overline{\wedge} A_1B_1C_1$ bestimmten projektiven Verwandtschaft, so ist der Ort für den Schnittpunkt der Verbindungslinien XY_1 und X_1Y eine Gerade.

2. Das Sechseck des Pappus. Man befreit diesen Satz (1) von dem Begriff der projektiven Verwandtschaft, indem man ihn auf drei Punktpaare AA_1, BB_1, CC_1 beschränkt. Von diesen sechs Punkten

müssen ABC in einer Gerade s und $A_1B_1C_1$ in einer zweiten Gerade s_1 liegen; im übrigen können sie ganz beliebig sein. Unser Satz (1) sagt dann aus, dafs die Schnittpunkte $(AB_1)\cdot(A_1B)$; $(BC_1)\cdot(B_1C)$; $(CA_1)\cdot(C_1A)$ in einer Gerade liegen.

Nehmen wir die sechs Punkte als Ecken eines einfachen Sechsecks $AB_1\,CA_1\,BC_1$, so sind die Schnittpunkte die Punkte, in denen sich je zwei Gegenseiten dieses einfachen Sechsecks schneiden. Bequemer wird die Übersicht, wenn wir die Ecken dieses Sechsecks der Reihe nach mit den Ziffern 1 2 3 4 5 6 bezeichnen. Von diesem Sechseck heifsen

Gegenecken: 1 und 4; 2 und 5; 3 und 6;
Gegenseiten: (12) und (45); (23) und (56); (34) und (61).

Ferner wollen wir, um eine kurze Ausdrucksweise zu gewinnen, die Verbindungslinien zweier Gegenecken eine Diagonallinie und den Schnittpunkt zweier Gegenseiten einen Diagonalpunkt nennen, so dafs sind:

Diagonallinien: (14); (25); (36).
Diagonalpunkte: $(23)\cdot(56)$; $(34)\cdot(61)$; $(12)\cdot(45)$.

Der Satz des Pappus lautet dann:

> Liegen drei Ecken eines einfachen Sechsecks in einer Gerade und die Gegenecken dieser drei Ecken in einer zweiten Gerade, so liegen die drei Diagonalpunkte in einer dritten Gerade.

3. Einschalten von perspektiven Gliedern zwischen die projektiven Endglieder einer Kette. Es läfst sich nun auch der Fundamentalsatz über die Involutionen von dem Begriff der Projektivität loslösen und, wie wir zeigen wollen, als Sechseckssatz aussprechen. Dieser Fundamentalsatz über die Involutionen lautet:

> Wenn in zwei projektiven einförmigen Grundgebilden, die einen gemeinsamen Träger haben, ein Element seinem homologen zweifach entspricht, so entspricht jedes Element seinem homologen zweifach.

Zu einem Beweise dieses Involutionssatzes werden wir geführt, wenn wir die

> Aufgabe: Zwei Punktreihen, deren Träger s und s_1 zusammenfallen, projektiv so aufeinander zu beziehen, dafs die Punkte ABC den Punkten $A_1B_1C_1$ homolog werden

lösen für den besondern Fall,

> dafs der Punkt A_1 in B und B_1 in A fällt, mit andern Worten, dafs der Punkt $A(B_1)$ dem Punkt $A_1(B)$ zweifach entspricht.

Lösung: Wir legen durch C_1 (Figur) die beliebige Gerade σ und durch C die beliebige Gerade σ_1, welche σ in Γ schneiden möge. Durch $B(A_1)$ legen wir eine beliebige Gerade, die σ in B und σ_1 in A_1 schneidet. Damit haben wir ein Dreiseit mit den Seiten $s(s_1)\,\sigma\,\sigma_1$ und den Ecken $\Gamma C C_1$ gezeichnet; diesem Dreiseit ist das Dreieck $A(B_1)\,BA_1$ eingeschrieben.

Wir wollen nun

die Träger s und σ vermittelst des Strahlbüschels A_1,
die Träger σ und σ_1 vermittelst des Strahlbüschels $A(B_1)$
die Träger σ_1 und s_1 vermittelst des Strahlbüschels B

perspektiv aufeinander beziehen, was wir in Zeichen so andeuten

$$s\,[A_1] \overline{\overline{\wedge}}\, \sigma\,[A(B_1)] \overline{\overline{\wedge}}\, \sigma_1\,[B] \overline{\overline{\wedge}}\, s_1.$$

Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem σ von $A(B_1)A_1$ geschnitten wird, durch A und den Punkt, in dem σ_1 von $A(B_1)B$ geschnitten wird, durch B_1, so können wir die vorstehende Kette auch so schreiben:

$$ABC \overline{\overline{\wedge}}\, AB\Gamma \overline{\overline{\wedge}}\, A_1B_1\Gamma \overline{\overline{\wedge}}\, A_1B_1C_1.$$

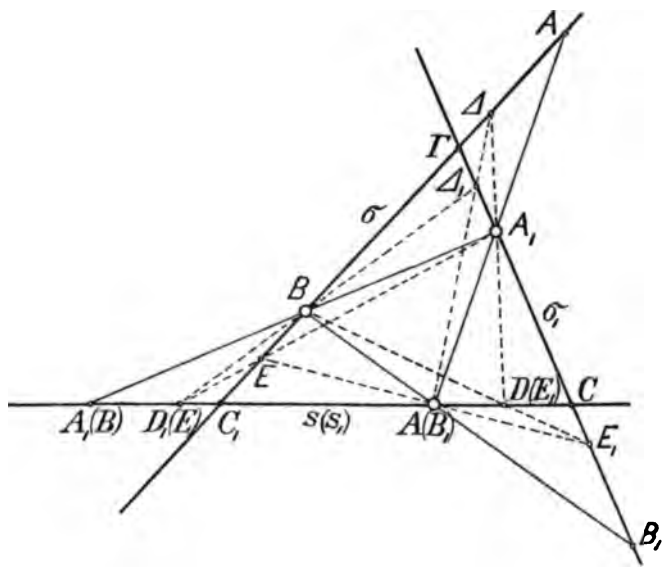


Fig. 1.

Zu einem beliebigen Punkt D von s erhalten wir nun den homologen D_1 von s_1 durch die folgende Konstruktion: Wir projizieren D aus A_1 auf σ, den erhaltenen Punkt Δ aus $A(B_1)$ auf σ_1, den erhaltenen Punkt Δ_1 aus B auf s_1; in Zeichen:

$$ABCD \overline{\overline{\wedge}}\, AB\Gamma\Delta \overline{\wedge}\, A_1B_1\Gamma\Delta_1 \overline{\overline{\wedge}}\, A_1B_1C_1D_1. \quad —$$

Diese Konstruktion führt uns zu unserm Lehrsatz, wenn wir jetzt wieder zum Punkte D_1, indem wir ihn zur ersten Punktreihe s rechnen und dementsprechend etwa durch E bezeichnen, den homologen E_1 suchen: Wir projizieren also E aus A_1 auf σ, $\in$ aus $A(B_1)$ auf σ_1, $\in_1$ endlich aus B auf s_1, so dafs wir haben:

$$BAC_1E\,[A_1] \overline{\wedge} BAC_1{\in}\,[A(B_1)] \overline{\wedge} B_1A_1C{\in_1}\,[B] \overline{\wedge} ABCE_1.$$

Da das erste Glied BAC_1E dieser Kette mit dem letzten Gliede $A_1B_1C_1D_1$ der vorhergehenden Kette identisch ist, so haben wir $ABCD \overline{\wedge} ABCE_1$; folglich fällt E_1 in D, mit andern Worten, der Punkt $D(E_1)$ entspricht dem Punkt $D_1(E)$ zweifach. Da D ein beliebiger Punkt ist, so ist damit der Fundamentalsatz über Involutionen bewiesen.

4. Sechseck und Involution. Wir können nun unsern Satz von dem Begriff der projektiven Verwandtschaft befreien, wenn wir beachten, dafs nach unserer Konstruktion $s\sigma\sigma_1$ ein beliebiges Dreiseit und ABA_1 ein beliebiges diesem Dreiseit eingeschriebenes Dreieck ist und dafs wir, von dem beliebigen Punkte D ausgehend, nach einander konstruiert haben $\Delta\Delta_1E{\in}{\in_1}$. Bezeichnen wir wieder die Ecken dieses Sechsecks $D\Delta\Delta_1E{\in}{\in_1}$ der Reihe nach durch 1 2 3 4 5 6, so sehen wir, dafs von diesem Sechseck $s\sigma\sigma_1$ die Diagonallinien und ABA_1 die Diagonalpunkte sind, so dafs wir haben:

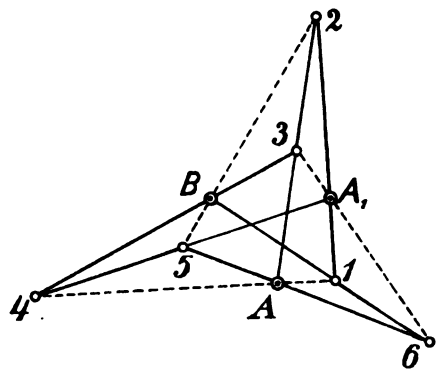


Fig. 2.

> Wenn zwei Diagonalpunkte eines einfachen Sechsecks in den zugeordneten Diagonallinien liegen, so liegt auch der dritte Diagonalpunkt in der zugeordneten Diagonallinie.

Der Hessesche Satz und die adjungierten Involutionen.

Von Rudolf Böger in Hamburg.

1. Das Imaginäre. Seitdem ich vor einem Vierteljahrhundert mein mathematisches Herz an die Geometrie der Lage verlor, ist meine Liebe trotz mancherlei Zwischenfälle stetig gewachsen. Nur ein

Hindernis hat sie nie ganz zu überwinden vermocht, ein Hindernis, von dem ich auch heute noch nicht weifs, ob es ein imaginäres oder ein reelles ist, ich meine das Imaginäre. So oft ich im Anfang meines Studiums auf das Wort imaginär stiefs, nahm ich nichts als ein Vacuum wahr, und der horror vacui wuchs bei mir mit den Jahren zu einer beunruhigenden Gröfse an. Mit begreiflichem Wohlbehagen las ich daher, als ich allmählich v. Staudt an einzelnen Stellen verstehen lernte, das Vorwort zu den „Beiträgen der Geometrie der Lage". Ich kann mir nicht versagen, es in seinem wesentlichen Inhalt hierher zu setzen:

„In meiner im Jahre 1847 erschienenen Geometrie der Lage konnte ich in die Lehre von den imaginären Elementen, deren Begründung der nächste Zweck dieser Beiträge ist, schon deshalb nicht tiefer eingehen, weil es mir damals noch nicht gelungen war, zwei einander konjungierte imaginäre Elemente von einander zu unterscheiden.

Dafs die Theorie der imaginären Elemente, durch welche das Gebiet der Geometrie um ein Bedeutendes erweitert und zugleich die Übersicht über die Sätze erleichtert wird, eine gewisse Ausführlichkeit in der Behandlung erfordert, liegt in der Natur der Sache. Sind ja selbst bei dem Satze, dafs durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist, sechs Fälle zu betrachten. In der analytischen Geometrie nennt man, was sehr einfach zu sein scheint, einen Punkt imaginär, wenn seine Koordinaten nicht sämtlich reell sind. Indessen ist hierdurch nur die Sprache der Algebra auf die Geometrie übertragen, keineswegs aber nachgewiesen, dafs ein imaginärer Punkt, gleichwie ein reeller Punkt, etwas vom Koordinatensysteme Unabhängiges sei. Wo ist, fragt sich wohl jeder, der imaginäre Punkt, wenn man vom Koordinatensysteme abstrahiert? So entbehrte denn bisher die Geometrie, wenn sichs von imaginären Elementen handelte, der Evidenz, welche man sonst an ihr rühmt und wohl auch mit Recht von ihr verlangt."

Nach diesen Worten durfte ich wohl annehmen, dafs mein horror vacui nicht so ganz subjektiv-imaginär war, und suchte nun das Vacuum mit den „Beiträgen" auszufüllen. An Stoff fehlte es nicht; denn wenn v. Staudt eine „gewisse Ausführlichkeit in der Behandlung" für erforderlich hält, dann sind das Worte, die im Munde des grofsen Geometers, der mit sichtlicher Sorge jedes nicht durchaus notwendige Wort unterdrückt, eine ganz eigene Bedeutung haben. So kam es denn, dafs ich zwar von dem einen Alp, dem horror vacui, befreit wurde, dafs ich aber gegen den andern, die v. Staudtsche Theorie des Imaginären eintauschte. Auch heute noch verteile ich diese Theorie nur, wenn ich sie mir zurückübersetze in die reelle Sprache

der Involutionen, und nach wiederholten vergeblichen Versuchen bin ich zu der Überzeugung gekommen, dafs ich sie nie so weit beherrschen würde, um sie selbständig verwerten zu können.

Nach meiner Meinung rührt diese wohl allgemein zugestandene Schwierigkeit der v. Staudtschen Theorie daher, dafs sie aufgebaut ist auf einem Satze, der keine allgemeine Gültigkeit hat, d. h. nicht für elliptische und hyperbolische Involutionen gleichzeitig gültig ist, nämlich auf der Darstellung eines imaginären Elementes vermittelst eines ordentlichen Wurfes, der einem gegebenen Wurfe projektiv gewählt werden kann. Daher kommt es z. B., dafs v. Staudt getrennt beweisen mufs: 1. Eine Kurve zweiter Ordnung ist durch drei reelle und zwei imaginäre Punkte bestimmt und 2. Eine Kurve ist durch einen reellen und vier imaginäre Punkte bestimmt. Damit hängt auch zusammen, dafs er es ganz aufgiebt, seine Gebilde zu konstruieren; er zeigt nur, dafs sie existieren, z. B. die oben genannten Kurven, nicht aber wie man sie praktisch zeichnen kann.

Das Charakteristische der Geometrie der Lage besteht aber darin, dafs nur ihre allgemein gültigen Sätze wirklich durchsichtig und fruchtbar sind und dafs man, wenn man erst einen Satz zugelassen hat, dessen Richtigkeit von besonderen Annahmen abhängt, bei weiteren Beweisen sehr bald so viel Einzelfälle zu berücksichtigen hat, dafs die Darstellung gekünstelt und schwerfällig wird. Der Grund liegt darin, dafs die den allgemein gültigen Sätzen entsprechenden Konstruktionen mit dem Lineal allein ausgeführt werden können, dafs man es aber mit Aufgaben zweiten Grades zu thun bekommt, wenn man sich verführen läfst, einen Beweis auf eine Unterscheidung zwischen elliptischen und hyperbolischen Involutionen zu stützen.

Meine Liebe zur Geometrie der Lage hatte also einen schweren Stand, hier die öde Leere und dort die erdrückende Fülle. Und trotz der erdrückenden Fülle blieb doch immer die Frage: Was soll der imaginäre Punkt?

Da der imaginäre Punkt durch etwas ganz Reelles dargestellt wird, durch die Involution, so ist die Frage erlaubt: Ist es denn nötig oder auch nur nützlich, jenseits des Reellen noch einen Punkt in der Imagination zu schaffen? Dafs es nicht nötig ist, glaubte ich schon bei der Abfassung meiner Abhandlung: Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung, Hamburg 1886. Ich glaube jetzt, dafs es auch nicht nützlich ist; denn auch die „adjungierten Involutionen", von denen im folgenden die Rede ist, liefern ein Mittel, durch das, wie v. Staudt es ausdrückt, das Gebiet der Geometrie erweitert und die Übersicht über die Sätze erleichtert wird.

Das Wort imaginär, das die Algebra bot, war ein bequemes Aushülfsmittel zur scheinbar mühelosen Beantwortung von Fragen, die sich bei allen Sätzen zweiten Grades aufdrängen. Es lohnt sich aber, glaube ich, durch Einführung der adjungierten Involutionen eine im ersten Augenblick weniger einfach scheinende Antwort zu geben, dafür aber dann die ganze Theorie des Imaginären nicht nötig zu haben.

Nehmen wir als Beispiel den Lehrsatz des Désargues: Eine Kurve zweiter Ordnung, die einem Viereck umgeschrieben ist, schneidet jede Gerade in zwei homologen Punkten derjenigen Involution, die in der Gerade durch die Gegenseiten des Vierecks ausgeschnitten wird. — Jeder Studierende, dem dieser Satz zum ersten Male vorgelegt wird, fragt unwillkürlich: Wenn aber die Kurve die Gerade nicht schneidet, was dann? Er fühlt, dafs auch in diesem Fall ein Zusammenhang zwischen der Kurve, dem Viereck und der Gerade besteht. Weil sich auf diese natürliche Frage nicht ohne weiteres eine Antwort geben läfst, so liegt die Versuchung nahe, von imaginären Schnittpunkten zu reden. Damit wird aber das Vacuum nicht ausgefüllt. Es hilft nichts, entweder es mufs eine vollständige Theorie des Imaginären gegeben werden oder der Satz mufs so umgeformt werden (Nr. 3), dafs er allgemeine Gültigkeit hat, d. h. dafs sein Inhalt unabhängig von dem zufälligen Umstande ist, ob die Gerade die Kurven schneidet, oder nicht schneidet.

Wie man zu einem solchen Satze und allgemein zu einer Darstellung der Geometrie der Lage ohne Hülfe des Imaginären gelangt, werde ich binnen kurzem an einem andern Orte im Zusammenhang zeigen; hier kann nur der Gedankengang an einigen Beispielen, gröfstenteils ohne Beweis, erläutert werden.

2. Die resultierende Involution. Wir legen den folgenden Betrachtungen krumme Punktinvolutionen einer Kurve k^2 zu Grunde, da sich für diese unsere Sätze am anschaulichsten ergeben. Will man sie auf beliebige Involutionen übertragen, so hat man vorher den hier benutzten Begriff der konjugierten Punkte zu eliminieren.

1. Definition: Von zwei Involutionen P^2 und Q^2 heifse die eine eine Resultierende der andern, wenn ihre Zentren P und Q zwei hinsichtlich k^2 konjugierte Punkte sind.

2. Ist $P^2 \equiv UG \cdot CC_1$ eine Resultierende von Q^2, so ist, wenn U und C zwei homologe Punkte der Involution Q^2 sind, in Q^2 dem Punkt G der Punkt C_1 homolog.

Der Satz ist ein anderer Ausdruck des bekannten, der Polarentheorie zu Grunde liegenden: Wenn von einem Kurvenviereck zwei Gegen-

seiten sich in dem Punkte P schneiden und eine dritte Seite durch den P konjugierten Punkt Q geht, so geht auch die Gegenseite dieser dritten Seite durch Q.

3. Durch zwei Involutionen Q^2 und R^2 ist eine beiden gemeinsame Resultierende bestimmt,

die Involution nämlich, deren Zentrum P der Pol der Verbindungslinie QR ist. — Die beiden Involutionen Q^2 und R^2 sollen die komponierenden der resultierenden Involution P^2 heifsen.

4. Die Ordnungspunkte einer resultierenden Involution sind einander homolog in jeder komponierenden Involution.

5. Zu jeder Involution P^2 giebt es einfach unendlich viele komponierende.

Jeder Punkt Q der Polare p von P ist nämlich das Zentrum einer solchen Involution.

6. Eine Involution Q^2 ist bestimmt, wenn von ihr ein Punktpaar UC und eine resultierende Involution P^2 gegeben ist.

Das Zentrum Q ist nämlich der Schnittpunkt von p und der Verbindungslinie UC. —

Eine Kurve zweiter Ordnung induziert bekanntlich in jeder Gerade und in jedem Punkte ihrer Ebene eine ihr konjugierte Involution.

7. Definition: Eine Involution, die eine komponierende der konjugierten Involution ist, soll der Kurve adjungiert heifsen.

8. Die Ordnungspunkte einer adjungierten Involution bilden ein Paar konjungierter Punkte (2_4).

3. Der Lehrsatz des Désargues. Die am Ende von Nr. 1 angedeutete Umformung des Desargischen Satzes ist die folgende. — SS_1AB seien die Ecken eines beliebigen Kurvenvierecks, p eine beliebige Gerade und P ihr Pol. Wir bezeichnen die Punkte, in denen p von den Gegenseiten SA und S_1B geschnitten wird, durch A und A_1, und die Punkte, in denen p von den Gegenseiten SB und S_1A geschnitten wird, durch B und B_1. Schliefslich mögen die Verbindungslinien SA_1 und SB_1 von der Kurve zum zweiten Male in A_1 und B_1 geschnitten werden. Es bilden dann die Kurvenpunkte $\overline{SA_1}\,\widehat{A}\,\underline{\overline{AS_1}}\,\widehat{B_1B}$ ein Sechseck, aus dem hervorgeht, dafs auch die Verbindungslinien AA_1 und BB_1 sich in einem Punkte Q von p schneiden. Die krumme Involution $AA_1 \cdot BB_1$, von der Q das Zentrum ist, ist, weil Q in der Polare p von P liegt, eine komponierende der krummen Involution, *die durch* den Pol P in der Kurve induziert wird. Es wird daher

aus dem Kurvenpunkt S die krumme Involution $[Q] \equiv \mathsf{AA_1 \cdot BB_1}$ durch eine Strahleninvolution projiziert, die eine komponierende von der Strahleninvolution ist, durch welche die krumme Involution $[P]$ aus S projiziert wird. Diese Strahleninvolution aber schneidet bekanntlich p (S. Nr. 4) in der der Kurve konjugierten Involution von p. Also ist die Involution $AA_1 \cdot BB_1$, welche durch die Strahleninvolution $S(\mathsf{AA_1 \cdot BB_1})$ in p ausgeschnitten wird, eine komponierende der konjugierten Involution von p, d. h. eine der Kurve adjungierte Involution (2_7). Da $AA_1 \cdot BB_1$ die Punkte sind, in denen zwei Paar Gegenseiten des Kurvenvierecks $SS_1\mathsf{AB}$ die Gerade p schneiden, so haben wir den

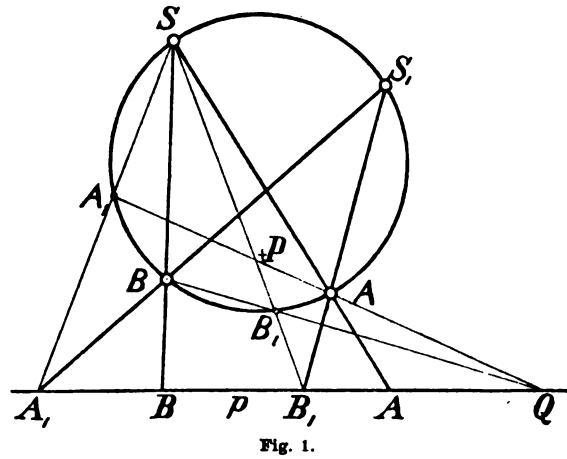


Fig. 1.

Lehrsatz des Désargues: Die Gegenseiten eines Kurvenvierecks schneiden jede Gerade in Punktpaaren einer der Kurve adjungierten Involution.

Zusatz: Schneidet p die Kurve, d. h. hat die konjugierte Involution von p zwei Ordnungspunkte, so sind diese (2_3) homologe Punkte der von den Gegenseiten des Kurvenvierecks in p ausgeschnittenen Involution. Wir haben also in diesem besondern Fall den Désargues in seiner gewöhnlichen Form vor uns. — Wie unser Lehrsatz sich für ein Polarfeld gestaltet, werden wir in Nr. 7_2 sehen.

4. Zusammenhang zwischen den krummen und den konjugierten Involutionen. In der vorigen Nummer benutzten wir den bekannten Satz: Die krumme Involution, deren Zentrum der Punkt P ist, wird aus jedem Kurvenpunkt S durch eine Strahleninvolution projiziert, die perspektiv liegt zu der konjugierten Involution der Polare p des Involutionszentrums P. — Dieser wichtige Satz hat ebenfalls in der üblichen Darstellung eine Lücke. Liegt der Punkt P aufserhalb k^2, so gehen durch ihn Strahlen, die die Kurve nicht schneiden, die also keine Punktpaare der krummen Involution liefern. Was läfst sich über diese Strahlen aussagen? Diese Frage drängt

sich jedem auf und doch bleibt sie unbeantwortet. Sie läfst sich aus dem Satze selbst oder vielmehr aus seiner Umkehrung (die allgemein gültigen Sätze lassen sich sämtlich ohne weiteres umkehren) ablesen.

Wir gehen also aus von dem Satze: Die konjugierte Involution der Gerade a wird aus jedem Kurvenpunkte S durch eine Strahleninvolution projiziert, die die Kurve in einer krummen Involution schneidet, deren Zentrum der Pol A von a ist. Dreht sich nun a um den Punkt P, so bewegt sich der Pol A von a auf der Polare p von P; die krummen Involutionen mit dem Zentrum A sind daher sämtlich komponierende der krummen Involution $P\ (2_5)$. Folglich sind auch die Strahleninvolutionen, welche die konjugierten Involutionen des Strahles a aus S projizieren, komponierende der Strahleninvolution, welche die konjugierte Involution von p aus S projiziert. Wir haben also unsern Satz so zu vervollständigen:

> Die konjugierten Punktinvolutionen der Strahlen a eines Punktes P werden aus jedem Kurvenpunkt S durch komponierende Strahleninvolutionen projiziert. Die resultierende aus diesen komponierenden Involutionen ist diejenige, welche die konjugierte Punktinvolution der Polare p von P in dem Kurvenpunkt S induziert.

In Nr. 6 werden wir sehen, dafs dieser Satz, losgelöst von dem Polarfeld, eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes ist: Die Gegenecken eines Vierseits werden aus jedem Punkte durch Strahlenpaare einer Involution projiziert.

Zusatz: Mit Hülfe des Begriffs der adjungierten Involution können wir unsern Satz etwas einfacher so aussprechen:

> Die Strahleninvolution, durch welche die konjugierte Punktinvolution einer beliebigen Gerade p aus irgend einem Kurvenpunkte S projiziert wird, schneidet jede der Gerade p konjugierte Gerade a in einer der Kurve adjungierten Involution.

Anmerkung: Die in den beiden vorhergehenden Nummern vollständig durchgeführten Beispiele erläutern wohl zur Genüge die Behauptung, dafs der Begriff der adjungierten Involution die imaginären Elemente beseitigt. Die nachfolgenden Sätze, die nach der gewöhnlichen Ausdrucksweise vom imaginären Viereck handeln, werden, wenn auch die Beweise fehlen, einen Vergleich zwischen der üblichen und der hier vorgeschlagenen Darstellungsweise ermöglichen. Den Schlufs bildet eine sich von selbst ergebende Verallgemeinerung des Hesseschen Satzes.

5. Die diagonale Involution. Es seien g^2 und h^2 zwei beliebige Involutionen, deren Träger g und h sich in U schneiden. Diese beiden Involutionen g^2 und h^2 wollen wir zwei Gegenseiten nennen. Ist dem Punkt U in g^2 der Punkt G und in h^2 der Punkt H homolog, so soll die Verbindungslinie $GH = u$ die Diagonale der Gegenseiten g^2 und h^2 heifsen; der Schnittpunkt U der Träger g und h heifse der Diagonalpunkt der Gegenseiten.

Eine beliebige Gerade a schneide die Träger ghu in $C\Gamma A$; dem Punkt C sei in g^2 der Punkt C_1 und dem Punkt Γ in h^2 der Punkt Γ_1 homolog; die Verbindungslinie $C_1\Gamma_1 = a_1$, die der Gerade a zugeordnete Gerade, schneide die Diagonale u in B.

Die durch die Punktpaare $GH \cdot AB$ in u bestimmte Involution u^2 soll die den Gegenseiten g^2 und h^2 zugeordnete diagonale Involution heifsen.

Bezeichnen wir noch den Punkt, in dem die Gerade $C\Gamma = a$ von der ihr zugeordneten Gerade $C_1\Gamma_1 = a_1$ geschnitten wird, durch A, so haben wir in der beliebigen Gerade a die durch den Wurf $C\Gamma \cdot AA$ bestimmte Involution. Diese soll die durch die Gegenseiten g^2 und h^2 in a induzierte Hauptinvolution heifsen.

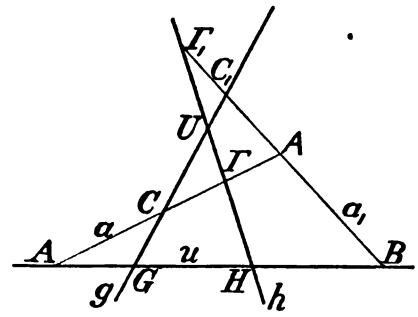


Fig. 4.

Die konstruierte Figur, die allen folgenden Betrachtungen zu Grunde liegt, besteht demnach aus fünf beliebig angenommenen Geraden und ist vielleicht noch übersichtlicher als die Darstellung eines Vierecks.

Die durch die zehn Schnittpunkte der fünf Geraden gebildeten Involutionen schreiben wir noch einmal hin.

1. Gegenseiten: $g^2 \equiv UG \cdot CC_1$; $h^2 \equiv UH \cdot \Gamma\Gamma_1$.
2. Diagonale Involution: $u^2 \equiv GH \cdot AB$.
3. Hauptinvolutionen: $a^2 \equiv C\Gamma \cdot AA$; $a_1^2 \equiv C_1\Gamma_1 \cdot BA$.

Zusätze: 1. Von den drei Involutionen $g^2h^2u^2$ hat mindestens eine Ordnungspunkte. — Haben die Gegenseiten g^2 und h^2 die Ordnungspunkte KK_1 und LL_1, so hat die diagonale Involution u^2 zwei Ordnungspunkte V und W, die mit U zusammen das Diagonaldreieck des Vierecks KK_1LL_1 bilden.

2. Haben die Gegenseiten g^2 und h^2 Ordnungspunkte, so schneiden die Gegenseiten des Vierecks KK_1LL_1 die Gerade a in Punktpaaren der Hauptinvolution a^2.

Anmerkung. Den hier fehlenden Nachweis, dafs die diagonale Involution unabhängig von der Wahl der Punkte CC_1 und $\Gamma\Gamma_1$ ist, habe ich in dem vorigen Heft dieser Mitteilungen (Der Kegelschnitt der neun Punkte, Nr. 4) gegeben. Dort zeigte sich, dafs der Satz von der diagonalen Involution die Verallgemeinerung eines Gaufsschen Satzes ist.

6. Vierseit.

Lehrsatz: Zwei Gegenseiten und ihre diagonale Involution werden aus jedem Punkte S durch drei komponierende Strahlenbüschel projiziert.

Anmerkung 1. Die aus diesen drei Komponierenden resultierende Strahleninvolution schneidet die Diagonale u in einer Involution, die der Kurve konjugiert ist, welche durch den Punkt S und die beiden konjugierten Involutionen g^2 und h^2 bestimmt ist. — Aus dieser Bemerkung ist allmählich die Kurvenkonstruktion entstanden, die ich in diesen Mitteilungen veröffentlicht habe.

2. Haben die beiden Gegenseiten und folglich auch (Nr. 5 Zusatz 1) die diagonale Involution Ordnungspunkte, so werden diese aus S durch homologe Strahlen der resultierenden Involution projiziert (2_4). Da $KK_1 \cdot LL_1 \cdot VW$ die Gegenecken eines Vierseits bilden (5_1), so ist mithin unser Satz eine Verallgemeinerung des bekannten, dafs die Gegenecken eines Vierseits aus jedem Punkt durch Strahlenpaare einer Involution projiziert werden.

7. Das Polarfeld zweiter Ordnung. Einer eingehenden Behandlung des Polarfeldes gehen die meisten Lehrbücher aus dem Wege; sie sprechen nur einmal gelegentlich von einer imaginären Kurve. Und doch zeigt sich erst die Leistungsfähigkeit der Geometrie der Lage beim Polarfeld in ihrem hellsten Licht. Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus ist es deshalb zweifellos richtig, wie v. Staudt es gethan hat, vom Polarfeld zur Ordnungskurve, vom Allgemeinen zum Besonderen überzugehen. Das ist natürlich in einem Lehrbuch nicht möglich; in diesem mufs die Kurve vorangehen. Aber man sollte der Kurve das Polarfeld folgen lassen. Erst in dieser Allgemeinheit offenbart die Geometrie der Lage ihre ganze Schönheit: Die Beweise werden eleganter und leichter, ihr Aufbau aus den einfachsten Sätzen durchsichtiger, der Zusammenhang zwischen den einzelnen Sätzen immer deutlicher.

1. Lehrsatz: Durch zwei Gegenseiten und eine Komponierende ihrer diagonalen Involution ist ein Polarfeld bestimmt.

oder

Sind zwei Gegenseiten einem Polarfeld konjugiert, so ist ihre diagonale Involution dem Polarfeld adjungiert.

2. Lehrsatz: Sind zwei Gegenseiten einem Polarfeld konjugiert, so ist die Hauptinvolution, die die beiden Gegenseiten in einer beliebigen Geraden induzieren (5), dem Polarfeld adjungiert.

Anmerkung: Dies ist die allgemeinste Form des Lehrsatzes von Désargues.

3. Definition: Der Inbegriff der Polarfelder, denen zwei Gegenseiten konjugiert sind, heifst ein Büschel von Polarfeldern.

4. Lehrsatz: Die Pole einer Gerade a für alle Polarfelder eines Büschels liegen in einer Kurve zweiter Ordnung. Diese Polkurve ist bestimmt durch den Punkt U, die diagonale Involution u^2 und die Hauptinvolution a^2. Sie kann daher auch als bestimmt angesehen werden durch die drei Punkte $UC_1\Gamma_1$ und den Schnittpunkt A der Tangenten in C_1 und Γ_1.

5. Lehrsatz: Ein Büschel von Polarfeldern ist bestimmt durch eine konjugierte und zwei adjungierte Involutionen.

6. Lehrsatz: Ein Polarfeld ist bestimmt durch eine konjugierte und drei adjungierte Involutionen.

8. Der Satz von Hesse lautet: Sind zwei Ecken eines Vierseits ihren Gegenecken hinsichtlich eines Polarfeldes k^2 konjugiert, so ist auch die dritte Ecke ihrer Gegenecke konjugiert.

Anwendung: Ist der Punkt K dem Punkte K_1 und der Punkt L dem Punkte L_1 konjugiert, so ist auch der Schnittpunkt V von KL und K_1L_1 dem Schnittpunkt W von KL_1 und K_1L konjugiert.

Die Verallgemeinerung des Satzes lautet:

Sind zwei Gegenseiten einem Polarfeld adjungiert, so ist auch ihre diagonale Involution dem Polarfeld adjungiert.

Beweis: Wir behalten die Figur und die Bezeichnung von Nr. 5 bei. — Das Polarfeld, dem die Involution $g^2 \equiv UG \cdot CC_1$ adjungiert ist, induziert in dem Träger g eine konjugierte Involution, in der dem Punkte U der Punkt C homolog sei. Dann ist, weil nach der Definition die konjugierte Involution eine Resultierende der adjungierten Involution ist (2_7), dem Punkte G der Punkt C_1 homolog (2_8), sodafs die konjugierte Involution ist $UC \cdot GC_1$. Ebenso ist, wenn in dem Träger h die adjungierte Involution $h^2 \equiv UH \cdot \Gamma\Gamma_1$ gegeben ist und für unser Polarfeld dem Punkt U der Punkt Γ kon-

jugiert ist, die konjugierte Involution von $h : U\Gamma \cdot H\Gamma_1$, sodafs die Diagonale der Gegenseiten $UC \cdot GC_1$ und $U\Gamma \cdot H\Gamma_1$ die Verbindungslinie $C\Gamma$ ist. Die durch diese Gegenseiten in der Gerade GH bestimmte Hauptinvolution ist (5) $GH \cdot AB$. Diese Hauptinvolution ist aber sämtlichen Polarfeldern adjungiert, denen die Gegenseiten konjugiert sind (Désargues 7_3). Die Hauptinvolution $GH \cdot AB$ der Gegenseiten $UC \cdot GC_1$ und $U\Gamma \cdot H\Gamma_1$ ist aber nichts anderes als die diagonale Involution der Gegenseiten $UG \cdot CC_1$ und $UH \cdot \Gamma\Gamma_1$. —

Der Satz von Hesse ergiebt sich in dem besondern Falle, dafs die adjungierte Involution g^2 die Ordnungspunkte K und K_1 und die adjungierte Involution h^2 die Ordnungspunkte L und L_1 hat; dann hat die diagonale Involution u^2 die Ordnungspunkte V und W, die mit KK_1 und LL_1 zusammen die Gegenecken eines Vierseits bilden (6_3). Die Ordnungspunkte einer adjungierten Involution aber bilden ein Paar konjugierter Punkte (2_8).

Anmerkung: Wir haben gesehen, dafs die diagonale Involution zweier Gegenseiten adjungiert ist sowohl den Polarfeldern, denen die Gegenseiten konjugiert sind (7_1), als auch den Polarfeldern, denen die Gegenseiten adjungiert sind (8). Der erste Teil dieses Satzes bildet die Grundlage für die Lehre vom Polarfeld zweiter Ordnung, der zweite die Grundlage für die Lehre vom Polarfeldnetz, also für ein Polarfeld dritter Ordnung.

Die geradlinig begrenzten Flächenstücke des hyperbolischen Paraboloids.

Von W. Kawalki in Hamburg.

Stellt man sich die Aufgabe, Flächenstücke des hyperbolischen Paraboloids zu berechnen, so ist es vorteilhaft, die Begrenzungskurve derselben durch ihre Projektion auf die Tangentialebene zu bestimmen, die man im Scheitel des Paraboloids an diese Fläche legen kann.

Schon für den Fall, dafs diese Kurve eine beliebige Ellipse mit dem Scheitel als Mittelpunkt oder auch nur ein Kreis ist, wird man auf elliptische Integrale geführt. Auch wenn man die Scharen der Krümmungslinien der Fläche zur Begrenzung eines Stückes des Paraboloids benutzt, enthält das Resultat dieselben Funktionen. Nur für eine bestimmte Ellipse, die aus einer Begrenzungskurve mit der geometrischen Eigenschaft entsteht, dafs die Flächennormale längs der-

selben einen konstanten Winkel mit der Hauptachse der Fläche bildet, wird der gesuchte Flächeninhalt eine elementare Funktion dieses Neigungswinkels.

Es erscheint von Interesse zu untersuchen, ob sich noch andere Begrenzungskurven finden lassen, für die das Endresultat nur elementare Funktionen enthält.

Allgemein bekannt dürfte sein, dafs für das gleichseitige hyperbolische Paraboloid je zwei der beiden auf der Fläche liegenden Scharen von Geraden dieser Bedingung genügen.

Die Projektionen derselben auf die Tangentialebene im Scheitel bilden in diesem Falle ein Rechteck. Bezeichnet man zwei an einander stofsende Seiten desselben mit $2a$ und $2b$, so wird das Flächenstück durch

$$\tfrac{4}{3}\,ab\sqrt{1+a^2+b^2}+\tfrac{2}{3}\,a(a^2+3)\ln\frac{b+\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$+\tfrac{2}{3}\,b(b^2+3)\ln\frac{a+\sqrt{1+a^2+b^2}}{\sqrt{1+b^2}}-\tfrac{4}{3}\operatorname{artg}\frac{ab}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$$

gegeben.[1])

Für ein beliebiges Paraboloid ist, soweit es mir bekannt ist, die Berechnung eines geradlinig begrenzten Flächenstückes noch nicht durchgeführt worden. Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, diese Lücke auszufüllen; sie wird zeigen, dafs auch hier dieselben elementaren Funktionen auftreten, allerdings mit Argumenten, die schon infolge der beiden neu hinzukommenden Parameter des Paraboloids viel komplizierter gebaut sind.

Die Gleichung des Paraboloids sei in der Form gegeben:

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}+2x=0. \tag{1}$$

Die yz-Ebene ist die Tangentialebene im Scheitel; der Schnitt des Paraboloids mit dieser Ebene

$$\frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=0 \tag{2}$$

besteht aus den beiden Geraden:

$$\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0 \tag{3a}$$

und

$$\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0, \tag{3b}$$

1) L. A. Sohncke, Samml. v. Aufgaben aus der Integralrechnung, 1879 p. 149.

die denselben Winkel mit der z-Achse bilden, dessen Tangente

$$\text{tg}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{p}{q}} \tag{4}$$

ist. Das System sämtlicher auf (1) liegenden Geraden erhält man, indem man (1) in lineare Faktoren zerlegt und aus denselben zwei Gleichungen in der Weise bildet, dafs aus ihnen (1) gefolgert werden kann. Da diese Zerlegung von (1) auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, so bildet das System zwei unendliche Scharen:

$$\text{I}\begin{cases}(5a) & \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = -2\lambda x,\\ (5b) & \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{1}{\lambda},\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}(6a) & \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = -2\mu x,\\ (6b) & \dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}} = \dfrac{1}{\mu}.\end{cases}$$

λ und μ haben alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen.

Da in (5b) der Koëfficient von x gleich Null ist, so stellt diese Gleichung eine Ebene dar, die auf der yz-Ebene senkrecht steht. Die Gleichung stellt also zugleich ein System von Geraden in der yz-Ebene dar. Da in (5b) die Koëfficienten von y und z mit denen von (3b) übereinstimmen, so sind die Geraden (5b) und (3b) einander parallel. Die Projektion jeder Geraden der ersten Schar ist also (3b) parallel.

Ganz ebenso läfst sich zeigen, dafs die Projektion jeder Geraden der zweiten Schar auf die yz-Ebene der Geraden (3a) parallel ist.

Geht man umgekehrt von einem Parallelogramm (7) in der yz-Ebene aus, dessen Seiten den Geraden (3a) und (3b) parallel sind und von diesen die Stücke $\pm a$ und $\pm b$ abschneiden, so kann dasselbe dadurch als entstanden angesehen werden, dafs man vier der auf dem Paraboloid liegenden Geraden auf die Tangentialebene im Scheitel projiziert hat.

Zur Berechnung des Flächenelementes des Paraboloids löst man (1) nach x auf:

$$x = -\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} \tag{8}$$

und bildet

$$dF = dy\,dz\sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = dy\,dz\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2}}. \tag{9}$$

Um für das Integral, welches sich über das durch (7) definierte Parallelogramm erstreckt, konstante Grenzen zu erhalten, führt man

für die yz-Ebene schiefwinklige Koordinaten ein, die so zur früheren z-Achse liegen, dafs sie mit ihr den durch (4) definierten Winkel α bilden.

Diese Transformation wird erreicht durch

$$(10)\qquad \begin{aligned} y &= (y' - z')\sqrt{\frac{p}{p+q}} \\ z &= (y' + z')\sqrt{\frac{q}{p+q}}. \end{aligned}$$

(1) geht durch dieselbe über in

$$(11)\qquad \frac{2y'z'}{p+q} = x$$

und das Flächenelement (9) in:

$$(12)\qquad dF = dy'\,dz' \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{vmatrix} \sqrt{1 + \frac{(y'-z')^2}{p(p+q)} + \frac{(y'+z')^2}{q(p+q)}}.$$

$$= dy'\,dz' \frac{2}{p+q}\sqrt{pq + y'^2 + z'^2 + 2\frac{p-q}{p+q}y'z'}.$$

Der Kürze wegen mögen die Striche an y und z fortfallen. Erstreckt man das Integral über die vier Quadranten des Parallelogramms (7), so wird:

$$(13)\qquad F = \frac{8}{p+q}\int_0^a dy \int_0^b dz \sqrt{pq + y^2 + z^2 + 2\frac{p-q}{p+q}yz}.$$

Die Integration nach z ergiebt:

$$F = \frac{4}{p+q}\int_0^a dy \left[\left(b + \frac{p-q}{p+q}y\right)\sqrt{pq + b^2 + y^2 + 2b\frac{p-q}{p+q}y} - \frac{p-q}{p+q}y\sqrt{pq+y^2} \right.$$

$$\left. + \left(pq + \frac{4pqy^2}{(p+q)^2}\right) \ln \frac{b + \frac{p-q}{p+q}y + \sqrt{pq + b^2 + y^2 + 2b\frac{p-q}{p+q}y}}{\frac{p-q}{p+q}y + \sqrt{pq+y^2}} \right].$$

Zunächst zerlegt man den Logarithmus des Quotienten in die Differenz der Logarithmen, damit nicht zwei Quadratwurzeln aus verschiedenen Funktionen zweiten Grades in dasselbe Integral gelangen, und integriert sodann die beiden letzten Summanden partiell:

$$(14)\quad F=\frac{4}{p+q}\Big[\int_0^a dy\Big[b+\frac{p-q}{p+q}y\sqrt{pq+b^2+y^2+2b\frac{p-q}{p+q}y}\Big]-\int_0^a\frac{p-q}{p+q}y\sqrt{pq+y^2}$$

$$+\Big(pqa+\tfrac{4}{3}\frac{pqa^3}{(p+q)^2}\Big)\ln\frac{b+\frac{p-q}{p+q}a+\sqrt{pq+b^2+a^2+2ab\frac{p-q}{p+q}}}{\frac{p-q}{p+q}a+\sqrt{pq+a^2}}$$

$$-\int_0^a\Big(pqy+\tfrac{4}{3}\frac{pqy^3}{p+q}\Big)\frac{d}{dy}\Big\{\ln\Big(b+\frac{p-q}{p+q}y+\sqrt{pq+b^2+y^2+2b\frac{p-q}{p+q}y}\Big)\Big\}dy$$

$$+\int_0^a\Big(pqy+\tfrac{4}{3}\frac{pqy^3}{p+q}\Big)\frac{d}{dy}\Big\{\ln\Big(\frac{p-q}{p+q}y+\sqrt{pq+y^2}\Big)\Big\}dy\Big].$$

Von den vier Integralen hat man nur das erste und dritte auszuführen, da aus diesen das zweite, beziehungsweise vierte dadurch hervorgeht, dafs man $b=0$ setzt.

Zunächst formt man das dritte Integral um, da sich von diesem ein Summand abtrennen läfst, der vor der Integration mit dem ersten Integral vereinigt werden kann. Das dritte Integral läfst sich nämlich nach der Ausführuug der Differentiation in die Summe der drei Integrale zerlegen:

$$\mathrm{III}=\frac{pq}{3(p+q)^3}\Big[\int_0^a\frac{\{3(p+q)^2y+4y^3\}4y\,dy}{(p+q)^2+4y^2}-\int_0^a\frac{\{4by^2-(p^2-q^2)y+2b(p+q)^2\}dy}{\sqrt{pq+b^2+2b\frac{p-q}{p+q}y+y^2}}$$

$$-2(p+q)^2\int_0^a\frac{\{(p^2-q^2)y+b(p+q)^2\}dy}{\{4y^2+(p+q)^2\}\sqrt{pq+b^2+2b\frac{p-q}{p+q}y+y^2}}\Big].$$

Das zweite dieser drei Integrale wird mit dem ersten in (14) vereinigt, und das dritte Integral wird dadurch lösbar, dafs man unter der Quadratwurzel die erste Potenz von y fortschafft. Dies ist durch die Substitution:

$$y=\frac{\frac{p^2-q^2}{4b}x-b\frac{p+q}{p-q}}{1+x}$$

erreichbar.

Durch dieselbe wird das letzte Integral von der Form

$$\int\frac{\alpha x\,dx}{\{(p-q)^2x^2+4b^2\}\sqrt{\beta+\gamma x^2}},$$

das bekanntlich auf einen artg führt. (Cf. L. A. Sohncke, Sammlung *von Aufgaben* aus der Integralrechnung p. 27.)

Die übrigen Integrale sind leicht nach der Methode des Ansatzes lösbar (l. c. pag. 25), und man erhält schliefslich für das durch das Parallelogramm (7) bestimmte Flächenstück des Paraboloids:

$$F = \frac{4}{3(p+q)}\Bigg\{\Big(\frac{p-q}{p+q}a^2 + 2ab + \frac{p-q}{p+q}b^2\Big)\sqrt{pq + a^2 + 2ab\frac{p-q}{p+q} + b^2}$$

$$- \frac{p-q}{p+q}\left(a^2\sqrt{pq+a^2} + b^2\sqrt{pq+b^2}\right)$$

$$+ pq\Bigg[a\left(3 + \frac{4a^2}{(p+q)^2}\right)\ln\frac{b + a\frac{p-q}{p+q} + \sqrt{pq + a^2 + 2ab\frac{p-q}{p+q} + b^2}}{a\frac{p-q}{p+q} + \sqrt{pq+a^2}}$$

$$+ b\left(3 + \frac{4b^2}{(p+q)^2}\right)\ln\frac{a + b\frac{p-q}{p+q} + \sqrt{pq + a^2 + 2ab\frac{p-q}{p+q} + b^2}}{b\frac{p-q}{p+q} + \sqrt{pq+b^2}}\Bigg]\Bigg\}$$

$$+ \tfrac{4}{3}pq\left\{\operatorname{artg}\frac{p^2 - q^2 - 4ab}{2(p+q)\sqrt{pq + a^2 + 2ab\frac{p-q}{p+q} + b^2}} - \operatorname{artg}\frac{p-q}{2\sqrt{pq+a^2}}\right.$$

$$\left. - \operatorname{artg}\frac{p-q}{2\sqrt{pq+b^2}} + \operatorname{artg}\frac{p-q}{2\sqrt{pq}}\right\}.$$

Bemerkenswert erscheint, dafs dieser Ausdruck in Bezug auf p und q, beziehungsweise a und b vollständig symmetrisch ist.

Für den Fall des gleichschenkligen hyperbolischen Paraboloids, für das $p = q = 1$ zu setzen ist, geht dieses Resultat in den pag. 401 citierten Ausdruck über, wenn man zugleich berücksichtigt, dafs $\operatorname{artg}(-\varphi) = -\operatorname{artg}\varphi$ ist.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1898/99.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. J. Schröder.)

Hauptversammlung am 21. Februar 1898.

Herr Prof. Dr. Schubert teilt mit, dafs die Witwe des früheren Mitgliedes Wilhelm Lazarus, Frau Emma Lazarus, der Gesellschaft die mathematische Büchersammlung ihres Gemahls als Geschenk überweist. Die Gesellschaft beschliefst ihren Dank durch ein Schreiben des Vorstandes zum Ausdruck zu bringen. — Der Jahrverwalter Herr Dr. Repsold erstattet den Bericht über das 208. Gesellschaftsjahr. Die Gesellschaft besteht zur Zeit aus 12 Ehrenmitgliedern, 18 aus-

wärtigen Mitgliedern und 52 einheimischen Mitgliedern. — Zu dem vom Mitjahrverwalter Herrn Dr. Bohnert gegebenen Kassenberichte wird Herr Prof. Ahlborn als Revisor gewählt. — Bei der satzungsmäfsig vorzunehmenden Wahl eines Adjunkten wird Herr Dr. Schröder auf 3 Jahre wiedergewählt. Der Vorstand besteht demnach im Geschäftsjahre 1898/99 aus den Herren Dr. J. A. Repsold, Jahrverwalter, Dr. F. Bohnert, Mitjahrverwalter, und Dr. J. Schröder, Adjunkt. — Nach der Hauptversammlung findet das übliche Stiftungsfestessen statt, an welchem sich mehrere Freunde der Gesellschaft beteiligen.

Versammlung am 12. März 1898.

Herr Dr. Pund trägt vor über „die Anwendung der Theorie der linearen Modulsysteme auf die Theorie der Abel'schen Substitutionen".

Versammlung am 9. April 1898.

Herr Dr. Jaerisch trägt vor über „die Integration der hydrodynamischen Gleichungen" (Formel für die tägliche Luftdruckschwankung).

Versammlung am 14. Mai 1898.

Die Gesellschaft willigt in den von der Grofsherzogl. Universitätsbibliothek zu Heidelberg vorgeschlagenen Schriftenaustausch ein. — Herr Dr. Schröder referiert über „die Entwicklung der Geometrie mit konstanter Zirkelöffnung".

Versammlung am 11. Juni 1898.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs Herr Dr. Jaerisch die Aufstellung des Katalogs der Lazarus-Schenkung übernommen hat. — Herr Geh. Admiralitätsrat Prof. Dr. Neumayer spricht über „die neuen Arbeiten und Anschauungen auf dem Gebiete des terrestischen und kosmischen Magnetismus und ihre Anwendung auf die antarktische Forschung".

Versammlung am 10. September 1898.

Herr Prof. Dr. Harzer, Direktor der Kgl. Sternwarte in Kiel, wird als auswärtiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. — Herr Prof. Ahlborn trägt vor über „algebraische Kurven, die sich beliebig eng an gegebene Kurvenpolygone anschliefsen".

Versammlung am 8. Oktober 1898.

Die Herren Dr. W. Kawalki und R. Schönwiese werden als ordentliche einheimische Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. Busche trägt vor über „eine Transformationsformel in der Zahlentheorie".

Versammlung am 12. November 1898.

Herr Dr. Jaerisch berichtet über die Zusammenstellung der Schriften der Lazarus-Schenkung. — Herr Dr. Schröder trägt vor über „die Schubert'sche ψ-Funktion". Dann spricht Herr Prof. Dr. Hoppe über „die Wirkungsweise der Accumulatoren".

Versammlung am 10. Dezember 1898.

Herr Dr. Jaerisch hält einen Vortrag über „die Integration partieller Differentialgleichungen". Im Anschluſs daran macht Herr Dr. Herrmann eine Mitteilung über „den wellenartigen Charakter der Luftdruckänderungen auf groſsem Gebiet".

Die Bibliothek der Gesellschaft verdankt wertvolle Zusendungen den folgenden Herren: Bachmann, Baer, Ball, Blater, Blumenthal, v. Braunmühl, Brioschi (†), Buchwaldt, Cantor, Curtze, Förster, Furtwängler, Grohmann, Halm, Haufsner, Hübbe, Hurwitz, Jaerisch, Kiepert, Königsberger, Krause, Krüfs, Kutta, Landsberg, Lemoine, Lukas, Luther, Moore, Nielsen, Picard, Repsold, Riem, Rudio, Schilling, Schmidt, Schorr, Schrader, Schur, Schuster, v. Tolloczko, Zenker, sowie allen Gesellschaften, mit denen die mathematische Gesellschaft in Schriftenaustausch steht.

Zusendungen bittet die Gesellschaft zu richten an die Adresse:

„Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude."

Das Amt des Bibliothekars verwaltet im Geschäftsjahre 1899/1900 Herr Oberlehrer Dr. P. Jaerisch.

Mitgliederverzeichnis.

Bestand der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg am 1. Januar 1899.

I. Ehrenmitglieder.

Bruns, H., Dr. phil., Professor und Direktor der Sternwarte in Leipzig.
Bubendey, J. F., Professor an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Cantor, M., Dr. phil., Professor der Mathematik in Heidelberg.
Günther, S., Dr. phil., Professor der Geographie in München.
Hübbe, H. W., C., Stadtbaumeister in Schwerin.
Hurwitz, A., Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich.
Lindley, W., Ingenieur in Wales.
Netto, E., Dr. phil., Professor der Mathematik in Giessen.
Reye, Th., Dr. phil., Professor der Mathematik in Strafsburg.
Schuback, D. A., Deich- und Grenzinspektor in Hamburg.
Stammann, J. O., Dr. jur., Senator in Hamburg.
Sturm, R., Dr. phil., Professor der Mathematik in Breslau.

II. Auswärtige Mitglieder.

Ambronn, F. A. L., Dr. phil., Professor und Observator der Sternwarte in Göttingen.
Bibliothek, Königliche, in Berlin.
Blater, J., Baden-Baden.
Grimsehl, E., Oberlehrer an der Realschule in Cuxhaven.
Harzer, P., Dr. phil., Professor und Direktor der Sternwarte in Kiel.
Hübner, A., Stadtbaumeister in Bielefeld.
Lentz, H., Wasserbauinspektor in Cuxhaven.
Ludendorff, O., Dr. phil., Assistent am astrophysikal. Observatorium in Potsdam.
Lukas, F. C., Rechnungsoffizial in Wien.
Mahlke, A., Dr. phil., Magdeburg.
Meyn, H. W., Direktor der Karlshütte in Rendsburg.
Mügge, O., Dr. phil., Professor der Mineralogie in Königsberg.
Oppenheimer, H., Dr. phil., Reallehrer in Frankenthal (Rheinpfalz).
Schrader, C. W. O., Dr. phil., Reichsprüfungsinspektor in Berlin.
Schur, A. C. W., Dr. phil., Professor und Direktor der Sternwarte in Göttingen.

Servus, H., Dr. phil., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin und Privatdozent an der techn. Hochschule in Charlottenburg.
Sprung, A., Dr. phil., Sektionschef am meteorol. Institut in Berlin.

III. Einheimische Mitglieder.

Ahlborn, F. H. H., Professor am Realgymnasium des Johanneums.
Banning, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums.
Bauch, F., Lehrer an der Realschule von Dr. Bieber.
Bensberg, E., Staatsbaumeister.
Bertheau, F., Oberlehrer an der Realschule vor dem Lübeckerthore.
Bock, J. W., Dr. phil., Lehrer an der Realschule von Dr. Bieber.
Böger, R., Dr. phil., Oberlehrer am Realgymnasium des Johanneums.
Bohnert, E. F. Ph., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthore.
Bolte, F. G., Dr. phil., Oberlehrer an der Navigationsschule.
Busche, E., Dr. phil., Oberlehrer an der Hansaschule in Bergedorf.
Classen, J., Dr. phil., Assistent am physikal. Staatslaboratorium.
Dencker, F., Chronometermacher.
Detels, F., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Eichler, K., Dr. phil., Professor am Christianeum in Altona.
Eylert, H., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Fischer, F., Assecuradeur.
Grimpen, A., Dr. phil., Lehrer.
Grosscurth, F., Dr. phil., Oberlehrer an den Unterrichtsanstalten des Klosters St. Johannis.
Haassengier, E., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthore.
Hadenfeldt, E., Direktor der Hafen-Dampfschiffahrts-Gesellschaft.
Herrmann, E., Dr. phil., Assistent an der Seewarte.
Hildenbrandt, C. C. W., Revisor der Feuerkasse.
Hoppe, E., Dr. phil., Professor am Wilhelm-Gymnasium.
Jaerisch, P. G. M., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eilbeck.
Kawalki, W., Dr. phil., wissenschaftl. Hülfslehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthore.
Keferstein, H. J., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule auf der Uhlenhorst.
Köpcke, H. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Ottensen.
Koldewey, C. C., Admiralitätsrat und Abteilungsvorsteher an der Seewarte.

Krüss, H., Dr. phil., Inhaber eines optischen Instituts.
Kühl, J. H., Lehrer an der allgemeinen Gewerbeschule.
Löwer, G. F., Staatsbaumeister.
Meyer, F. A., Oberingenieur.
Michaelsen, A., Dr. phil., Oberlehrer am Christianeum in Altona.
Nagel, A. C., Civilingenieur.
Neumayer, G., Dr. phil., Professor, Wirkl. Geh. Admiralitätsrat und Direktor der Seewarte.
Niebour, C. T. B., Direktor der Navigationsschule.
Oeltjen, H., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Eimsbüttel.
Pund, O., Dr. phil., Oberlehrer an der Realschule in Ottensen.
Reinmüller, P., Dr. phil., Professor und Direktor der Realschule in St. Pauli.
Repsold, J. A., Dr. phil., Inhaber einer astronomischen Werkstatt.
Rümker, G. C. W., Professor und Direktor der Sternwarte.
Schader, F., Dr. phil., Professor am Wilhelm-Gymnasium.
Schönwiese, R., Versicherungs-Mathematiker.
Schorr, R., Dr. phil., Observator an der Sternwarte.
Schröder, J. C. A., Dr. phil., Oberlehrer an der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthore.
Schubert, H. C. H., Dr. phil., Professor der Gelehrtenschule des Johanneums.
Sieveking, J. H., Assistent an der Seewarte.
Steinhaus, C. F., Schiffbauingenieur.
Thaer, A., Dr. phil., Professor und Direktor der Oberrealschule und Realschule vor dem Holstenthore.
Timm, J. J. A., Schiffbauingenieur.
Tuch, Th., Dr. phil.
Voller, A., Dr. phil., Professor und Direktor des physikal. Staatslaboratoriums.
Wagner, H., Dr. phil., Professor an der Realschule vor dem Lübeckerthore.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

Bd. III. № 10. Ausgegeben im Februar 1900.

Michael Stifels handschriftlicher Nachlafs.

Von Edmund Hoppe.

Veranlafst durch die Konjektur eines Philologen, der behauptete, λόγος in dem Worte Logarithmus hiefse „Koëfficient", habe ich mich mit der Vorgeschichte der Logarithmen näher beschäftigt; freilich nicht um das Wort Logarithmus zu erklären, denn über dessen Bedeutung kann nach der vortrefflichen Geschichte Cantors überhaupt kein Zweifel mehr obwalten, sondern um festzustellen, ob in der griechischen Litteratur, welche auf die Mathematik des Abendlandes bis zum Jahre 1544 von Einfluſs gewesen ist, das Wort λόγος jemals in der Bedeutung Koëfficient vorkommt. Das Resultat dieser Prüfung ist ein negatives. Die griechischen Mathematiker bis auf Diophant (incl.) sind es, welche befruchtend, anregend, ja oft geradezu autoritativ für die Mathematiker des Abendlandes bis auf Stifel und Cardano gewirkt haben, während die byzantinische Wissenschaft, deren geringen Wert Cantor treffend schildert, gar keinen Einfluſs gehabt hat. In jener alten griechischen Litteratur bis auf Diophant incl. hat λόγος stets die Bedeutung „Verhältnis". Freilich in einigen (ich denke in zweien) aus dem Zusammenhang herausgerissenen Aufgaben des Nikomachos kann man λόγος sehr wohl durch Koëfficient übersetzen, ohne den Sinn zu entstellen, das ist natürlich überall da der Fall, wo das Verhältnis zur Einheit gemeint ist. Es ist darum nicht zufällig, daſs alle lateinischen Übersetzungen und Bearbeitungen griechischer Schriftsteller λόγος entweder als ratio oder als proportio übersetzen, und Logarithmus ist nichts als die getreue Rückübersetzung des längst vorher bekannten Begriffs „Zahl des Verhältnisses" oder „numerus proportionis".

Bei dieser Durchforschung der mathematischen Litteratur fand ich auf der hiesigen Stadtbibliothek das Handexemplar Stifels von seiner „Arithmetica integra". Ein wohl erhaltener Band, welchem

vor dem gedruckten Text 13 handschriftliche Blätter vorgebunden sind und in dem am Schluss des gedruckten Textes handschriftliche Blätter mit fortlaufender Bezifferung von fol. 323 bis fol. 506 folgen; fol. 505 ist herausgeschnitten. Von diesen Blättern sind unbeschrieben fol. 458—494. Alle übrigen, sowie auch der Rand und sonstige freie Stellen der bedruckten Blätter sind mit Bemerkungen und Erweiterungen bedeckt. Dafs diese handschriftlichen Aufzeichnungen von Stifel selbst herrühren, ergiebt sich aus dem Inhalt, der Form und der auf dem Titelblatt von anderer Handschrift herrührenden Angabe: „Hunc librum, quem ipse Auctor possessit et propria manu multis in locis auxit, donavit mihi Nobiliss. Dr. Johannes ab Auers-Walde in Plauten(?) Borussiae Ao. 1599. U. Erasmus Schmidt."

Wie das Buch dann in den Besitz der hiesigen Stadtbibliothek gelangt ist, weifs ich nicht; die Direktion derselben hat mir bereitwilligst gestattet, den handschriftlichen Text zu veröffentlichen. Es ist nun nicht von Interesse, den ganzen handschriftlichen Text herauszugeben, da der gröfste Teil desselben sich auf erweiterte Berechnung der im gedruckten Text gegebenen oder erwähnten Rechnungen bezieht oder Übungsbeispiele enthält, die nichts Neues den durch den gedruckten Text gegebenen Leistungen hinzufügen. So enthalten die Blätter 400—457 ausschliefslich Aufgaben von Cardanus, welche Stifel z. T. in sehr eleganter Form löst, besonders auch einige quadratische, kubische und biquadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten, welche stets mit den Buchstaben $\mathcal{A}$ und A bezeichnet werden, und charakterisieren sich diese Aufgaben nur als eine Fortsetzung der im 3ten Buche der Arith. integ. begonnenen Behandlung der Gleichungen. Ich werde daher aus diesem handschriftlichen Nachlafs nur das hier veröffentlichen, was von Wichtigkeit zu sein scheint für das Verständnis der grofsen Leistungen Stifels und bemerke, dafs Cantors Urteil über die hervorragenden Verdienste Stifels voll dadurch bestätigt werden dürfte.

Auf fol. 4 p. 2 und fol. 5 p. 1 bemerkt Stifel, dafs mit Brüchen nicht anders zu rechnen sei als mit ganzen Zahlen, da nur die Einheit, durch welche gemessen werde, verändert sei, z. B. $\frac{2}{3}$ heifse: 2mal die Einheit $\frac{1}{3}$ gesetzt. Fol. 6 p. 1. Das Rechnen mit Brüchen erfordert nur, dafs die Einheiten, wonach sie gemessen werden, erst gleich gemacht werden, und hat dann wie mit ganzen Zahlen stattzufinden, z. B. die Divisionsregel, dafs durch einen Bruch dividiert werde, indem mit dem reciproken Werte multipliziert werde, bedeute nur, dafs die Brüche auf gemeinsamen Nenner gebracht werden und dann die Zähler wie ganze Zahlen dividiert werden, z. B.

$$\tfrac{3}{4} : \tfrac{5}{7} = \tfrac{21}{28} : \tfrac{20}{28} = \tfrac{21}{20} = \tfrac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}.$$

Fol. 8 p. 2 giebt Stifel die Teilbarkeitsregeln. Cantor sagt von der Regel für die 7, sie sei richtig, aber zu eng. Stifel hat das auch schon gewufst, er fügt nämlich handschriftlich allen Regeln hinzu: „et praeterea nullum", aber bei der Regel für 7 fehlt dieser Zusatz. Am Rande werden die Regeln für 16, 32, 20, 30 und 40 hinzugefügt.

Fol. 12, wo von den Teilern einer Zahl die Rede ist, verweist Stifel auf fol. 339. Hier behandelt er die Aufgabe, die Teiler zu finden von 2329089562800. Er zerlegt in Primfaktoren:

$$2 . 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5 . 5 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23 . 29.$$

Die auf fol. 101 gegebene Cardanische Regel, dafs die Anzahl der Teiler eines Produktes aus n Primzahlen $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$ sei, ist hier nicht ohne weiteres anwendbar, da sie voraussetzt, dafs die n Primzahlen alle verschieden sind, aber er verfährt so, wie er zur Ableitung jener Regel auch verfahren ist. Er beginnt mit den ungleichen Faktoren und bildet die erste Ordnung durch Multiplikation von 23 . 29; als 2te Ordnung kommen die Teiler 23 und 29 selbst hinzu. Die dritte Ordnung enthält 19 und die Produkte aus 19 in die früheren Teiler, also im ganzen 4 Teiler; die 4te Ordnung bildet 17 und die Produkte von 17 in alle früheren Teiler, so fährt er fort und erhält die Anzahl aller Teiler aus der Reihe $1 + 2 + 4 + 8 + 16 +$ etc. Sobald nun ein Primfaktor mehrere Male vorkommt, hört die Summation der Reihe auf, die richtige Anzahl zu geben. Man kann empirisch fortfahren, indem man bei der 9ten Ordnung mit 25 und dem Produkt von 25 in alle früheren Teiler ebenso fortfährt, wie bei der 8ten Ordnung mit 5 und den Produkten aus 5 in alle früheren Teiler. Thatsächlich berechnet Stifel auf den Blättern von 340—354 nicht nur die Anzahlen, sondern die ersten 1535 Teiler selbst der Reihe nach, d. h. alle Teiler, welche aus den Primfaktoren $3^3 . 5^2 . 7 . 11 . 13 . 17 . 19 . 23 . 29$ gebildet werden können mit Ausschlufs der Zahl selbst. Bei der Anzahlbestimmung für die nun noch hinzukommenden Teiler durch den Faktor 2^4 verfährt Stifel aber anders, er sagt: durch die erste 2 erhalte ich hinzu 1536 Teiler, ebensoviel durch die 2 . 2, und durch die 2 . 2 . 2, und durch die 2 . 2 . 2 . 2, also 4mal 1536. Zählt man endlich die Zahl selbst (ut fieri solet) mit einem Teiler zu, so hat man 7680 Teiler, und er giebt die einzelnen Ordnungen schliefslich so an:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 384 + 1536 + 1. = 7680.$$
$$+ 128 + 384 + 1536$$
$$+ 384 + 1536$$
$$+ 1536$$

Wollte man diese Methode in Buchstaben schreiben für den Fall, dafs eine Zahl mit den Primfaktoren $a.b.c.d.... e^{\alpha}.f^{\beta}.g^{\gamma}...$ gegeben wäre, wo n die Anzahl der Primfaktoren mit dem Exponenten 1 sein soll, so ist die Anzahl der Teiler =

$$1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}+2^n\alpha+2^n(\alpha+1)\beta+2^n(\alpha+\beta+\alpha\beta+1)\gamma+1$$
$$= 2^n + 2^n\alpha + 2^n\beta + 2^n\gamma + 2^n\alpha\beta + 2^n\alpha\gamma + 2^n\beta\gamma + 2^n\alpha\beta\gamma$$
$$= 2^n(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1).$$

Fol. 19 p. 1. Stifel beginnt am Rande dieser Blätter eine Betrachtung über den Zusammenhang aller arithmetischen Reihen, deren Anfangsglied 1 ist und die ganzzahlig fortschreiten, mit der Reihe der Quadratzahlen. Um aus der Reihe I) 1, 4, 9, 16, 25 etc. die Summe der ersten n Glieder der Reihen *a*) 1, 2, 3, 4 . . ., *b*) 1, 3, 5 . . ., *c*) 1, 4, 7, 10 . . ., *d*) 1, 5, 9, 13 . . ., *e*) 1, 6, 11 etc. zu erhalten, hat man für *a*) vom $n$ten Gliede der Reihe I) das $n$te Glied der Reihe 0, 1, 3, 6, 10 etc. zu subtrahieren; bei *b*) das $n$te Glied der Reihe I) unverändert zu lassen; bei *c*) zum $n$ten Gliede der Reihe I) das $n$te Glied der Reihe 0, 1, 3, 6 etc. zu addieren; bei *d*) zum $n$ten Gliede der Reihe I) das $n$te Glied von 0, 2, 6, 12 . . zu addieren; bei *e*) zum $n$ten Gliede der Reihe I) das $n$te von 0, 3, 9, 18 . . zu addieren Auf p. 326 fügt Stifel die Bemerkung an, diese Summationen liefsen sich schöner durch die Cossischen Zahlen darstellen, nämlich die Summe in *a*) $= \frac{x^2+x}{2}$; in *b*) $= x^2$; in *c*) $= \frac{3x^2-x}{2}$; in *d*) $= 2x^2 - x$ in *e*) $= \frac{5x^2-3x}{2}$; in *f*) $= 3x^2 - 2x$, in *g*) $= \frac{7x^2-5x}{2}$, in *h*) $= 4x^2 - 3x$, in *i*) $= \frac{9x^2-7x}{2}$ et sic de aliis in infinitum.

Fol. 21 p. 2 und fol. 22 p. 1 in margine, sowie fol. 323 handschriftlich: Die Summe der n ersten Quadratzahlen ist: $\frac{(n^2+n)}{2}.\frac{(2n+1)}{3} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2$; die Summe der n ersten Kubikzahlen ist $= \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$ mit Ableitung und Beispielen. Daran schliefst sich fol. 323 p. 2 der Beweis, dafs die Polygonalzahlen eine arithmetische Reihe bilden mit der Differenz $\frac{x^2-x}{2}$, anfangend mit den Trigonalzahlen von der Form $\frac{x^2+x}{2}$.

Daran schliessen sich mehrere Beispiele über Pentagonal- und Hexagonalzahlen.

Fol. 34. Bei der Interpolation in eine geometrische Reihe fügt Stifel am Rande noch Beispiele an, die nicht der im gedruckten Text ausschliefslich benutzten Reihe 2, 4, 8, etc. entnommen sind,

z. B. zwischen 9 und 49 ein Glied einzuschalten, zwischen 8 und 27 zwei Glieder einzuschalten. Hierbei bemerke ich, was Cantor wohl übersehen hat (Bd. II p. 397), dafs Stifel in dem gedruckten Text schon hier (fol. 35, nicht erst fol. 44) bei Berechnung des Ausdrucks $(a+b)^5$ sagt: numeros autem multiplicantes medios numeros invenies ex tabula, quam ponam capite sequente de radicibus inveniendis (das ist die Koëfficiententafel). Das beweist, dafs Cantors Meinung die richtige ist, dafs nämlich Stifel seine Koëfficiententabelle durch Potenzieren gefunden und beim Potenzieren gebraucht hat. Auch glaube ich, dafs Stifel an dieser Stelle zuerst die Zahlen, welche sich in der Form $(a+b)^n$ schreiben lassen, numeri binomiales nennt (fol. 34). Diese auf fol. 118 des gedruckten Textes fortgesetzte Betrachtung ergänzt Stifel fol. 329—338 handschriftlich. Wenn zwischen zwei Zahlen a und b zwei Proportionale einzuschieben sind, so sind diese $(\sqrt[3]{a})^2 \cdot \sqrt[3]{b}$ und $\sqrt[3]{a} \cdot (\sqrt[3]{b})^2$. Rational sind diese Mittleren, wenn a und b Kuben oder cubicis similes sind. Ebenso werden 3, 4, etc. Proportionale eingeschaltet. Besonders führt er das Beispiel aus zwischen 6 und 1536 sieben Glieder einzuschalten. Er verfährt so: sind a und b die beiden Zahlen, so bildet er $a^7 . b$, zieht daraus die achte Wurzel und erhält so das erste einzuschaltende Glied. Denn sollen die Glieder eine Reihe bilden, so ist $b = a \cdot e^8$; also $a^7 \cdot a \cdot e^8 = (ae)^8$. Es entspricht dies der Interpolation in eine arithmetische Reihe, wenn man statt zu potenzieren multipliziert; statt zu radizieren dividiert; statt zu multiplizieren addiert. Also zwischen a und b sollen arithmetisch sieben Glieder eingeschaltet werden, $\frac{a \cdot 7 + b}{8}$ giebt das erste Glied. Für diese Vergleichung der geometrischen und arithmetischen Reihe fügt Stifel noch mehrere Beispiele an.

Stifel verbindet diese Auseinandersetzungen mit einer Aufgabe, die von Cardano herrührt und die er in dem gedruckten Text fol. 309 behandelt hat. Die Aufgabe lautet: Die Zahl 468 so in zwei Teile zu zerlegen, dafs das Quadrat des kleineren mit dem gröfseren multipliziert 5359375 giebt und das Quadrat des gröfseren mit dem kleineren multipliziert 14706125 giebt. Am Rande dieses Blattes hat Stifel dann noch die Aufgabe, die Zahl 10 so zu zerlegen, dafs die entsprechenden Produkte 96 resp. 144 geben, gelöst. Diese Lösung ist bemerkenswert, sie lautet: Sic stant numeri in sua proportionalitate. x, $\sqrt[3]{96}$, $\sqrt[3]{144}$, $10 - x$. Et quia termini sunt continue proportionales, ideo x in $\sqrt[3]{144}$ scilicet $\sqrt[3]{144 x^3}$ facit quantum $\sqrt[3]{96}$ in

se quadrate, videlicet $\sqrt[3]{9216}$. Ergo etiam cubi harum radicum aequantur: $144x^3$ aequantur 9216, facit $x^3 = 64$. Ergo x facit 4. —

Auf fol. 328 fährt Stifel nun so fort: Ex quo fundamento formaverit Cardanus exemplum illud suum quod posui fol. 309 facie 2: Positis quatuor terminis continue proportionalibus, si quadratum extremi minoris multiplicetur in extremum majus, tunc producitur cubus medii minoris. Sic si quadratum extremi majoris multiplicetur in extremum minus, tunc producitur cubus medii proportionalis majoris. — Item positis quinque terminis proportionalibus continue, si cubus extremi minoris multiplicetur in extremum majus producitur zensizensus medii minoris. Sic si cubus extremi majoris multiplicetur in extremum minus tunc producitur zensizensus medii majoris. Er fährt so mit 6 Gliedern fort und kommt dann, wie bei dem vorigen Beispiele zur 4ten Potenz des 2ten, respektive 4ten Gliedes, bei den 6 Gliedern zur 5ten Potenz der zweiten Glieder von Anfang und Ende gerechnet.

Stifel verfolgt hiermit, wie in vielen Bemerkungen zu den im Text behandelten Aufgaben, das Ziel zu zeigen, wie die Väter jener Aufgaben, vor allem Cardano und Christoph Rudolph, zu den zunächst überraschenden Aufgaben gekommen sind und wie sich mit diesem Schlüssel derartige Aufgaben leicht lösen lassen. Stifel lebte eben in einer Zeit, wo es wissenschaftliche Gepflogenheit war, die Gegner durch solche Aufgaben, die nach gewöhnlicher Methode behandelt, auf Gleichungen höherer Grade führten, herauszufordern und die, wenn man die Genesis der Aufgabe kannte, ungemein einfach waren.

Fol. 44 p. 2 ergänzt Stifel die Tabelle der Binomialkoëfficienten handschriftl. über die Mitte hinaus und fügt hinzu: rationem istam numerorum in vicibus suis tam diversis, ego satis admirari nequeo.

Die folgenden Blätter geben nur unwesentliche Ergänzungen zu dem, was er über die harmonischen Proportionen lehrt und deren Zusammenhang mit den arithmetischen. In Bezug auf die musikalischen Proportionen fügt Stifel handschriftlich hinzu die in ganzen Zahlen ausgeführte Berechnung einer nach Comma und Recisum primum fortschreitenden Skala zwischen dem Intervall gg bis G, sowie nach Comma, recisum secundum und tertium fortschreitende Skala zwischen g und G; d. h. die Oktave teilt er im ersten Falle in 30, im zweiten in 44 Intervalle. Es scheint mir jedoch von den bisherigen Bearbeitern des Stifelschen Buches die Betrachtung Stifels über die Einschaltung der Töne zwischen gegebenem Intervall auf fol. 78 und 79 des gedruckten Textes nicht beachtet zu sein. Stifel

lehrt darüber nämlich, dafs man das Intervall zwischen zwei Tönen durch die Wurzelausziehung halbieren solle. Zwischen zwei Tönen mit dem Längenverhältnis 1 : 2 liege $\sqrt{2}$ in der Mitte, so will er alle Intervalle teilen. Er wendet sich ausdrücklich gegen Jordanus und „andere gelehrte Männer", die das Fortschreiten in der Tonleiter nur in rationalen Verhältnissen gestatten. Er will das Fortschreiten nach irrationalen Verhältnissen. Es fehlt bei Stifel also nur noch die Durchführung dieses richtigen Gedankens für die Tonleiter, sonst müfsten wir Stifel als den Erfinder der temperierten Stimmung ansehen. Der Gedanke ist aber derselbe, wie wir ihn bei Werkmeister 1691 wiederfinden.

In Bezug auf das zweite Buch ist vielleicht die Bemerkung nicht uninteressant, dafs die grofsen Initialen der einzelnen Kapitel folgenden Satz enthalten: „M(agistro) Paulo Ebero salutem dicit, ora ut spinae hae verbum dei in nobis non suffocent! vale"; während die Anfangsbuchstaben der 28 Sätze des Appendix, worin Stifel die Gründe anführt, weshalb eine Quadratur des Kreises nicht möglich sei, die Antwort geben, auf wessen Wunsch er diese Untersuchung gemacht habe: Doctor Martinus Lutherus jussit. Die Initialen der Kapitel des dritten Buches bilden den Satz: A deo sunt omnia.

Zum zweiten Buche hat Stifel weniger Bemerkungen gemacht, im wesentlichen sind es nur Druckfehlerverbesserungen, oder Sätze im Text sind durchgestrichen und in präziserer Form am Rande vermerkt. So schreibt er fol. 103 p. 2 an den Rand für den gedruckten Text: Quod vero numeri irrationales non sint numeri fracti, sic demonstro. Nullus numerus fractus multiplicatione sui in se potest facere numerum integrum. Sed numeri irrationales faciunt multiplicatione sui in se numeros integros. Ergo numeri irrationales non sunt numeri fracti. — Fol. 121 p. 1 fügt Stifel am Rande bei, dafs die Proportionen auch rational sind, obgleich die einzelnen Glieder irrational sind, wenn sie nur commensurabel sind.

Das zweite Buch schliefst sich eng an Euklid und Campanus an in der Behandlung der irrationalen Gröfsen und es ist sehr bezeichnend, dafs Stifel die Existenz irrationaler Gröfsen unabhängig von geometrischer Deutung Euklid gegenüber verteidigt. Er meint, die Lehrsätze des Euklid im zehnten Buche bezögen sich auf abstrakte Zahlen, da aber die Beweise Euklids sich nur auf Liniengröfsen beziehen, so ist er der Meinung, dafs diese Beweise nicht von Euklid herrühren, sondern von Theon. In einer handschriftlichen Bemerkung fol. 144 sagt er, wenn sie doch von Euklid herrühren sollten, so sei Euklid

ein grofser Heuchler: „Aut si sunt Euclidis (quod non credo) fuit ipse magnus dissimulator".

In Bezug auf den Anhang zum zweiten Buche kann ich das Urteil Cantors nicht ganz unterschreiben. Stifel ist sich durchaus bewufst, dafs es sich nur um Näherungsberechnung handelt, wenn er sagt ein physischer Kreis sei quadrierbar. Er sagt gleich zu Anfang: possibile est, ut sumpta proportione aliqua propinqua inter semidiametrum et circumferentiam circuli physici, quadretur circulus ille ita ut quadratio illa satisfaciat sensibus. Dann giebt er diese Näherungsverhältnisse an, sagt von dem Archimedischen, dafs es so gute Annäherung gebe, dafs es das Urteil mancher getäuscht habe (dafs sie nämlich meinten, den Kreis wirklich rektifiziert zu haben), aber: frustra laborant, quotquot se calculationibus fatigant pro inventione quadraturae circuli! Freilich könne man wohl Proportionen zwischen Sehnen und Radius finden, aber Proportionen zwischen Sehnen und zugehörigen Bogen können weder in rationalen noch irrationalen Zahlen gefunden werden. Auch die Versuche, durch Wägung einer dünnen Kreisscheibe und einer gleichdicken geradlinig begrenzten Platte desselben Materials, oder durch Wägung einer Kugel und eines geradflächig begrenzten Körpers ein genaues Verhältnis zu finden, seien nutzlos, da es nicht möglich sei, eine vollkommene Kugel oder einen vollkommenen Kreis wirklich herzustellen. — Stifel spielt damit auf Vorschläge an, die vor ihm verschiedentlich gemacht waren, den Wert von π experimentell zu bestimmen.

Fol. 245 p. 2. Hier findet sich eine handschriftliche Bestätigung für die Meinung Cantors, dafs das merkwürdige Zeichen Stifels, welches er für die Unbekannte einführt $\mathcal{R}$, und woraus sich bei Späteren x als Zeichen für die Unbekannte bildete, aus radix entnommen ist. Er schreibt hinter die erste Reihe auf den Rand, wo die Gleichung $2x^4 = 1450 - 8x^2$ steht, radix est 25, während er hinter die folgenden Gleichungen handschriftlich setzt $\mathcal{R} = 36$ etc. — Auf derselben Seite mufs übrigens hervorgehoben werden, dafs im gedruckten Text hier auf die Bedeutung des Exponenten für die Gleichungen hingewiesen wird. In Bezug auf die eben erwähnte Gleichung sagt Stifel: „horum signorum exponentes sunt hi: 4, 2, 0"; und in Bezug auf die Gleichung $x^6 = 5120 - 16x^3$ sagt er: „signa cossica sunt $\frac{1}{2}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$, 0, eorum autem signorum exponentes sunt 6, 3, 0". Es scheint diese Einführung des Wortes Exponent von den bisherigen Bearbeitern übersehen zu sein, wenigstens erwähnt es Cantor nicht. Stifel führt die Bezeichnung auf fol. 235 p. 2 ein mit folgenden Worten: Notum est ex iis quae libro primo dixi, circa progressionum

Geometricarum expositiones, ut progressio numerorum naturaliter progredientium, exponat terminos progressionum Geometricarum. Quemadmodum igitur series numerorum naturalis, exponit singulas progressiones geometricas, ita etiam cossicam progressionem exponit. Eam vero expositionem sufficit subindicare sequenti dispositione:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	1ℋ	1ʒ	1ce	1ʒʒ	1β	1ʒce	1ββ

etc. Quemadmodum autem hic vides, quemlibet terminum progressionis cossicae, suum habere exponentem in suo ordine sic quilibet numerus cossicus, servat exponentem suae denominationis implicite, qui ei serviat et utilis sit, potissimum in multiplicatione et divisione, ut paulo inferius dicam etc.

Thatsächlich rechnet Stifel mit diesen Exponenten in den folgenden Aufgaben in freiester Weise. Er stellt folgende regula multiplicationis et divisionis auf: exponentes signorum in multiplicatione adde, in divisione subtrahe, tunc fit exponens signi fiendi.

Auf fol. 240 fügt er dann die Regel für das Radizieren und Potenzieren an, daſs man nämlich die Exponenten zu dividieren und multiplizieren habe.

Wenn man dies beachtet, so erscheinen die Versuche auf fol. 21, 30 und 326 in einem ganz anderen Lichte, als bei oberflächlicher Betrachtung. Stifel betrachtet da unter andern zwei Reihen mit gleichem Verhältnis, aber ungleichen Anfangsgliedern, z. B. 7 . (1, 2, 4, 8 . . .) und 3 . (1, 2, 4, 8 . . .). Ein Glied der ersten mit einem der zweiten Reihe multipliziert, giebt das Produkt der Anfangsglieder multipliziert mit der Potenz von 2, deren Exponent die Summe der Exponenten der Glieder ist, und analog bei der Division, wo die Differenz der Exponenten eintreten muſs. Unter diesem Gesichtspunkt gewinnt auch das Bemühen Stifels, alle möglichen Reihen auf die Reihe 1, 2, 4, 8, . . . zurückzuführen, eine andere Bedeutung. Er sucht offenbar nach der Darstellung aller Zahlen in einer geometrischen Reihe, um dann diese vereinfachte Rechnung anwenden zu können, d. h. um logarithmisch rechnen zu können. Die Darstellung ist ihm freilich nicht gelungen, aber daſs er den Wert derselben erkannt hat, geht aus den angeführten Beispielen deutlich hervor. Aus dem Grunde sucht er die Interpolation von Gliedern in eine geometrische Reihe und lehrt die Wurzelausziehungen bis zur achten Wurzel. Fol. 327 kommt Stifel auf die in fol. 30 gegebene Regel über die geometrische Reihe zurück. Er sagt, die dort nach Anleitung des Euklid gegebene Vorschrift passe eigentlich nur für wachsende Reihen, aber es gebe auch fallende, und um die Summationsformel darauf anzuwenden, solle man pro numero denominante progressionem statt

quotientem ex divisione minimi termini dividentis terminum proximum sibi se majorem lesen. Er summiert dann richtig mehrere fallende Reihen, z. B. $1\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} = 4\frac{17}{162}$ und giebt die Regel $s = \frac{te - a}{e - 1}$. Stifel will aber diese fallenden Reihen auch unendlich fortsetzen, indem er fol. 327 p. 2 die eben angeführte Reihe wiederholt und dabei sagt, sie schreite semper continue so fort, dann könne man nicht von einem terminum minimum sprechen, daher solle man als Quotienten wählen die Zahl qui producatur ex divisione secundi termini per primum. Stifel hat also auch, wohl als der erste, die unendliche fallende geometrische Reihe gekannt und summiert.

Es scheint mir auch, dafs die bisherigen Bearbeiter übersehen haben, dafs Stifel sich an Exponentialgleichungen wagt, freilich schreibt er sie noch nicht in unserer Form und die Art, wie er sie löst, ist auch eine empirische. Aber ich glaube doch, dafs er der erste ist, der überhaupt solche Betrachtungen anstellt. Fol. 53 p. 2 stellt er sich die Aufgabe $\frac{729}{64} = (\frac{3}{2})^x$. Er rechnet folgendermafsen: $\frac{729}{64} \cdot \frac{2}{3} = \frac{243}{32}$; $\frac{243}{32} \cdot \frac{2}{3} = \frac{81}{16}$; $\frac{81}{16} \cdot \frac{2}{3} = \frac{27}{8}$; $\frac{27}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{4}$; $\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$ und schliefst: Quando occurrit aequalitas, signum est proportionem dividentem numerare dividendam proportionem praecise. Quia autem factae sunt sex subtractiones, ideo quotiens divisionis hujus est 6.

Dann folgt ein Beispiel, bei welchem nicht 1 als Schlufsprodukt erfolgt: $\frac{2187}{128} = (\frac{27}{8})^x$. Er rechnet wieder: $\frac{2187}{128} \cdot \frac{8}{27} = \frac{81}{16}$; $\frac{81}{16} \cdot \frac{8}{27} = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{27} = \frac{4}{9}$. Hier ist abzubrechen: vides hic genus esse mutatum: provenit enim proportio minoris inaequalitatis. Quare tertia subtractio non debuit fieri. Quia ergo duae subtractiones factae sunt, ideo quotiens facit 2. Remansit autem $\frac{3}{2}$, et est illa remanens proportio tertia pars dividentis proportionis ideo totus quotiens facit $2\frac{1}{3}$; also $x = 2\frac{1}{3}$ etc. Allgemein diese Aufgaben zu lösen, konnte Stifel natürlich nur gelingen, wenn es ihm gelungen wäre, alle Zahlen in seine geometrische Reihe einzuordnen.

Ich habe schon erwähnt, dafs die handschriftliche Ergänzung sich in sehr ausgedehntem Mafse mit Aufgaben von Cardano und Rudolph beschäftigt, welche im allgemeinen nichts Neues bieten. Doch mag erwähnt werden, dafs Stifel bei einer solchen Aufgabe fol. 361, wo es sich um die Gleichung $x^2 = 12 - \sqrt{44} - 2x$ handelt, in der probatio zum ersten Male eine Klammer in unserm Sinne anwendet, er schreibt ... faciant aggregatum $(12 - \sqrt{44})$ quod sumptum cum $(\sqrt{44} - 2)$ faciat 10. In der Regel aber schreibt er *die Klammern* an Stelle von Anführungszeichen.

Bei diesen Gleichungen löst Stifel auch Gleichungen dritten Grades nach der Cardanischen Methode unter ausdrücklicher Nennung des Cardanus, z. B. fol. 428 die Gleichung $x^3 = 6912 - 432x$. Unter den Gleichungen mit zwei Unbekannten sind besonders häufig Gleichungen, welche sich nach unserer Schreibweise so darstellen: $(x - y)(x^3 - y^3) = a$; $(x + y)(x^3 + y^3) = b$. Stifels Methode ist hier zunächst $x \cdot y$ zu suchen, und dann $x^3 + y^3$ respektive $x + y$. Wie ich glaube, ist er der erste, der diese Methode anwendet, freilich thut er es nicht in dieser Form, er erleichtert sich die Gleichungen dadurch, dafs er die beiden Zahlen nicht x und y nennt, sondern $A + x$ und $A - x$, und dann $A \cdot x$ sucht. Aus der auch von Stifel befolgten Sitte die Zahlenbeispiele aus vorher angenommenen Werten zu bestimmen, erklärt es sich wohl, dafs er für eine Aufgabe mit zwei Unbekannten gelegentlich drei Gleichungen giebt. Ihm ist also in dieser handschriftlichen Ergänzung noch nicht bekannt, dafs die Zahl der Gleichungen der der Unbekannten gleich sein mufs und die Forderung der von einander unabhängigen Gleichungen kennt er ebenso wenig. Die meisten der Gleichungen hat er entweder direkt Cardano entnommen, oder dessen Aufgaben nachgebildet.

Von fol. 495 an bis fol. 504 beschäftigt sich Stifel mit Quadrat- und Kubikwurzelausziehungen aus Binomen nach der ähnlichen Methode, wie wir sie aus seiner 1553 besorgten Ausgabe der Rudolphschen Cos kennen.[1]) Er geht aber über jenes hinaus und giebt auch andeutungsweise die Beweise. Ich will zwei seiner Beispiele in Zahlen und Buchstaben wiederholen, zunächst die Aufgabe $\sqrt{38 + \sqrt{288}}$ auszurechnen, welche er in Zahlen bereits fol. 128 im gedruckten Text gegeben. Am Rande giebt er handschriftlich folgende Ableitung: Nennen wir das Resultat $x + a$, so mufs $x^2 + a^2 = 38$ sein, und $2ax = \sqrt{288}$. Er bildet $\left(\frac{x^2 + a^2}{2}\right)^2$, subtrahiert davon $(ax)^2$; die Wurzel aus diesem Ausdruck ist c, dann ist $\frac{a^2 + x^2}{2} + c = x^2$; denn $\frac{a^2 + x^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{x^2 + a^2}{2}\right)^2 - (ax)^2} = x^2$ und $\frac{a^2 + x^2}{2} - c = a^2$. Im vorliegenden Falle ist $19 + 17 = 6^2$; $19 - 17 = 2$, also die gesuchte Wurzel gleich $6 + \sqrt{2}$.

Auf fol. 501 und 503 findet sich unter andern die Aufgabe $\sqrt[3]{1836 + \sqrt{567675}}$ auszurechnen, er setzt die Wurzel $= x + a$;

1) Siehe Cantor, Geschichte II p. 409.

dann ist $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = 1836 + \sqrt{567675}$ und zwar $x^3 + 3xa^2 = 1836$; $3x^2a + a^3 = \sqrt{567675}$. Er bildet

$$(x^3 + 3xa^2)^2 - (3xa^2 + a^3)^2 = (x^2 - a^2)^3,$$

die dritte Wurzel daraus setzt er

$$= b = x^2 - a^2 = 141; \text{ d. h. } a^2 = x^2 - b,$$

diesen Wert setzt er in $x^3 + 3xa^2 = 1836$ und erhält:

$$4x^3 - 3bx = 1836, \text{ d. h. } x = 12; \text{ dann ist } a = \sqrt{3}.$$

Bei der Gelegenheit sei daran erinnert, dafs Stifel bereits in dem gedruckten Texte die Summierung der Kubikzahlen anwendet, fol. 306 und 307, und nicht erst Simon Jacob.[1]) Stifel lehrt dieselbe mit den Worten: Sic enim res habet, Progressione posita cuborum ab unitate naturaliter progredientium, qui signati sint suis radicibus cubicis. Summa omnium cuborum simul collecta facit numerum quadratum, cujus radix quadrata sit summa omnium radicum eorundem cuborum. Also $1 + 2^3 + \cdots + x^3 = \left(\frac{x^2 + x}{2}\right)^2 = \frac{x^4 + 2x^3 + x}{4}$.

Die auch von Cantor[2]) erwähnte Beschäftigung mit Diametralzahlen nimmt Stifel in der handschriftlichen Ergänzung wieder auf fol. 332. Um für die Reihe $1\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{5}$ etc. ein $n$tes Glied zu finden, hat man $n + \frac{n}{2n+1}$; um für die Reihe $1\frac{7}{8}$; $2\frac{11}{12}$; $3\frac{15}{16}$ etc. ein $n$tes Glied zu finden, hat man $n + \frac{4n+3}{4n+4}$. Bei der ersten Reihe ist der Diameter immer um 1 gröfser als die gröfste Seite, bei der zweiten stets um 2. Es ist z. B. die 1000ste Zahl der zweiten Reihe $= 1000\frac{4003}{4004}$, dann sind die beiden Seiten 4008003 und 4004, der Diameter aber ist 4008005.

Vereinigt man beide Reihen, so erhält man alle Diametralzahlen aus der Reihe: $1\frac{1}{3}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{11}{12}$, $\cdots$, hierin ist ein gerades Glied, z. B. das $2n$te $= n + \frac{4n+3}{4n+4}$ und ein ungerades, also das $(2n-1)$te Glied $= n + \frac{n}{2n+1}$.

Cantor spricht p. 644 die Vermutung aus, dafs Napier Stifels Arithmetica integra gekannt habe, ich möchte zum Schlusse auf eine Arbeit Napiers hinweisen, welche dies fast zur Gewifsheit macht. Nach dem Bericht des Earl of Buchan[3]) hat Napier schon vor seinen Rechenstäben eine Tafel zum bequemen Rechnen hergestellt und als „Local Arithmetic“ bezeichnet. Stifel war, wie ich oben zeigte, bemüht,

1) Cantor, Geschichte II p. 561.

2) ibid. p. 399.

3) An Account of the Life, Witness and Inventions of J. Napier.

alle Zahlen in seine geometrische Reihe 1, 2, 4, 8 etc. einzuordnen. Napier geht von derselben Reihe aus und sagt, alle Zahlen lassen sich als Summen von Gliedern aus dieser Reihe darstellen, wenn man das thut und sich nun eine Tafel macht von untenstehender Form, so läfst sich Multiplizieren und Dividieren durch Additionen und Subtraktionen ausführen; indem man nach Art des Abacus rechnet, z. B. 13. 19 sei auszurechnen, dann ist $13 = 8 + 4 + 1$; $19 = 16 + 2 + 1$.

								128
								64
								32
				0	0		0	16
								8
								4
				0	0		0	2
				0	0		0	1
128	64	32	16	8	4	2	1	

Ich habe also beim Multiplizieren die Steine in die Fächer zu setzen, wie in der Figur angedeutet ist; dann schneidet die Diagonale 128 einen Stein, die Diagonale 64 auch einen, die Diagonale 16 schneidet zwei, die Diagonale 8 ebenfalls zwei, und die Diagonalen 4, 2 und 1 je einen Stein. Es ist also die Summe $128 + 64 + 2 \cdot 16 + 2 \cdot 8 + 4 + 2 + 1 = 13 \cdot 19$. — Wir finden hier also Stifels Reihen wieder und auch den Gedanken Stifels, das Multiplizieren durch Addieren, das Dividieren durch Subtrahieren zu ersetzen, wenn auch die Art dieser Napierschen Lösung keineswegs das war, was Stifel erstrebte; die wirkliche Lösung gelang Napier erst später.

Über Reduktion linearer Modulsysteme.

Von Otto Pund in Altona.

Ein Modulsystem, das lauter ganzzahlige lineare Funktionen einer Unbestimmten x enthält, läfst sich stets auf ein solches reduzieren, das nur aus einer einzigen ganzzahligen linearen Funktion und einer ganzen Zahl besteht. Man kann zu diesem System durch wiederholte Anwendung des Satzes gelangen, dafs ein aus zwei linearen Funktionen bestehendes Modulsystem

$$(a'x + b',\ a''x + b'')$$

äquivalent ist dem reduzierten System

$$(ax + b,\ c),$$

wo

$$a = (a', a''), \quad c = \frac{a'b'' - a''b'}{a}$$

ist und b der Bedingung

$$(b, c) = (b', b'')$$

genügen mufs.[1]) Aus jedem linearen Modulsystem kann man noch den gröfsten gemeinschaftlichen Teiler aller Koëfficienten herausheben, der bei dem zuletzt genannten System durch $d = (a, b, c)$ dargestellt wird. Wenn nun die Unbestimmte x als ganze Zahl vorausgesetzt wird, so ist das Modulsystem noch einer weiteren Reduktion fähig, und zwar kann es dann auf die Form

$$d(x + r, m)$$

gebracht werden, wo m ein Teiler von $\frac{c}{d}$ ist. Die genauere Bestimmung dieser Zahl soll hier durchgeführt werden.

Fügt man dem System $(ax + b, c)$ als Vielfaches von c das Produkt cx hinzu und betrachtet sodann das Teilsystem $(ax + b, cx)$, so ergiebt sich dieses nach dem oben angeführten Satze als äquivalent $\left(a'x + b', \frac{bc}{a'}\right)$, wo $a' = (a, c)$ gesetzt ist und b' die Bedingung $\left(b', \frac{bc}{a'}\right) = b$ befriedigen mufs. Ergänzt man nun das Teilsystem durch Hinzunahme von c, so erhält man ein dem ursprünglichen System äquivalentes von der Gestalt

$$(a'x + b', c'),$$

in dem a' und b' die soeben angegebene Bedeutung haben, während

$$c' = \left(c, \frac{bc}{a'}\right) = \frac{c}{a'}(a', b) = \frac{c(a, b, c)}{(a, c)} = \frac{dc}{a'}$$

wird. Der gröfste gemeinschaftliche Teiler der Koëfficienten erweist sich hierbei als invariant, denn setzt man in $d' = (a', b', c')$ an Stelle von a', c' resp. (a, c), $\left(c, \frac{bc}{a'}\right)$ ein und beachtet $\left(b', \frac{bc}{a'}\right) = b$, so ergiebt sich sofort $d' = d$.

Das beschriebene Verfahren kann man nun beliebig oft anwenden. Durch zweimalige Anwendung gelangt man zu einem Modulsystem $(a''x + b'', c'')$, und hierbei ist

$$a'' = (a', c') = \frac{(a'^2, a'c')}{a'} = \frac{(a^2, ac, c^2, cd)}{(a, c)} = \frac{(a^2, ac, c^2, bc)}{(a, c)} = \frac{(a^2, dc)}{(a, c)},$$

$$c'' = \frac{c'd}{a'} = \frac{d^2c}{(a^2, dc)}.$$

---

1) Für das Nähere wie auch für das Folgende möge verwiesen werden auf des Verfassers Algebra mit Einschlufs der elementaren Zahlentheorie (Sammlung Schubert Bd. VI. Leipzig 1899) § 27, 28.

Es läfst sich nun durch vollständige Induktion beweisen, dafs man durch $k$malige Wiederholung des Verfahrens ein Modulsystem $(a'^{(k)}x + b^{(k)}, c^{(k)})$ erhält, in dem

$$a^{(k)} = \frac{(a^k, d^{k-1}c)}{(a^{k-1}, d^{k-2}c)}, \quad c^{(k)} = \frac{d^k c}{(a^k, d^{k-1}c)}$$

ist. Zu diesem Zwecke braucht nur gezeigt zu werden, dafs hieraus

$$a^{(k+1)} = (a^{(k)}, c^{(k)}) = \frac{(a^{k+1}, d^k c)}{(a^k, d^{k-1}c)}$$

$$c^{(k+1)} = \frac{d c^{(k)}}{a^{(k+1)}} = \frac{d^{k+1}c}{(a^{k+1}, d^k c)}$$

folgt. Die zweite Äquivalenz ergiebt sich sofort, wenn die erste bewiesen ist. Diese aber erhält man durch die Umformung

$$(a^{(k)}, c^{(k)}) = \frac{[(a^k, d^{k-1}c)^2, c d^k (a^{k-1}, d^{k-2}c)]}{(a^k, d^{k-1}c)(a^{k-1}, d^{k-2}c)},$$

bei der das Modulsystem im Zähler äquivalent $(a^{2k}, a^k d^{k-1}c, a^{k-1}d^k c, d^{2k-2}c^2)$ und weiter äquivalent $(a^{2k}, a^{k-1}d^k c, d^{2k-2}c^2)$ ist, sich somit auch als Produkt in der Form $(a^{k+1}, d^k c)(a^{k-1}, d^{k-2}c)$ darstellen läfst. Da sich nun $(a^{k-1}, d^{k-2}c)$ forthebt, so gelangt man in der That zu der ersten Äquivalenz.

Betrachten wir nun die Reihe der Modulsysteme

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{c}{d}\right), \quad \left(\frac{a^2}{d^2}, \frac{c}{d}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{a^k}{d^k}, \frac{c}{d}\right), \quad \ldots$$

so ergiebt sich aus dem Umstande, dafs einerseits jedes folgende durch das vorhergehende teilbar ist, während andererseits alle in $\frac{c}{d}$ enthalten sind, die Existenz einer kleinsten ganzen Zahl n derart, dafs

$$\left(\frac{a^{n+1}}{d^{n+1}}, \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a^n}{d^n}, \frac{c}{d}\right)$$

ist. Die Zahl kann man als die Gradzahl des Moduls $\frac{a}{d}$ in Bezug auf $\frac{c}{d}$ bezeichnen, und es ist nicht schwer zu zeigen, dafs für jede ganze Zahl $k \geq n$ immer

$$\left(\frac{a^k}{d^k}, \frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a^n}{d^n}, \frac{c}{d}\right)$$

ist. Daraus folgt dann weiter, dafs $a^{(k+1)} = d$ für $k > n$ wird. Wir können also das Ergebnis dieser Betrachtung dahin zusammenfassen, dafs das Modulsystem $(ax + b, c)$ sich auf die Form $d(x + r, m)$

reduzieren läßt, wenn $d = (a, b, c)$ den größten gemeinschaftlichen Teiler seiner Koëfficienten bedeutet, und m durch die Gleichung

$$m = \frac{s^{n-1}_c}{a^1 . s^{n-1}_{c^1}}$$

gegeben wird, in der n die Gradzahl von $\frac{a}{d}$ in Bezug auf $\frac{c}{d}$ bedeutet.

Verzeichnis der Abhandlungen des 1890 verstorbenen Mitgliedes der Mathematischen Gesellschaft Wilhelm Lazarus.

Zusammengestellt nach Grübmann, Fortschritte der Mathematik und nach den von Frau Lazarus der Mathematischen Gesellschaft überwiesenen Schriften, sowie auch nach dem von der Mathematischen Gesellschaft herausgegebenen Katalog:

1. Über Mortalitätsverhältnisse und ihre Ursachen. Hamburg 1867.
2. Die Grundlagen der Bilanzen der Pensions-Kasse für die Witwen und Waisen der Angestellten des Hamburgischen Staates. Hamburg 1874.
3. Die Bestimmung und Ausgleichung der aus Beobachtungen abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten. Hamb. Math. Gesellsch. 1878.
4. Ein Beitrag zur Theorie der Berechnung der Leibrenten. Berlin 1883.
5. Zur deutschen Lebensversicherungs-Sterblichkeitstafel. 1885.
6. Die soziale Gesetzgebung und die Mathematik. Mitteilungen der Mathemat. Gesellschaft in Hamburg. Festschrift 1890.

Zahlreiche Referate betreffend Wahrscheinlichkeitsrechnung und Assekurranz-Mathematik finden sich im „Jahrbuch der Fortschr. d. Math." von 1877 an.

Bericht über das Gesellschaftsjahr 1899/1900.

(Zusammengestellt vom Adjunkten Dr. J. Schröder.)

Versammlung am 14. Januar 1899.

Herr Wasserbaudirektor M. J. Buchheister wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. Köpcke hält einen Vortrag über „das Entsprechen von Strecken und Zahlen und [redacted] Charakter der Geometrie".

Hauptversammlung am 13. Februar 1899.

Der Jahrverwalter Herr Dr. Repsold erstattet den Bericht über das 209. Gesellschaftsjahr. Danach besteht die Gesellschaft aus 12 Ehrenmitgliedern, 17 auswärtigen Mitgliedern und 54 einheimischen Mitgliedern. — Zu dem vom Mitjahrverwalter Herrn Dr. Bohnert gegebenen Kassenberichte wird Herr Prof. Ahlborn als Revisor gewählt. — Bei der satzungsmäfsig vorzunehmenden Wahl eines Mitjahrverwalters für die Jahre 1899—1902 wird Herr Dr. F. Bohnert wiedergewählt. Der Vorstand besteht demnach im Geschäftsjahre 1899/1900 aus den Herren Dr. J. A. Repsold, Jahrverwalter, Dr. F. Bohnert, Mitjahrverwalter, und Dr. J. Schröder, Adjunkt. Zum Mitgliede der Redaktionskommission wird für die nächsten drei Jahre Herr Dr. E. Busche wiedergewählt. — Nach der Hauptversammlung findet das herkömmliche Stiftungsfestessen statt, an welchem sich mehrere Freunde der Gesellschaft beteiligen.

Versammlung am 11. März 1899.

Herr Arthur Scheller, Assistent an der hiesigen Sternwarte, wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. Pund trägt vor über „einige Anwendungen der Gruppentheorie".

Versammlung am 8. April 1899.

Herr Wirkl. Geh. Admiralitätsrat Direktor Prof. Dr. Neumayer spricht „über neuere Karten der erdmagnetischen Elemente".

Versammlung am 13. Mai 1899.

Es wird beschlossen, in die „Mitteilungen" ein Verzeichnis der Schriften des verstorbenen Mitgliedes Herrn W. Lazarus aufzunehmen. Mit dem Mathematischen-naturwissenschaftlichen Verein in Württemberg tritt die Gesellschaft in Schriftenaustausch. Herr Dr. Pund trägt vor über „einiges aus der Gruppentheorie". Darauf spricht Herr Dr. Schorr über „den Kometenfang durch Jupiter und das Tisserand'sche Theorem".

Versammlung am 10. Juni 1899.

Vor Eintritt in die Tagesordnung gedenkt der Vorsitzende, Herr Mitjahrverwalter Dr. Bohnert, mit ehrenden Worten des am 4. Juni

1899 verstorbenen, im Jahre 1860 in die Gesellschaft aufgenommenen Mitgliedes Herrn C. F. Steinhaus und entwirft eine Schilderung von dem Bildungsgange und der vielseitigen Wirksamkeit dieses allgemein verehrten, bis zu seinen letzten Tagen thätigen Mannes. Das Andenken des Verblichenen ehren die Anwesenden durch Erheben von den Sitzen. — Herr Prof. Dr. Hoppe hält einen Vortrag über „Reminiscenzen zur Elementarmathematik".

Versammlung am 9. September 1899.

Im Anschlufs an das Protokoll der letzten Sitzung giebt Herr Prof. Dr. Hoppe eine ergänzende Mitteilung zu seinem Vortrage, die sich auf die Stifel'sche Methode zur Berechnung der Anzahl der Teiler bezieht. — Der Jahrverwalter spricht Herrn Prof. Dr. Hoppe, welcher persönlich an der Enthüllungsfeier des Gaufs-Weber-Denkmals in Göttingen am 17. Juni 1899 teilnahm, den aufrichtigen Dank der Gesellschaft dafür aus, dafs er in freundlichem Eingehen auf die Bitte des Vorstandes gleichzeitig die Vertretung der Gesellschaft bei dieser Feier übernommen hatte. Am Denkmal wurde ein von der Deutschen Mathematikervereinigung und der Gesellschaft gemeinsam gestifteter Kranz niedergelegt. — Die Gesellschaft willigt in den Schriftenaustausch mit der Bibliothek des Eidgenössischen Polytechnikums in Zürich. — Herr Direktor Prof. Dr. Thaer trägt vor über „die Discussion der Kegelschnittgleichung ohne Anwendung von Transformationen". — Herr Dr. Bohnert spricht über „den Zusammenhang der Formeln der sphärischen und ebenen Trigonometrie". Herr Dr. Schröder macht eine Bemerkung zu der von Herrn Dr. Busche im letzten Mitteilungshefte publizierten Binomialkoëfficientendarstellung.

Versammlung am 13. Oktober 1899.

Herr Oberlehrer Dr. A. Pflaumbaum wird als ordentliches einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. J. Classen trägt vor über „eine neue Skala der absoluten Temperatur".

Versammlung am 11. November 1899.

Herr Dr. Busche hält einen Vortrag über „das Minkowski'sche Kriterium für algebraische Zahlen".

Versammlung am 16. Dezember 1899.

Herr Dr. F. Glage und Herr G. Lony werden als ordentliche einheimische Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen. Herr Dr. Pund behandelt in einem Vortrage den „Fundamentalsatz der projektiven Geometrie".

Versammlung am 13. Januar 1900.

Herr Dr. Messerschmitt trägt vor „über die Konstitution der Erdrinde". Herr Prof. Dr. Hoppe spricht über „die von Dieterici vorgenommene Korrektion der van der Waals'schen Gleichung".

Die Gesellschaft verdankt wertvolle Zusendungen folgenden Herren: Boegehold, Bubendey, Buchheister, Cantor, Hessenberg, Hillers, A. Hurwitz, Juel, Kiepert, Königsberger, Kowalewski, Krüfs, Landau, Ludendorff, Maack, Marx, Nitsche, Ruckdeschel, Rudio, Schilling, Schrader, Schubert, Schur, Thaer, sowie allen Gesellschaften, mit denen die Mathematische Gesellschaft in Schriftenaustausch steht.

Zusendungen bittet die Gesellschaft zu richten an die Adresse

„Mathematische Gesellschaft, Hamburg,
Patriotisches Gebäude."